

ANÁLISE DO MOVIMENTO RETILÍNEO COM DERIVADAS E INTEGRAIS

Egner Pessoa de Carvalho, egner.c2506@ufob.edu.br¹

Iuri Benedito da Silva Santos, iuri.santos@ufob.edu.br¹

Vinicius Coelho dos Santos, viniciuscs@ufob.edu.br¹

Géssica Silva Amorim, gessica.amorim@ufob.edu.br¹

¹ Universidade Federal do Oeste Baiano, Av. Dr. Manoel Novaes, 1028, 47600-000, Bom Jesus da Lapa – Bahia.

Resumo. Neste artigo, serão exploradas as diferentes aplicações da derivada no cálculo e na análise do movimento retilíneo de corpos rígidos. É fundamental compreender o conceito de derivada para entender como as variáveis de movimento, tais como posição, velocidade e aceleração, mudam ao longo do tempo. Na primeira parte do artigo, é feita uma explicação teórica sobre os princípios da derivada e como eles são aplicados no estudo do movimento retilíneo. Além disso, o conceito de integral é brevemente introduzido como uma ferramenta complementar, útil em situações onde se deseja determinar grandezas físicas a partir de suas taxas de variação. Em seguida, serão apresentados casos concretos que exemplificam como é viável utilizar a derivada para o cálculo da velocidade instantânea, aceleração e demais características do movimento. Por fim, serão examinadas as consequências dessas aplicações na solução de problemas físicos e no desenvolvimento de sistemas dinâmicos. Este trabalho tem como objetivo fornecer uma compreensão completa das aplicações do conceito de derivada no contexto do movimento em linha reta, com uma breve menção à integral, incluindo tanto a teoria quanto exemplos práticos.

Palavras chave: velocidade, aceleração, derivada, integral, MRU, MRUV.

Abstract. In this article, we will explore the different applications of the derivative in the calculation and analysis of the rectilinear motion of rigid bodies. It is essential to understand the concept of derivative to understand how motion variables, such as position, velocity, and acceleration, change over time. In the first part of the article, a theoretical explanation is made about the principles of the derivative and how they are applied in the study of rectilinear motion. In addition, the concept of integral is briefly introduced as a complementary tool, useful in situations where one wants to determine physical quantities from their rates of change. Then, concrete cases will be presented that exemplify how it is feasible to use the derivative to calculate instantaneous velocity, acceleration and other characteristics of the movement. Finally, the consequences of these applications in the solution of physical problems and in the development of dynamical systems will be examined. This paper aims to provide a complete understanding of the applications of the derivative concept in the context of straight-line motion, with a brief mention of the integral, including both theory and practical examples.

Keywords: velocity, acceleration, derivative, integral, Uniform Rectilinear Motion (URM), Uniformly Accelerated Rectilinear Motion (UARM).

1. INTRODUÇÃO

A compreensão do movimento retilíneo é fundamental para diversas áreas da engenharia, especialmente na engenharia mecânica, onde o estudo da cinemática é essencial para o projeto e a análise de sistemas dinâmicos, como mecanismos, veículos e estruturas em movimento (Hibbeler, 2016). O uso de ferramentas matemáticas, como o cálculo diferencial e integral, permite uma descrição precisa e quantitativa das variações de posição, velocidade e aceleração ao longo do tempo, sendo indispensável para o desenvolvimento de modelos físicos e simulações computacionais (Beer *et al.*, 2015; Stewart, 2013).

A derivada, nesse contexto, fornece os meios para determinar grandezas instantâneas, como a velocidade e a aceleração, a partir de funções que descrevem a posição de um corpo em movimento. Já o cálculo integral permite obter o deslocamento ou a posição a partir de funções de velocidade ou aceleração, sendo amplamente aplicado na modelagem de sistemas mecânicos e na resolução de problemas de engenharia, como no dimensionamento de componentes sujeitos a cargas variáveis (Thomas *et al.*, 2017; Halliday *et al.*, 2016).

Pesquisas recentes demonstram como o cálculo diferencial e integral mantém relevância em aplicações contemporâneas de engenharia. Estudos como os de Siciliano *et al.* (2021) na robótica móvel e de Negrut *et al.* (2022) em simulações de sistemas dinâmicos comprovam a aplicação atualizada dos conceitos de derivada em problemas complexos. Na área de análise estrutural, trabalhos como os de Bathe (2014) e Wriggers (2020) destacam o uso avançado de métodos integrais para previsão de comportamento mecânico sob cargas variáveis.

Embora os conceitos de derivada e integral no estudo do movimento retilíneo sejam amplamente abordados na literatura técnica, este trabalho se propõe a sistematizar e ampliar suas aplicações práticas na engenharia mecânica. Por meio de exemplos concretos - desde a modelagem básica de movimento até simulações computacionais avançadas -, demonstramos como o cálculo diferencial e integral se torna indispensável na análise do comportamento dinâmico de sistemas mecânicos. Nossa abordagem busca estabelecer uma ponte clara entre o rigor matemático e as necessidades práticas da engenharia contemporânea, oferecendo estudos de caso que dialogam diretamente com os desafios profissionais do engenheiro mecânico.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

A análise do movimento retilíneo e a aplicação das derivadas para determinar grandezas como velocidade e aceleração instantâneas encontram suporte sólido em obras consagradas de cálculo e dinâmica. Este referencial teórico se baseia principalmente nos conceitos apresentados por Stewart (2013) e Beer *et al.* (2015).

2.1. O cálculo diferencial e integral e suas aplicações no movimento retilíneo

Stewart (2013) oferece uma base detalhada para o entendimento do cálculo diferencial e integral, com uma atenção especial ao conceito de derivada. Ele introduz a ideia de velocidade instantânea utilizando um exemplo cotidiano: "Se você observar o velocímetro de um carro no tráfego urbano, verá que o ponteiro não fica parado por muito tempo; isto é, a velocidade do carro não é constante. Podemos conjecturar, pela observação do velocímetro, que o carro tem uma velocidade definida em cada momento. Mas como definir essa velocidade 'instantânea'?" (Stewart, 2013, p. 78).

A partir dessa questão, Stewart explora como a derivada de uma função que descreve a posição de um objeto em relação ao tempo pode ser utilizada para calcular essa velocidade instantânea. Ele também aborda a aplicação da segunda derivada para determinar a aceleração instantânea, destacando a importância dessas operações na modelagem matemática do movimento. Além disso, o autor apresenta o conceito de integral como uma forma de calcular o deslocamento de um objeto ao longo do tempo, a partir da função de velocidade. Essas ferramentas permitem descrever de forma precisa e quantitativa o comportamento de sistemas em movimento, possibilitando tanto a análise local (derivada) quanto a global (integral).

2.2. Dinâmica e o estudo do movimento retilíneo

Em sua obra, Beer *et al.* (2015) aborda o movimento retilíneo a partir de uma perspectiva aplicada, utilizando princípios da mecânica clássica e do cálculo diferencial e integral. A obra é fundamental para entender como as leis de Newton se relacionam diretamente com as grandezas derivadas, como velocidade e aceleração, e como essas grandezas descrevem o movimento de objetos em trajetórias retilíneas. Além disso, o uso da integral para calcular grandezas acumuladas, como o deslocamento, a partir da função de velocidade, é uma técnica essencial em diversas aplicações práticas.

O autor discute em detalhes, a importância de se considerar tanto a magnitude quanto a direção das grandezas vetoriais, como a velocidade e a aceleração, em análises dinâmicas. Ele também enfatiza a utilização do cálculo diferencial e integral para resolver problemas práticos de engenharia, onde a precisão e a aplicação direta dessas operações matemáticas são cruciais para soluções eficientes e seguras.

2.3. Integração teórica e aplicações práticas

Tanto a abordagem teórica de Stewart quanto a aplicação prática discutida por Beer mostram como as derivadas e integrais são ferramentas indispensáveis no estudo do movimento retilíneo. A derivada permite a análise local das taxas de variação, como velocidade e aceleração, enquanto a integral proporciona uma visão mais ampla, permitindo o cálculo de grandezas acumuladas ao longo do tempo, como o deslocamento.

A integração dessas perspectivas permite uma compreensão abrangente das aplicações do cálculo diferencial e integral, tanto do ponto de vista matemático quanto físico. Ao combinar a clareza teórica de Stewart com as aplicações práticas detalhadas por Beer, esse artigo se propõe a explorar a aplicação das derivadas e integrais no cálculo da velocidade, aceleração e deslocamento instantâneos de maneira prática e teórica, conectando a matemática pura com a física aplicada.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1. Definição do movimento

O movimento de uma partícula é a mudança de posição em relação a um referencial ao longo do tempo. Inicialmente, é importante definir o conceito de posição, uma vez que este artigo aborda exclusivamente partículas, sem considerar sua massa ou geometria. Posição é o local onde uma partícula se encontra em um sistema de coordenadas.

O deslocamento de uma partícula é a variação de sua posição ao longo do tempo, resultando em uma nova posição em relação a um ponto de referência. O ponto "O" é chamado de posição inicial ou origem, e o ponto "O'" representa a posição final. O deslocamento, representado por Δx , corresponde à diferença entre a posição final e a posição inicial, e indica a mudança efetiva de lugar da partícula, independentemente da trajetória percorrida. No Sistema Internacional de Unidades (SI), o deslocamento é medido em metros. Portanto, temos a fórmula para o deslocamento, Eq. (1):

$$\Delta x = x_f - x_i \quad (1)$$

onde, x_f é a posição final e x_i a posição inicial. No exemplo, o deslocamento é de $\Delta x = 4$ m.

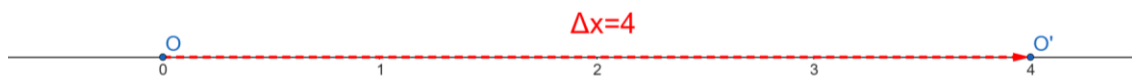


Figura 1. Representação de deslocamento (autoria própria, 2025).

Ao incluir a variável tempo, é possível analisar o movimento de maneira mais detalhada. No exemplo de uma partícula se deslocando da posição "O" para "O'" em um determinado intervalo de tempo, o tempo decorrido é representado por "t" (no SI, em segundos). Para essa análise, também consideramos o tempo inicial e final da partícula. A variação do tempo é dada por $\Delta t = t_f - t_i$.

Com essas variáveis, podemos construir um gráfico que relaciona a posição ao tempo. No exemplo anterior, onde a partícula se desloca por 4 metros em 2 segundos, o gráfico correspondente está representado Fig. 2.

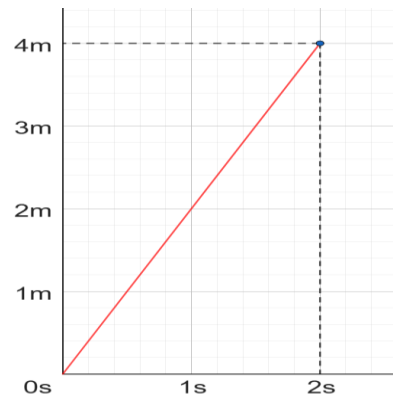


Figura 2. Gráfico de Deslocamento x Tempo (autoria própria, 2025).

A partir desse gráfico, é possível determinar a posição da partícula em qualquer instante de tempo. Um conceito fundamental na análise do movimento é a velocidade, definida como a razão entre o deslocamento e o intervalo de tempo, o que chamamos de velocidade média, calculada pela equação: $v_m = \Delta x / \Delta t$. No exemplo, $v_m = 4m / 2s = 2m/s$. A unidade de velocidade, de acordo com o SI, é metros por segundo.

O próximo conceito a ser analisado é a aceleração. A aceleração média é a variação da velocidade ao longo do tempo. No exemplo anterior, a aceleração média pode ser determinada a partir do gráfico da Fig. 3. Calculamos a velocidade média em diferentes trechos da trajetória, dividida entre 0 e 1 segundo, e de 1 a 2 segundos, como ilustrado na Fig. 3.

Calculando a velocidade média para esses trechos, temos a Equação (2) para o primeiro trecho (0 a 1 segundo) e a Equação (3) para o segundo trecho (0 a 2 segundos):

$$v_{m_1} = (2 - 0) / (1 - 0) = 2m / s \quad (2)$$

$$v_{m_2} = (4 - 0) / (2 - 0) = 2m / s \quad (3)$$

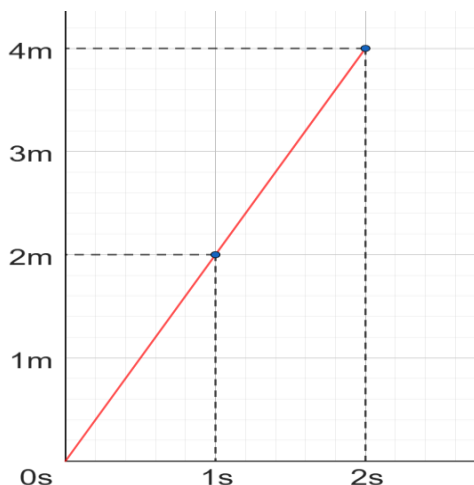


Figura 3. Gráfico de Deslocamento x Tempo (autoria própria, 2025).

Com isso, podemos calcular a aceleração média, utilizando a fórmula $a_m = \Delta v / \Delta t$. Neste exemplo, a variação de velocidade é nula, resultando em uma aceleração média igual a 0, indicando que o movimento é retilíneo uniforme, pois não há aceleração.

Para uma compreensão mais completa, considere o exemplo de uma partícula que percorre 16 metros em 4 segundos, como mostra a Tab. 1:

Tabela 1. Tempo e deslocamento de uma partícula (autoria própria, 2025).

Tempo (s)	Deslocamento (m)
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

A partir da Tabela 1 é possível plotar um gráfico de deslocamento em função do tempo, representado na Fig. 4.

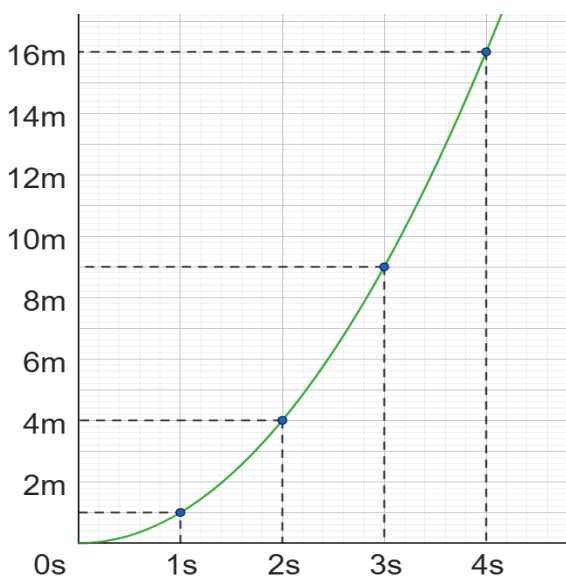


Figura 4. Gráfico de Deslocamento x Tempo de um movimento acelerado (autoria própria, 2025).

Calculando a velocidade média em cada instante de tempo, obtemos a Tab. 2:

Tabela 2. Tempo e velocidade de uma partícula (autoria própria, 2025).

Tempo (s)	Velocidade (m/s)
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4

É notável que a velocidade aumenta com o passar do tempo a uma taxa de 1 m/s a cada segundo. A partir da Tab. 2 é possível plotar um gráfico de velocidade em função do tempo, representado na Fig. 5.

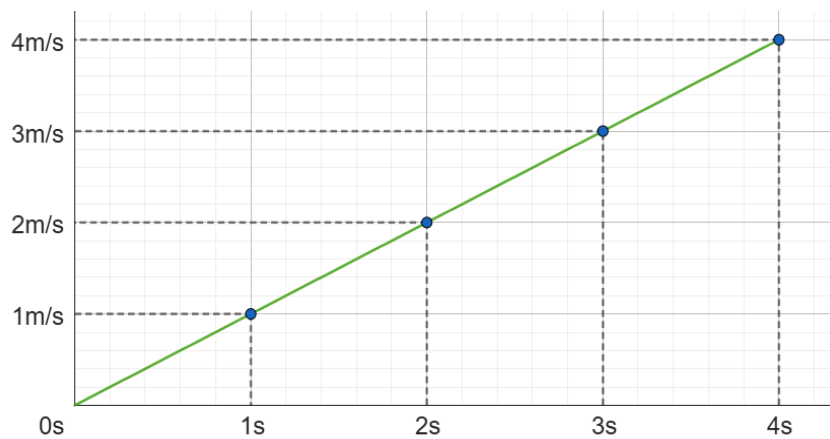


Figura 5. Gráfico de Velocidade x Tempo de um movimento acelerado (autoria própria, 2025).

Analisando o gráfico da Fig. 6, é notável o aumento da velocidade a 1m/s a cada segundo, isso é a aceleração agindo na partícula e se existe variação da velocidade é possível calcular a aceleração. Se realizar o cálculo para encontrar a variação da velocidade, achará essa variação igual a 1, ou será $\Delta a = 1\text{m/s}^2$, assim dizendo que essa trajetória representa um movimento retilíneo uniformemente variável, pois existe aceleração.

3.2. Velocidade e aceleração instantânea

Nos estudos anteriores, discutimos a velocidade e a aceleração médias. Agora, para analisarmos a variação dessas grandezas a cada instante, precisamos introduzir o conceito de funções matemáticas que descrevem o movimento.

Em física, o movimento retilíneo de uma partícula pode ser descrito por uma função que relaciona a posição $x(t)$ da partícula ao tempo t . Esta função indica onde a partícula se encontra em um dado instante e pode assumir diferentes formas, dependendo do tipo de movimento. Por exemplo, uma função comum para o movimento uniformemente acelerado é uma função quadrática do tempo, como $x(t) = 4t^2$.

A partir da função da posição, podemos obter outras grandezas relacionadas ao movimento, como a velocidade e a aceleração, que são encontradas através das derivadas da função posição em relação ao tempo. A derivada, neste contexto, mede a taxa de variação de uma quantidade em relação a outra.

Agora que temos a função que descreve o movimento, vamos introduzir a velocidade instantânea e a aceleração instantânea, aplicando o conceito de derivada.

A velocidade instantânea é a taxa de variação da posição em relação ao tempo em um instante específico. Enquanto a velocidade média considera o deslocamento total ao longo de um intervalo de tempo, a velocidade instantânea é obtida ao fazer com que esse intervalo tenda a zero. Isso nos dá a Eq. (4) da derivada da posição em relação ao tempo:

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) \quad (4)$$

onde, $v(t)$ representa a velocidade instantânea, $x(t)$ é a função da posição em função do tempo, e $\frac{d}{dt}$ é a notação da derivada em relação ao tempo. A derivada nos permite calcular a velocidade da partícula em qualquer ponto da trajetória, como ilustrada na Fig. 6, que mostra a curva da posição ao longo do tempo e uma linha tangente em um ponto, representando a velocidade instantânea naquele ponto específico.

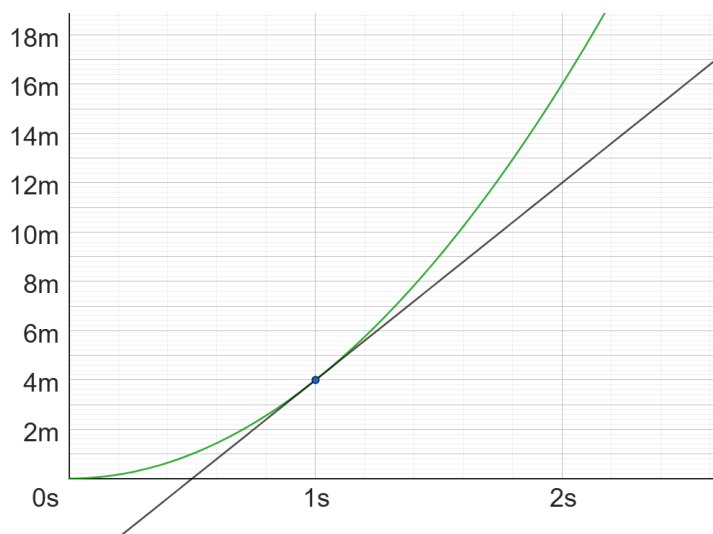


Figura 6. Gráfico de Deslocamento x Tempo de um movimento acelerado com uma reta tangente ao deslocamento (autoria própria, 2025).

A aceleração instantânea é definida de maneira semelhante. Ela representa a taxa de variação da velocidade ao longo do tempo em um determinado instante, sendo obtida pela derivada da velocidade em relação ao tempo, como mostra a Eq. (5).

$$a(t) = \frac{d}{dt} v(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t) \quad (5)$$

sendo, $a(t)$ é a aceleração instantânea, e a notação $\frac{d^2}{dt^2} x(t)$ representa a derivada segunda da posição em relação ao tempo. No caso de uma aceleração constante, como em muitos movimentos retilíneos uniformemente variáveis, a reta tangente ao gráfico da função $v(t)$ coincide com a reta da própria função, pois a inclinação da reta (derivada da velocidade, ou seja, a aceleração) é constante. Isso significa que a taxa de variação da velocidade em cada ponto é a mesma, e, por isso, a função da velocidade é uma reta.

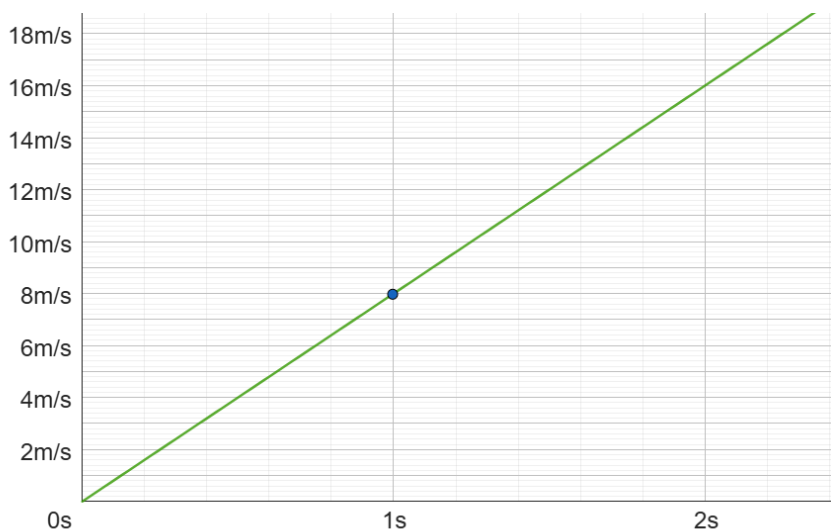


Figura 7. Gráfico Velocidade x Tempo (autoria própria, 2025).

Como exemplo prático, considere uma partícula cuja posição em função do tempo é dada por $x(t) = 4t^2$. Para encontrar a velocidade instantânea, calculamos a derivada dessa função, conforme a Eq. (6):

$$v(t) = \frac{d}{dt}(4t^2) = 8t \quad (6)$$

Assim, a velocidade da partícula a cada instante depende do tempo, aumentando linearmente à medida que t cresce. Se quisermos determinar a aceleração instantânea, derivamos a função da velocidade, conforme a Eq. (7):

$$a(t) = \frac{d}{dt}(8t) = 8 \text{ m} / \text{s}^2 \quad (7)$$

Isso nos mostra que a aceleração é constante e igual a 8 m/s^2 . Essa abordagem por meio das derivadas é fundamental para descrever o movimento em termos mais precisos, especialmente quando as condições variam a cada instante, como em movimentos acelerados ou desacelerados.

3.3. Equações de movimento

O movimento retilíneo pode ocorrer de duas maneiras principais: com velocidade constante, conhecido como movimento retilíneo uniforme, ou com aceleração constante, chamado de movimento retilíneo uniformemente variado. Para descrever ambos matematicamente, usamos a derivada e a integral, que nos ajudam a compreender como as variáveis de movimento evoluem com o tempo.

3.3.1. Movimento retilíneo uniforme

Quando a velocidade é constante, a aceleração é zero, e o movimento é chamado de retilíneo uniforme. A equação diferencial que descreve esse movimento é a Eq. (4), aqui v é a velocidade constante. Para encontrar a posição da partícula $x(t)$, manipulamos a equação a favor de integrar em ambos os lados da equação principal em relação ao tempo t :

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v dt \quad (8)$$

A solução dessa integral nos dá a equação para a posição da partícula, também conhecida como equação horária do espaço:

$$x(t) = x_0 + vt \quad (9)$$

onde x_0 é a posição inicial da partícula no instante $t = 0$, e v é a velocidade constante. Isso significa que a posição $x(t)$ varia linearmente com o tempo.

3.3.2. Movimento retilíneo uniformemente acelerado

No movimento retilíneo uniformemente acelerado, a aceleração da partícula é constante. A relação entre a velocidade v e o tempo t pode ser descrita pela Eq. (5). Utilizando o mesmo conceito, integrando a equação para encontrar a função horária da velocidade $v(t)$, temos que:

$$\int_{v_0}^v dv = a \int_0^t dt \quad (10)$$

A solução da integral resulta na equação horária da velocidade:

$$v(t) = v_0 + at \quad (11)$$

onde v_0 é a velocidade inicial da partícula no instante $t = 0$ e a é a aceleração constante.

Para encontrar a posição $x(t)$ em uma equação de movimento retilíneo uniformemente variado, manipulando a Eq. (11), substituindo $v(t)$ pela sua derivada correspondente conforme a Eq. (4) e integrando ambos os lados da equação:

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t (v_0 + at) dt \quad (12)$$

A solução dessa integral nos dá a Eq. (13), que corresponde a equação da posição:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad (13)$$

Esta equação descreve como a posição da partícula varia com o tempo em um movimento uniformemente acelerado, levando em conta a velocidade inicial v_0 , a aceleração constante a e a posição inicial x_0 .

3.3.3. Relação entre velocidade e posição

Podemos também relacionar a velocidade e a posição diretamente sem passar pelo tempo. Isolando dt na Eq. (5) e Eq. (4), e igualando ambos os termos, temos:

$$a dx = v dv \quad (14)$$

Integrando ambos os lados, obtemos:

$$\int_{v_0}^v v dv = a \int_{x_0}^x dx \quad (11)$$

A solução dessa integral é:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad (12)$$

Essa equação é particularmente útil quando precisamos relacionar a velocidade e a posição diretamente sem envolver o tempo t , desenvolvida pelo físico italiano Evangelista Torricelli, assim tendo seu nome batizando a equação, Equação de Torricelli.

4. CONCLUSÃO

Este trabalho explora a aplicação de derivadas e integrais no estudo do movimento retilíneo (uniforme e uniformemente acelerado). A derivada analisa taxas de variação (posição, velocidade e aceleração), enquanto a integral reconstrói grandezas cinemáticas a partir dessas taxas. Essas ferramentas matemáticas são fundamentais não apenas para a resolução de problemas práticos, como a modelagem de sistemas físicos, mas também para entender a dinâmica do mundo ao nosso redor. A derivada nos dá a capacidade de prever como o movimento muda a cada instante, enquanto a integral nos permite reconstruir a trajetória completa a partir dessas taxas de variação. A compreensão dessas ferramentas é, portanto, indispensável para qualquer estudo de sistemas físicos e dinâmicos, proporcionando uma base sólida para o desenvolvimento de técnicas mais avançadas de análise em física e engenharia.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bathe, K. J. *Finite Element Procedures*. 2nd ed. Prentice Hall, 2014.
- Beer, F. P., Johnston, E. R. Jr., Mazurek, D. F. *Dinâmica*, Edição 9. São Paulo: McGraw-Hill, 2015.
- Halliday, D., Resnick, R., Walker, J. *Fundamentos de Física: Mecânica*, Volume 1, 10ª Edição. Rio de Janeiro: LTC, 2016.
- Hibbeler, R. C. *Dinâmica: Mecânica para Engenharia*. 14ª ed. São Paulo: Pearson, 2016.
- Negrut, D. et al. *Parallel Computing in Multibody System Dynamics*. Springer, 2022.
- Siciliano, B. et al. *Robotics: Modelling, Planning and Control*. 2nd ed. Springer, 2021.
- Stewart, J. *Cálculo*, Volume 1, Edição 7. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
- Thomas, G. B., Weir, M. D., Hass, J. *Cálculo*, Volume 1, 13ª Edição. São Paulo: Pearson, 2017.
- Wriggers, P. *Nonlinear Finite Element Methods*. 2nd ed. Springer, 2020.

6. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.