

MODELAGEM ESTOCÁSTICA DE METAMATERIAIS PIEZELÉTRICOS COM VARIABILIDADE ESPACIAL

Leopoldo Vilella Cardoso Ribeiro, leopoldovc@usp.br¹

Luiz Henrique Marra da Silva Ribeiro, luiz.marra@usp.br¹

Carlos De Marqui Jr., demarqui@sc.usp.br¹

¹ Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia Aeronáutica, Av. João Dagnone, 1100, Santa Angelina, CEP: 13563-120, São Carlos - SP

Resumo. *Vibração pode causar danos catastróficos em estruturas, máquinas e equipamentos, podendo gerar perdas econômicas e humanas. Abordagens convencionais não se mostram tão eficientes em certas aplicações quanto estruturas eletromecânicas periódicas, que vêm sendo estudadas e aplicadas recentemente. Além disso, a variabilidade inerente ao processo de manufatura e montagem não podem ser desconsiderados das análises focando em aplicações em larga escala. O objetivo desse trabalho é a expansão da metodologia baseada em sistemas lineares variantes no tempo (LTV-based approach) para vigas periódicas de Euler-Bernoulli piezelétricas com variabilidade geométrica e de circuito, visando análises de confiabilidade e otimização robusta. Utilizando um algoritmo Bayesiano de cadeia de Markov via Monte Carlo (MCMC), estimou-se a variabilidade das propriedades do cristal e foram simuladas respostas estocásticas, onde verificou-se um maior sensibilidade nas frequências próximas da ressonância local.*

Palavras chave: *Metamaterial. Piezeletricidade. Vibração mecânica. Campos estocásticos. Bayesiano.*

Abstract. *Vibration can cause catastrophic damage to structures, machines, and equipment, potentially leading to economic and human losses. Conventional approaches are not always as efficient in certain applications as periodic electromechanical structures, which have been increasingly studied and applied in recent years. Furthermore, the inherent variability of manufacturing and assembly processes cannot be disregarded in analyses aimed at large-scale applications. The objective of this work is to expand the methodology based on linear time-varying systems (LTV-based approach) to periodic piezoelectric Euler-Bernoulli beams with geometric and circuit variability, aiming at reliability analysis and robust optimization. Using a Bayesian Markov Chain Monte Carlo (MCMC) algorithm, the variability of the crystal properties was estimated, and stochastic responses were simulated, revealing higher sensitivity at frequencies near the local resonance.*

Keywords: *Metamaterial. Piezoelectricity. Mechanical vibration. Stochastic fields. Bayesian.*

1. INTRODUÇÃO

A presença de vibrações em sistemas mecânicos, mesmo em amplitudes moderadas, pode causar falhas por fadiga (Marzocca *et al.*, 2002), comprometer o desempenho operacional, reduzir a durabilidade de componentes (Hu *et al.*, 2021) e, em situações extremas, provocar acidentes graves. Além disso, vibrações estão frequentemente associadas à emissão de ruído, riscos à integridade de operadores e prejuízos à qualidade do produto final (Fernando *et al.*, 2018). Dentre as soluções tradicionalmente empregadas para minimizar vibrações e suas consequências, destacam-se os absorvedores dinâmicos passivos (Brennan, 2006).

Metamateriais e cristais fonônicos têm se destacado por sua capacidade de atenuar a propagação de ondas em faixas de frequência conhecidas como *band-gaps*. A utilização de materiais inteligentes tem proporcionado a realização de metamateriais adaptativos, com destaque para os metamateriais piezelétricos onde as propriedades dinâmicas podem ser modificadas alterando-se as propriedades dos circuitos *shunt* (Sugino *et al.*, 2016). A interação eletromecânica entre a cerâmica piezelétrica e circuitos indutivos permite a formação de *band-gaps* de ressonância local, que podem ser utilizados para a atenuação de vibrações em diferentes faixas de frequências através da sintonização de indutores, além da possibilidade de variação de propriedades dinâmicas no tempo e no espaço com circuitos *shunt* digitais, ampliando a possibilidade de aplicações em engenharia (Thomes *et al.*, 2021).

A presença de variabilidade geométrica e de propriedades mecânicas é uma característica inerente a estruturas manufaturadas, como é o caso de metamateriais e cristais fonônicos (Souza *et al.*, 2020). Variação de propriedades pode afetar significativamente as bandas de atenuação (Ribeiro *et al.*, 2022b), pois quebra a periodicidade presumida em modelos determinísticos baseados no teorema de Bloch-Floquet (Mace *et al.*, 2005). Embora tal abordagem perca validade ponto a ponto sob variabilidade, estudos mostram que a inferência estatística sobre o conjunto de amostras ainda permite sua

aplicação (Ribeiro *et al.*, 2022c). Para lidar com essas incertezas, diversos métodos têm sido propostos, incluindo técnicas frequentistas e Bayesianas, além de modelagens de campos estocásticos via expansões de caos polinomial, Karhunen-Loève (KL), estimadores lineares ótimos, suavizadores por *kernel* e processos gaussianos (Ribeiro *et al.*, 2022a).

Diversos métodos têm sido empregados para obter diagramas de dispersão em estruturas com variações espaciais, destacando-se o Método dos Elementos Finitos (FEM), que permite calcular a matriz de rigidez dinâmica a partir das matrizes de rigidez, massa e amortecimento (Craig Jr e Kurdila, 2006), e o Método dos Elementos Espectrais (SEM), que pode fornecer essa matriz diretamente no domínio da frequência por meio de soluções analíticas (Lee, 2001). Contudo, o FEM exige discretizações mais refinadas — ao menos seis elementos por comprimento de onda (Langer *et al.*, 2017) — o que pode elevar o custo computacional em médias e altas frequências, em comparação ao SEM (Ribeiro *et al.*, 2022c). Os dois métodos, no entanto, dependem da representação adequada da geometria e da variabilidade das propriedades mecânicas, sendo que elementos espectrais só estão disponíveis para certos tipos de variação com solução analítica conhecida (Assis *et al.*, 2019). Em estruturas unidimensionais, pode-se utilizar o método da matriz de transferência para determinar o número de onda em função da frequência (Mace *et al.*, 2005), embora FEM e SEM possam apresentar problemas com condicionamento matricial (Ribeiro *et al.*, 2022c). Outra abordagem amplamente utilizada é o método da expansão em ondas planas (PWEM), que representa a geometria periódica e as propriedades do material como séries de Fourier (Dal Poggetto e de França Arruda, 2021), com base no teorema de Bloch-Floquet.

Alternativamente, é possível transformar as equações elastodinâmicas no domínio da frequência em um sistema de primeira ordem no domínio espacial, cuja solução — obtida via equações de Riccati formuladas em termos de matrizes de impedância (Georgiev *et al.*, 2011), com condições de contorno apropriadas (Denis *et al.*, 2015) — permite calcular os números de onda a partir da matriz de transferência (Assis *et al.*, 2019; Ribeiro *et al.*, 2023). Esse método, denominado Space-State-Riccati (SSR), apresenta vantagens em relação ao PWEM, que necessita ser reformulado para cada aplicação (Assis *et al.*, 2019) e pode ter lenta convergência devido ao fenômeno de Gibbs (Cheng e Shi, 2013). Mais recentemente, o novo método baseado em teorias de sistemas lineares variantes no tempo (*Linear time-varying* - LTV) foi desenvolvido para se calcular diagramas de dispersão e respostas forçadas de estruturas com variações no espaço (Ribeiro *et al.*, 2023). Esse modelo apresenta todas as vantagens do SSR, mas necessita de apenas uma integral, o que o torna mais apropriado para simulações estocásticas pois demanda um menor custo computacional.

Este trabalho visa a expansão da metodologia apresentada em Ribeiro *et al.* (2023) (*LTV-based approach*) para metamateriais piezelétricos. Em particular, trata-se de uma viga Euler-Bernoulli composta por uma subestrutura elástica com elementos piezelétricos periodicamente distribuídos ao longo de seu comprimento. Utilizando um algoritmo Bayesiano MCMC, estima-se a variabilidade das propriedades do circuito elétrico (circuito *shunt*) como distribuições de probabilidade, e das propriedades geométricas como campos estocásticos com correlação espacial, servindo como base para análises estatísticas de sistemas eletromecânicos e otimização robusta para cristais fonônicos e metamateriais piezelétricos.

2. METODOLOGIA

2.1 A formulação em espaço de estados

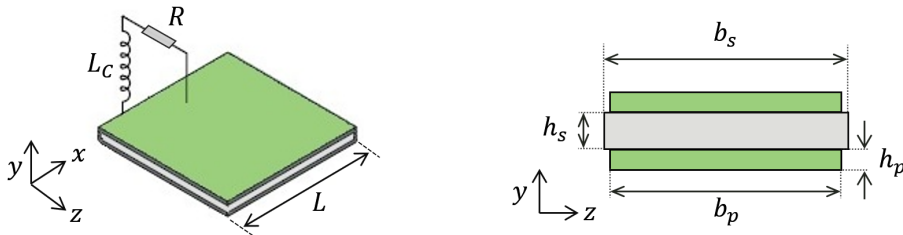


Figura 1: Célula unitária do metamaterial piezelétrico.

As equações de movimento de uma viga metamaterial piezelétrica associada à um circuito *shunt* resistivo-indutivo, definida pela Fig. 1, considerando as hipóteses de Euler-Bernoulli são dadas por

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[E(x)I(x) \frac{\partial^2 u_y(x, t)}{\partial x^2} + \Theta v(x, t) \right] + \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u_y(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t), \quad (1a)$$

$$q(x, t) = - \int_0^L \Theta \frac{\partial^2 u_y(x, t)}{\partial x^2} dx - C_p v(x, t), \quad (1b)$$

onde L é o comprimento da célula, $E(x)$, $I(x)$, $\rho(x)$ e $A(x)$, são o módulo de Young, momento de inércia, densidade e área da seção transversal da viga, respectivamente. Para uma célula piezelétrica bimorfa em série, o termo de acoplamento

eletromecânico e capacitância equivalente são, respectivamente,

$$\Theta = \frac{\bar{\epsilon}_{31} b_p}{2h_p} \left[\left(h_p + \frac{h_s}{2} \right)^2 - \left(\frac{h_s}{2} \right)^2 \right], \quad C_p = \frac{\bar{\epsilon}_{33}^S b_p L}{2h_p}, \quad (2)$$

sendo b_s a largura do substrato, b_p a largura da cerâmica piezelétrica, h_s a espessura do substrato, h_p a espessura da cerâmica, $\bar{\epsilon}_{31} = d_{31}/s_{11}$ a constante piezelétrica reduzida para o estado plano de tensões, $\bar{\epsilon}_{33}^S = \epsilon_{33}^T - d_{31}/s_{11}$, ϵ_{33}^T é a permissividade reduzida, s_{11} é a constante piezelétrica e d_{31} é o coeficiente de deformação piezelétrica (Erturk (2009)).

Utilizando a definição da corrente elétrica no circuito $i(x, t) = \frac{\partial q(x, t)}{\partial t}$, e considerando a relação $i(x, t) = v(x, t)Y$ (Purcell (2013)), onde Y é a admitância do circuito *shunt* equivalente, obtém-se

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[E(x)I(x) \frac{\partial^2 u_y(x, t)}{\partial x^2} + \Theta v(x, t) \right] + \rho(x)A(x) \frac{\partial^2 u_y(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t), \quad (3a)$$

$$v(x, t)Y = -\Theta \int_0^L \frac{\partial^3 u_y(x, t)}{\partial x^2 \partial t} dx - C_p \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}. \quad (3b)$$

Assumindo ausência de termo forçante ($f(x, t) = 0$) e reescrevendo a equação Eq. (3a) no domínio da frequência, com as soluções harmônicas $u_y(x, t) = \hat{U}_y(x)e^{i\omega t}$ e $v(x, t) = \hat{V}_y(x)e^{i\omega t}$ (Doyle e Doyle (1989)), obtém-se:

$$\begin{aligned} [E(x)I(x)] \frac{\partial^4 \hat{U}_y(x)}{\partial x^4} + 2 \left[\frac{\partial E(x)}{\partial x} I(x) + I(x) \frac{\partial I(x)}{\partial x} \right] \frac{\partial^3 \hat{U}_y(x)}{\partial x^3} + \left[\frac{\partial^2 E(x)}{\partial x^2} I(x) + E(x) \frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial E(x)}{\partial x} \frac{\partial I(x)}{\partial x} \right] \frac{\partial^2 \hat{U}_y(x)}{\partial x^2} - \\ - [\omega^2 \rho(x)A(x)] \hat{U}_y(x) + [\Theta] \frac{\partial^2 \hat{V}_y(x)}{\partial x^2} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Considerando a regra do retângulo na integral $\int_0^L \frac{\partial^4 u_y(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} dx \approx (L - 0) \frac{\partial^4 u_y(\bar{x}, t)}{\partial x^2 \partial t^2}$ (Davis e Rabinowitz (2007)), e assumindo $0 \leq \bar{x} \leq L$ e que $\bar{x} \approx x$ para um valor suficientemente pequeno de L , a Eq. (3b) e suas derivadas podem ser reescritas como

$$\hat{V}_y(x) \approx \left[\frac{i\omega\Theta L}{Y + i\omega C_p} \right] \frac{\partial^2 \hat{U}_y(x)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \hat{V}_y(x)}{\partial x} \approx \left[\frac{i\omega\Theta L}{Y + i\omega C_p} \right] \frac{\partial^3 \hat{U}_y(x)}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^2 \hat{V}_y(x)}{\partial x^2} \approx \left[\frac{i\omega\Theta L}{Y + i\omega C_p} \right] \frac{\partial^4 \hat{U}_y(x)}{\partial x^4}, \quad (5)$$

que substituídas na equação mecânica acoplada (Eq. (4)), resulta na seguinte equação diferencial

$$\frac{\partial^4 \hat{U}_y(x)}{\partial x^4} \approx -2 \left[\frac{\frac{\partial E(x)}{\partial x} I(x) + I(x) \frac{\partial I(x)}{\partial x}}{E(x)I(x) + \frac{i\omega\Theta^2 L}{Y + i\omega C_p}} \right] \frac{\partial^3 \hat{U}_y(x)}{\partial x^3} - \left[\frac{\frac{\partial^2 E(x)}{\partial x^2} I(x) + E(x) \frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial E(x)}{\partial x} \frac{\partial I(x)}{\partial x}}{E(x)I(x) + \frac{i\omega\Theta^2 L}{Y + i\omega C_p}} \right] \frac{\partial^2 \hat{U}_y(x)}{\partial x^2} + \left[\frac{\omega^2 \rho(x)A(x)}{E(x)I(x) + \frac{i\omega\Theta^2 L}{Y + i\omega C_p}} \right] \hat{U}_y(x). \quad (6)$$

Define-se, à partir da equação mecânica expandida em função de soluções harmônicas (Eq. (4)), a matriz do sistema de espaço de estados $\mathbf{H}(x)$ como

$$\mathbf{H}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \left[\frac{\omega^2 \rho(x)A(x)}{E(x)I(x) + \frac{i\omega\Theta^2 L}{Y + i\omega C_p}} \right] & 0 & - \left[\frac{\frac{\partial^2 E(x)}{\partial x^2} I(x) + E(x) \frac{\partial^2 I(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial E(x)}{\partial x} \frac{\partial I(x)}{\partial x}}{E(x)I(x) + \frac{i\omega\Theta^2 L}{Y + i\omega C_p}} \right] & -2 \left[\frac{\frac{\partial E(x)}{\partial x} I(x) + I(x) \frac{\partial I(x)}{\partial x}}{E(x)I(x) + \frac{i\omega\Theta^2 L}{Y + i\omega C_p}} \right] \end{bmatrix} \quad (7)$$

onde foi considerado que $\partial \mathbf{z}(x)/\partial x = \mathbf{H}(x)\mathbf{z}(x)$ e $\mathbf{z}(x) = \left\{ \hat{U}_y(x) \frac{\partial \hat{U}_y(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{U}_y(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^3 \hat{U}_y(x)}{\partial x^3} \right\}$.

Utilizando as definições de momento e força cortante em uma viga sob hipóteses de Euler-Bernoulli, obtém-se: $\hat{M}(x) = -E(x)I(x) \frac{\partial^2 \hat{U}_y(x)}{\partial x^2}$ e $\hat{Q}(x) = -\frac{\partial \hat{M}(x)}{\partial x}$. Desta forma, a matriz $\mathbf{G}(x)$ de transformação (Ribeiro *et al.* (2023)) é definida como

$$\mathbf{G}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left[\frac{\partial E(x)}{\partial x} I(x) + E(x) \frac{\partial I(x)}{\partial x} \right] & [E(x)I(x)] \\ 0 & 0 & -[E(x)I(x)] & 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

e a relação do elemento de viga de Euler-Bernoulli é expressa como $\mathbf{y}(x) = \mathbf{G}(x)\mathbf{z}(x)$, onde $\mathbf{y}(x) = \left\{ \hat{U}_y(x) \frac{\partial \hat{U}_y(x)}{\partial x} \hat{Q}(x) \hat{M}(x) \right\}$.

2.2 Cálculo do diagrama de dispersão

O par de estados avaliados nas posições x e x_0 dentro da célula unitária pode ser relacionado por meio de

$$\mathbf{z}(x) = \boldsymbol{\phi}(x, x_0)\mathbf{z}(x_0), \quad (9)$$

sendo $\boldsymbol{\phi}(x, x_0)$ a matriz de transição (Fivel (2022)). Uma aproximação para a matriz de transição é obtida pela discretização de x em N subintervalos equiespaçados de comprimento Δ_x ($\Delta_1 = \dots = \Delta_N = \Delta_x$), resultando na expressão

$$\boldsymbol{\phi}(L, x_0) \approx \expm(\Delta_N \mathbf{C}_N) \expm(\Delta_{N-1} \mathbf{C}_{N-1}) \dots \expm(\Delta_1 \mathbf{C}_1) \approx \prod_{n=1}^N \expm(\Delta_n \mathbf{C}_n), \quad (10)$$

onde $\expm(\cdot)$ representa a função exponencial matricial. Para cada subintervalo n da célula, a matriz constante $\mathbf{C}_n$ é definida conforme Friedmann *et al.* (1977) por uma integral neste subintervalo

$$\mathbf{C}_n = \frac{1}{\Delta_n} \int_{x_{n-1}}^{x_n} \mathbf{H}(s) ds. \quad (11)$$

A exponencial da matriz $\Delta_n \mathbf{C}_n$ pode ser avaliada pela decomposição espectral $\boldsymbol{\psi}_C \boldsymbol{\Lambda}_C \boldsymbol{\psi}_C^{-1}$, onde $\boldsymbol{\psi}_C$ é o conjunto de autovetores e $\boldsymbol{\Lambda}_C$ contém, diagonalmente, as exponenciais dos autovalores da matriz $\Delta_n \mathbf{C}_n$.

Com a matriz de transição $\boldsymbol{\phi}(L, 0)$ obtida, pode-se relacionar os estados $\mathbf{z}(L)$ e $\mathbf{z}(0)$ de maneira simples. Dessa forma, a matriz de transferência $\mathbf{T}$, que associa os deslocamentos e forças internas entre as extremidades de um elemento unidimensional para uma frequência ω arbitrária, pode ser expressa por

$$\mathbf{y}(L) = \mathbf{G}(L)\mathbf{z}(L) = \mathbf{G}(L)\boldsymbol{\phi}(L, x_0)\mathbf{z}(0) = \mathbf{T}\mathbf{y}(0), \text{ sendo } \mathbf{T} = \mathbf{G}(L)\boldsymbol{\phi}(L, x_0)\mathbf{G}(0)^{-1}, \quad (12)$$

que combinada com o operador e^{ikL} , que descreve a propagação de ondas entre as extremidades de uma célula unitária, obtém-se um problema de autovalores cujas soluções fornecem os números de onda correspondentes a uma frequência ω (Mace *et al.* (2005))

$$\mathbf{T}\mathbf{y}(0) = e^{ikL}\mathbf{y}(0), \quad (13)$$

onde os autovetores $\mathbf{y}(0)$ caracterizam os modos das ondas propagantes.

2.3 Determinação da matriz de rigidez dinâmica

A matriz de rigidez dinâmica $\mathbf{D}$, que relaciona forças internas $\mathbf{F}$ e deslocamentos $\mathbf{u}$ no domínio da frequência, pode ser definida por partição da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}(0) \\ -\mathbf{F}(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(0) \\ \mathbf{u}(L) \end{Bmatrix}. \quad (14)$$

Por outro lado, a matriz de transferência vincula os deslocamentos e forças em $x = 0$ e $x = L$ via:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}(L) \\ \mathbf{F}(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(0) \\ \mathbf{F}(0) \end{Bmatrix}, \quad (15)$$

e ao isolar o termo $\mathbf{F}(0)$ da primeira linha e substituí-lo na segunda, pode-se reescrever a matriz de rigidez dinâmica $\mathbf{D}$ em função da matriz de transferência, conforme proposto em Assis *et al.* (2019):

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -\mathbf{T}_{12}^{-1}\mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12}^{-1} \\ -\mathbf{T}_{21} + \mathbf{T}_{22}\mathbf{T}_{12}^{-1}\mathbf{T}_{11} & -\mathbf{T}_{22}\mathbf{T}_{12}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Dessa forma, a resposta forçada de uma metacadeia composta por múltiplas células unitárias pode ser determinada por meio da montagem direta de uma matriz global de rigidez dinâmica (Craig Jr e Kurdila (2006)) totalmente determinada pelo sistema de espaço de estados previamente definido.

2.4 A cadeia de Markov via Monte Carlo

Com o intuito de incorporar dados estatísticos dos parâmetros geométricos e de circuito que definem as células periódicas do metamaterial piezoeletrico no cálculo de seus diagramas de dispersão, são utilizados métodos de cadeia de Markov via Monte Carlo (MCMC) para estimar as médias e desvios padrão das distribuições de cada uma destas propriedades, consideradas como distribuições normais.

Algoritmos de MCMC são determinados pela utilização do teorema de Bayes para estimativa da média μ e desvio padrão σ da distribuição de probabilidade de uma variável aleatória Y (no caso de distribuições normais), que devem ser tais que a verossimilhança das amostras coletadas $Y_i = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ desta variável seja máxima. Isto é possível através da utilização da equação

$$\pi(\mu, \sigma|Y) \propto p(Y|\mu, \sigma) \cdot \pi(\mu) \cdot \pi(\sigma), \quad (17)$$

onde definem-se distribuições *a priori* $\pi(\mu)$ e $\pi(\sigma)$ baseadas no conhecimento prévio dos parâmetros μ e σ , frequentemente consideradas distribuições uniformes em um intervalo - quando não se deseja impor conhecimento prévio à estimativa - e calcula-se, para diversos valores dos parâmetros escolhidos aleatoriamente, a verossimilhança $p(Y|\mu, \sigma)$ das amostras para este par de parâmetros, de forma que são escolhidos os parâmetros que maximizam a verossimilhança das amostras.

No caso deste projeto de pesquisa, foi utilizado o algoritmo de Metropolis-Hastings (Robert (2016)) para estimativa dos parâmetros de cada variável aleatória e campo estocástico, sendo a convergência do algoritmo verificada com o número de iterações realizadas pelo MCMC pela convergência da média dos valores calculados durante a cadeia de Markov para a média e desvio das distribuições. Com os parâmetros de cada distribuição, é possível incorporar variabilidade no sistema eletromecânico através da Expansão de Karhunen–Loève Analítica.

2.5 Expansão de Karhunen–Loève Analítica

Outra abordagem relevante, a Expansão de Karhunen–Loève (KLE), permite modelar processos estocásticos por meio de funções analíticas (De Cursi e Sampaio (2015)). Neste contexto, o campo estocástico é representado como $Y_x = f_x + Z_x$, sendo f_x a média e Z_x o componente centrado na média:

$$Z_x = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_s} \psi_s(x) W_s, \quad (18)$$

onde W_s são variáveis aleatórias, e $\psi_s(x)$ e λ_s são, respectivamente, os autovetores e autovalores da integral da equação de autovalores:

$$\int_{-L}^L \varphi(x_1, x_2) \psi_s(x_2) dx_2 = \lambda_s \psi_s(x_1), \quad -L \leq x_1 \leq L, \quad (19)$$

com a variância local σ^2 do campo Z_x sendo compatível com a variância das variáveis W_i , que assumimos sendo distribuições normais. Truncando a soma em um número finito de termos, obtém-se uma aproximação para o campo:

$$Y_x \approx f_x + \sum_{i=1}^N \sqrt{\lambda_s} \psi_s(x) W_s. \quad (20)$$

Considera-se o domínio $-L \leq x \leq L$, embora nas simulações apenas $0 \leq x \leq L$ seja utilizado. Para o campo Z_x , a função de correlação adotada é $\varphi(x_1, x_2) = \exp\left(-\frac{|x_1 - x_2|}{L}\right)$, onde L denota o comprimento da célula unitária. Os termos a_s e b_s são soluções das seguintes equações transcendentais:

$$\begin{cases} La_s + \tan(La_s) = 0, & \text{para } s \text{ par,} \\ 1 - Lb_s \tan(Lb_s) = 0, & \text{para } s \text{ ímpar,} \end{cases} \quad (21)$$

a partir das quais se obtêm os autovalores e autovetores como:

$$\lambda_s = \begin{cases} \frac{2L}{1 + L^2 a_s^2}, & \text{para } s \text{ par,} \\ \frac{2L}{1 + L^2 b_s^2}, & \text{para } s \text{ ímpar,} \end{cases} \quad \psi_s(x) = \begin{cases} \frac{\sin(a_s x)}{\sqrt{L - \frac{\sin(2a_s L)}{2a_s}}}, & \text{para } s \text{ par,} \\ \frac{\sin(b_s x)}{\sqrt{L - \frac{\sin(2b_s L)}{2b_s}}}, & \text{para } s \text{ ímpar.} \end{cases} \quad (22)$$

Desta forma, as variáveis aleatórias Y são utilizadas para simular a variabilidade dos componentes elétricos presentes no circuito *shunt*, resistências dos resistores, capacitâncias dos capacitores e indutâncias dos indutores, e os campos estocásticos Y_x são utilizados para simular as variabilidades espaciais dos parâmetros geométricos $I(x)$ e $A(x)$ calculados através das larguras e espessuras do substrato ($b_s(x)$ e $h_s(x)$) e da cerâmica piezelétrica ($b_p(x)$ e $h_p(x)$). Como a expansão KL possui uma solução analítica contendo funções de seno, as derivadas necessárias para o método proposto podem ser facilmente obtidas. Quando esses parâmetros aleatórios são incluídos na modelagem proposta, pode-se calcular respostas estocásticas como diagrama de dispersão e resposta forçada estocásticos através de amostragem de Monte Carlo (Rubinstein e Kroese, 2016). Note que estamos assumindo que as variabilidades dos parâmetros mecânicos são negligenciáveis. Então, estimação e inferência estatísticas podem ser aplicadas no resultado estocástico.

3. RESULTADOS

Foram coletadas amostras de largura, espessura e comprimento das vigas piezelétricas, assim como das resistências dos resistores, indutâncias dos indutores e capacitâncias dos piezos para inferência das médias μ e desvios σ das distribuições normais de cada parâmetro através de MCMC. Na Fig. 2 é mostrada a convergência da média dos parâmetros da distribuição das indutâncias L_C com as iterações do algoritmo de MCMC entorno dos parâmetros inferidos da distribuição *a posteriori*. A convergência do algoritmo é verificada de forma análoga, para qualquer par inicial de parâmetros (μ_0, σ_0) , no caso das outras variáveis aleatórias Y e campos estocásticos Y_x de interesse.

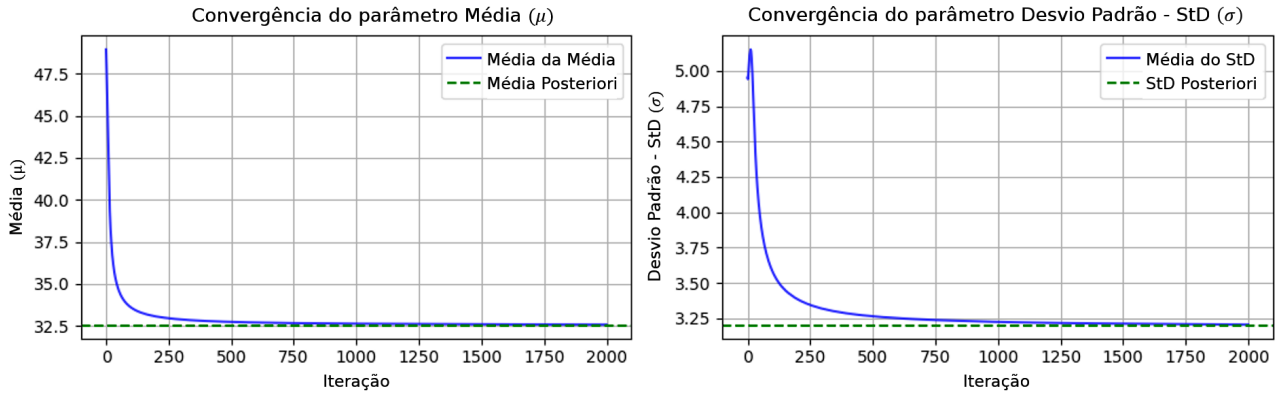


Figura 2: Convergência da média dos valores computados para média e variância da distribuição da indutância L_C do circuito associado à célula do material periódico pelo MCMC.

As distribuições estimadas para os parâmetros elétricos foram assumidas como distribuições normais para a função de verossimilhança. As estimativas de médias e desvios feitas pelo MCMC para os parâmetros geométricos e de circuito *a posteriori* são mostrados na Tabela 1.

Tabela 1: Estimativas, média e desvio-padrão, dos parâmetros elétricos e geométricos da viga proposta.

Parâmetros elétricos			Parâmetros geométricos		
Parâmetro	Média	Desvio-padrão	Parâmetro	Média	Desvio-padrão
$R[\Omega]$	$5.00 \cdot 10^{10}$	$9.23 \cdot 10^5$	L [m]	$3.66 \cdot 10^{-4}$	$2.37 \cdot 10^{-11}$
$L_C[H]$	51.32	76.14	b_s [m]	0.0300	0.0170
$C_P[F]$	$4.08 \cdot 10^{-10}$	$2.37 \cdot 10^{-11}$	h_s [m]	0.0050	0.0120
			b_p [m]	0.0110	0.0034
			h_p [m]	0.0025	0.0082

Os valores da Tabela 1 são, então, utilizados durante os cálculos de diagrama de dispersão da célula unitária para adicionar variabilidade nos componentes dos circuitos *shunt*, assim como para a geração dos campos estocásticos dos parâmetros geométricos da célula metamaterial.

A Fig. 3 ilustra graficamente os campos espaciais modelados para simular as variações espacialmente correlacionadas dos parâmetros geométricos da viga calculados através da combinação da expansão KL analítica com as distribuições estimadas através de máxima a posteriori simulada via MCMC. Então, quando o método proposto é combinado com as distribuições estocásticas estimadas, os resultados estocásticos e determinísticos apresentados na Fig. 4 são obtidos para diagramas de dispersão e resposta forçada da célula metamaterial de interesse.

Pode-se notar que há principalmente dois *band-gaps*, um de ressonância local e outro de Bragg, na resposta determinística na faixa de frequência estudada. Pode-se notar também, pelas Fig. 4a e Fig. 4b, que a variabilidade dos parâmetros que determinam a célula unitária do metamaterial causa uma perturbação maior na região de ressonância local do que em qualquer outra região de frequência, sendo portanto fundamental na modelagem e simulação do comportamento dinâmico de metamateriais desta natureza.

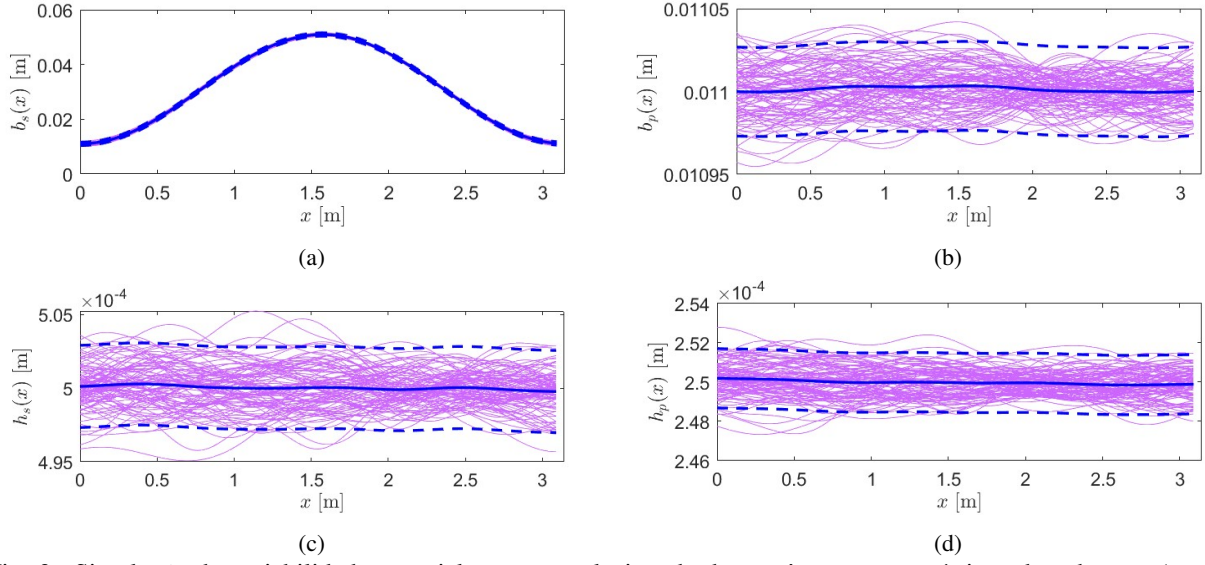


Fig. 3: Simulação da variabilidade espacialmente correlacionada dos parâmetros geométricos do substrato (a, c) e da cerâmica piezelétrica (b, d), sendo apresentados como largura (a, b) e espessura (c, d) da viga proposta.

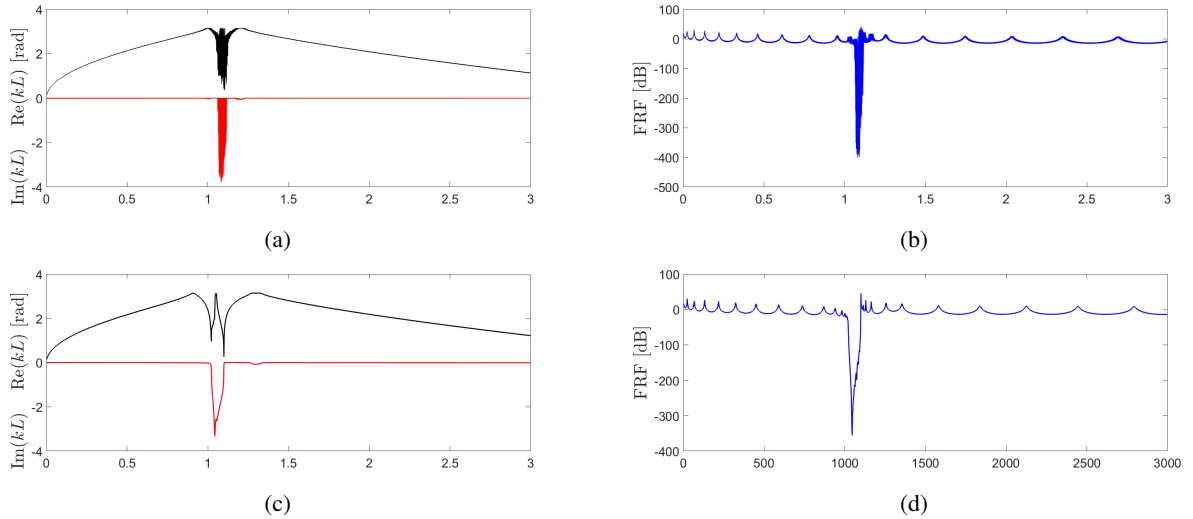


Fig. 4: Resultados estocásticos para a viga de Euler-Bernoulli proposta com variabilidades nos parâmetros elétricos e geométricos com variabilidade com correlação espacial estimados em termos de diagrama de dispersão (a) e resposta forçada (b). Os resultados determinísticos para diagrama de dispersão (c) e resposta forçadas (d) também são apresentados. A unidade dos eixos x das figuras (a,c) é frequência em kHz, e das figuras (b,d) é frequência em Hz.

4. CONCLUSÕES

Este trabalho apresenta uma formulação baseada em uma formulação em espaço de estados e que se utiliza de teorias de sistemas variantes no tempo é apresentada para modelar vigas de Euler-Bernoulli eletromecânicas. Essa formulação pode ser facilmente combinada com expansão KL para simulações estocásticas eficientes com estruturas com variabilidade espacial. Resultados utilizando medições reais de parâmetros geométricos com correlação espacial e com variabilidade local dos parâmetros elétricos indicam uma maior sensibilidade na região de atenuação por ressonância da viga que em qualquer outra região na frequência.

5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem, com gratidão, o apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), por meio dos processos 2024/06590-9, 24/20723-6 e 2018/15894-0, e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo auxílio 309554/2023-3.

6. REFERÊNCIAS

- Assis, G.F., Beli, D., de Miranda Jr, E.J., Camino, J.F., Dos Santos, J.M.C. e Arruda, J.R.F., 2019. "Computing the complex wave and dynamic behavior of one-dimensional phononic systems using a state-space formulation". *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 163, p. 105088.
- Brennan, M.J., 2006. "Some recent developments in adaptive tuned vibration absorbers/neutralisers". *Shock and Vibration*, Vol. 13, No. 4-5, pp. 531-543.
- Cheng, Z. e Shi, Z., 2013. "Influence of parameter mismatch on the convergence of the band structures by using the fourier expansion method". *Composite Structures*, Vol. 106, pp. 510-519.
- Craig Jr, R.R. e Kurdila, A.J., 2006. *Fundamentals of structural dynamics*. John Wiley & Sons.
- Dal Poggetto, V.F. e de França Arruda, J.R., 2021. "Widening wave band gaps of periodic plates via shape optimization using spatial fourier coefficients". *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 147, p. 107098.
- Davis, P.J. e Rabinowitz, P., 2007. *Methods of numerical integration*. Courier Corporation.
- De Cursi, E.S. e Sampaio, R., 2015. *Uncertainty quantification and stochastic modeling with matlab*. Elsevier.
- Denis, V., Gautier, F., Pelat, A. e Poittevin, J., 2015. "Measurement and modelling of the reflection coefficient of an acoustic black hole termination". *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 349, pp. 67-79.
- Doyle, J.F. e Doyle, J.F., 1989. *Wave propagation in structures*. Springer.
- Erturk, A., 2009. *Electromechanical modeling of piezoelectric energy harvesters*. Ph.D. thesis, Virginia Tech.
- Fernando, I., Fei, J., Stanley, R. e Enshaei, H., 2018. "Measurement and evaluation of the effect of vibration on fruits in transit". *Packaging Technology and Science*, Vol. 31, No. 11, pp. 723-738.
- Fivel, O., 2022. "Analysis of linear time-varying & periodic systems". *arXiv preprint arXiv:2202.00498*.
- Friedmann, P., Hammond, C.E. e Woo, T.H., 1977. "Efficient numerical treatment of periodic systems with application to stability problems". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, No. 7, pp. 1117-1136.
- Georgiev, V., Cuenca, J., Gautier, F., Simon, L. e Krylov, V., 2011. "Damping of structural vibrations in beams and elliptical plates using the acoustic black hole effect". *Journal of sound and vibration*, Vol. 330, No. 11, pp. 2497-2508.
- Hu, J., Wang, J., Xie, Y., Shi, C. e Chen, Y., 2021. "Finite element analysis on acoustic and mechanical performance of flexible perforated honeycomb-corrugation hybrid sandwich panel". *Shock and Vibration*, Vol. 2021, No. 1.
- Langer, P., Maeder, M., Guist, C., Krause, M. e Marburg, S., 2017. "More than six elements per wavelength: The practical use of structural finite element models and their accuracy in comparison with experimental results". *Journal of Computational Acoustics*, Vol. 25, No. 04, p. 1750025.
- Lee, U., 2001. "Dynamic characterization of the joints in a beam structure by using spectral element method". *Shock and Vibration*, Vol. 8, No. 6, pp. 357-366.
- Mace, B.R., Duhamel, D., Brennan, M.J. e Hinke, L., 2005. "Finite element prediction of wave motion in structural waveguides". *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 117, No. 5, pp. 2835-2843.
- Marzocca, P., Librescu, L. e Silva, W.A., 2002. "Aeroelastic response and flutter of swept aircraft wings". *AIAA journal*, Vol. 40, No. 5, pp. 801-812.
- Purcell, E.M., 2013. *Electricity and magnetism*. Cambridge university press.
- Ribeiro, L., Dal Poggetto, V. e Arruda, J., 2022a. "Robust optimization of attenuation bands of three-dimensional periodic frame structures". *Acta Mechanica*, Vol. 233, No. 2, pp. 455-475.
- Ribeiro, L., Dal Poggetto, V., Huallpa, B. e Arruda, J., 2022b. "Bloch wavenumber identification of periodic structures using prony's method". *Mechanical systems and signal processing*, Vol. 178, p. 109242.
- Ribeiro, L.H., Dal Poggetto, V.F., Beli, D., Fabro, A.T. e Arruda, J.R., 2022c. "Investigating the stochastic dispersion of 2d engineered frame structures under symmetry of variability". *Journal of sound and vibration*, Vol. 541, p. 117292.
- Ribeiro, L.H., Dal Poggetto, V.F., Claeys, C., Chronopoulos, D. e Arruda, J.R., 2023. "Computing dispersion diagrams and forced responses of arbitrarily varying waveguides". *International journal of mechanical sciences*, Vol. 258.
- Robert, C.P., 2016. "The metropolis-hastings algorithm". URL <https://arxiv.org/abs/1504.01896>.
- Rubinstein, R.Y. e Kroese, D.P., 2016. *Simulation and the Monte Carlo method*. John Wiley & Sons.
- Souza, M.R., Beli, D., Ferguson, N.S., Arruda, J.R.d.F. e Fabro, A.T., 2020. "A bayesian approach for wavenumber identification of metamaterial beams possessing variability". *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 135.
- Sugino, C., Leadenham, S., Ruzzene, M. e Erturk, A., 2016. "On the mechanism of bandgap formation in locally resonant finite elastic metamaterials". *Journal of Applied Physics*, Vol. 120, No. 13.
- Thomes, R.L., Mosquera-Sánchez, J.A. e De Marqui Jr, C., 2021. "Bandgap widening by optimized disorder in one-dimensional locally resonant piezoelectric metamaterials". *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 512, p. 116369.

7. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.