

ANÁLISE E COMPARAÇÃO DOS MÉTODOS DA FUNÇÃO ESPECIFICADA LINEAR E NÃO LINEAR EM PROBLEMAS INVERSOS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR

Lucca Silva Pereira, d2022010034@unifei.edu.br
Fernando Viana Avelar Dutra, fernandovianadutra@unifei.edu.br
Sandro M. M. Lima e Silva, metrevel@unifei.edu.br

Universidade Federal de Itajubá, Instituto de Engenharia Mecânica – IEM, Laboratório de Transferência de Calor – LabTC, Campus Prof. José Rodrigues Seabra, Av. BPS, 1303, bairro Pinheirinho, Itajubá - MG, CEP 37500-903

Resumo. Os objetivos deste trabalho foram analisar e comparar os métodos da Função Especificada linear e não linear em problemas inversos de transferência de calor, para a estimação de fluxos de calor. Para isso um experimento controlado em laboratório foi desenvolvido utilizando uma amostra de metal duro. Além disso, um experimento simulado usando dados sintéticos utilizando o programa COMSOL foi realizado para testar os métodos em problemas com grandes variações de temperatura. As equações do método da Função Especificada foram programadas no software MATLAB, de modo que fosse possível utilizar os dados experimentais para estimar o fluxo de calor. Ao final, concluiu-se que os métodos apresentam boa confiabilidade se aplicados em situações favoráveis as suas especificidades, ao passo que o método linear apresenta ser mais vantajoso em problemas com pequena variação de temperatura e o método não linear apresenta melhor funcionamento em problemas com grande variação de temperatura.

Palavras chave: COMSOL. IHCP. Método da Função Especificada. Transferência de Calor. MATLAB.

Abstract. The objectives of this study were to analyze and compare the methods of the Specified Function, both linear and nonlinear, in inverse heat transfer problems, in heat flux estimation. For this purpose, a controlled laboratory experiment was conducted using a tungsten carbide sample. Additionally, a simulated experiment using synthetic data using the COMSOL software was performed to test the methods in problems with large temperature variations. The equations of the Specified Function method were programmed in MATLAB so that the experimental data could be used to estimate the heat flux. In the end, it was concluded that the methods demonstrate good reliability when applied in conditions favorable to their specificities, with the linear method performing better in problems with small temperature variations and the nonlinear method performing better in problems with large temperature variations.

Keywords: COMSOL. IHCP. Function Specification Method. Heat Transfer. MATLAB.

1. INTRODUÇÃO

A transferência de calor é um fenômeno essencial em diversas áreas da engenharia e da ciência, sendo fundamental para o desenvolvimento de sistemas eficientes de refrigeração, geração de energia, controle térmico e processos industriais. O estudo da transferência de calor permite compreender como a energia térmica se propaga em diferentes meios e sob distintas condições, possibilitando a otimização de equipamentos e a melhoria do desempenho térmico de materiais e dispositivos.

Dentro desse contexto, os problemas inversos em transferência de calor surgem como uma abordagem crucial para a determinação de parâmetros desconhecidos a partir de medições indiretas. Diferente dos problemas diretos, onde as condições e propriedades térmicas são conhecidas e busca-se prever a distribuição de temperatura, os problemas inversos envolvem a estimativa de fontes de calor, propriedades térmicas ou condições de contorno a partir de dados experimentais. Esses problemas são especialmente desafiadores devido à sua natureza mal posta, o que exige o uso de técnicas avançadas de regularização e métodos numéricos para obter soluções estáveis e confiáveis.

Em transferência de calor, em geral, alguns parâmetros como a condutividade térmica e a difusividade térmica são funções da temperatura, ou seja, variam de acordo com a temperatura. Quando essa variação é levada em conta, é dito que o problema é não-linear. Entretanto, em alguns casos, essa variação é desprezível e os parâmetros podem ser aproximados a uma constante, nesse caso o problema é chamado de linear.

Em um contexto geral, a importância do estudo de problemas inversos pode ser exemplificada pelo trabalho de Backus e Gilbert (1967) na área da geofísica, onde foram pioneiros no desenvolvimento de métodos matemáticos para estimar os perfis de densidade no interior da Terra a partir de dados sísmicos.

Outro ramo onde o estudo de problemas inversos se mostra de grande importância, é a engenharia biomédica, com o estudo da tomografia computadorizada. A tomografia computadorizada, baseia-se em determinar as estruturas internas de locais onde não se faz possível o acesso direto, por exemplo, órgãos do corpo humano, auxiliando na determinação de problemas de saúde, como tumores e outras enfermidades. A tomografia, resumidamente, funciona com o bombardeamento de radiação através de um objeto e na observação de como ela é atenuada ao atravessar o domínio. A partir da atenuação da radiação, é possível determinar as densidades que compõem os objetos e reconstruir uma imagem da sua estrutura interna. Com o intuito de evitar o uso de radiação na reconstrução de imagens, novas técnicas de problemas inversos aplicados a tomografia sugerem o uso de medições de corrente e tensão na superfície de contorno de um corpo para estimar as condutividades elétricas em seu interior. Uma vez que a condutividade térmica varia consideravelmente ao longo de tecidos biológicos, torna-se possível uma reprodução do comportamento interno através da tomografia por impedância elétrica (Lionheart, *et al.*, 2004).

Na engenharia mecânica, existem diversos exemplos de problemas inversos aplicados. Entre eles, a determinação do formato geométrico de uma asa que produza uma distribuição de pressão específica. Nesse caso, uma geometria arbitrária é admitida temporariamente e seus coeficientes de pressão na superfície são calculados através das equações de Navier-Stokes. Em sequência, utilizando métodos de problema inverso, são determinadas correções na geometria que geram um novo perfil para a iteração seguinte, até que se chegue no perfil que produza a distribuição de pressão desejada (Matsushima e Iwamiya, 1998).

Na transferência de calor, Ramos (2024), utilizou de técnicas de problemas inverso para estimar simultaneamente os parâmetros que descrevem a condutividade térmica e o calor específico em função da temperatura de um aço inoxidável austenítico 304. A condutividade térmica (k) e o calor específico (c) são propriedades térmicas que afetam conjuntamente o comportamento térmico de um material. Quando a temperatura muda, ambos os parâmetros variam. Estimá-los separadamente pode levar a erros sistemáticos, pois um carregaria o erro do outro considerado constante, por exemplo. A determinação desses valores corretamente é de suma importância para a precisão de modelos térmicos. A estimativa simultânea permite ajustar melhor os modelos às observações reais, especialmente em casos não-lineares, onde as propriedades mudam significativamente com a temperatura.

No processo de usinagem, em geral, procura-se prolongar ao máximo a vida útil da ferramenta de corte, visando reduzir os custos de produção. A vida útil da ferramenta está diretamente relacionada a temperatura na superfície de corte, no entanto, a temperatura na zona de corte é de difícil obtenção. Santos, *et al.* (2014), por exemplo, contornaram tal problema usando problemas inversos para estimar o fluxo de calor na superfície de corte da ferramenta em um processo de usinagem. O fluxo de calor estimado, posteriormente foi utilizado para determinar o campo de temperaturas através da solução de problema direto.

Ainda sobre transferência de calor, Silva *et al.* (2021) utilizaram o método de resolução de problemas inversos da Função Especificada Não Linear para estimar o fluxo de calor em um processo de soldagem, uma vez que a estimação do fluxo de calor nos processos de soldagem são um grande obstáculo na melhoria da eficiência térmica.

Neste trabalho, serão tratados problemas inversos, com o objetivo de estimar os fluxos de calor submetidos em peças metálicas a partir de temperaturas medidas em pontos da sua geometria. Para a resolução desses problemas, os Métodos da Função Especificada Linear e Não Linear, propostos por Woodybury (2003), serão utilizados e comparados quanto a suas vantagens e desvantagens.

Para isso, um experimento prático foi realizado utilizando uma amostra de metal duro. Além disso, devido as limitações experimentais para desenvolver um experimento com grandes variações de temperatura, um experimento simulado foi desenvolvido utilizando o software COMSOL com o mesmo modelo do experimento do metal duro.

2. METODOLOGIA

De acordo com BECK, *et al.* (1985), uma das maneiras de tratar um Problema inverso de condução de calor é assumir que o fluxo de calor em uma superfície tem a forma de uma função com variação no tempo. Isso é chamado de Método da Função Especificada (MFE). Essa função pode ser uma sequência de segmentos constantes, segmentos de reta ou podem assumir muitas outras formas como parábolas, potências e exponenciais.

O MFE assume que o fluxo de calor possui a forma de uma função desconhecida e computa a resposta do sistema para diversos passos, após isso, os valores computados são forçados a se igualar com os valores medidos experimentalmente utilizando o Método dos Mínimos Quadrados. Para problemas lineares, o Teorema de Duhamel pode ser utilizado como base para resolver o problema inverso. No entanto, em problemas não lineares, o Teorema de Duhamel não pode ser utilizado. Deste modo, um método iterativo baseado no Método de Minimização de Gauss deve ser utilizado para resolver o problema inverso não linear (BECK, *et al.*, 1985).

2.1. Método da Função Especificada Sequencial

O procedimento sequencial mais simples é assumir temporariamente que alguns fluxos de calor futuro são constantes com o tempo. Os componentes do fluxo estimados, $\hat{q}_1, \hat{q}_2, \dots, \hat{q}_{m-1}$, são assumidos como conhecidos e o objetivo é estimar q_M . Para adicionar estabilidade aos algoritmos, os componentes do fluxo de calor, $q_m, q_{m+1}, \dots, q_{m+r-1}$, são assumidos iguais, resultando na Eq. (1).

$$q_{m+1} = q_{m+2} = \dots = q_{m+r-1} = q_m \quad (1)$$

Portanto r componentes futuros de fluxo de calor são temporariamente considerados iguais.

Se $r=1$, nenhuma informação adicional é introduzida para um único sensor de temperatura e a temperatura calculada corresponde exatamente com o valor medido a cada passo de tempo.

Para a estimação sequencial de q_m usando as suposições da Eq. (1), modelagem para $T_m, T_{m+1}, \dots, T_{m+r-1}$ são necessárias. As expressões para essas temperaturas são dadas pela forma padrão da equação da temperatura. Para o fluxo de calor constante assumido na Eq. (1) a forma padrão das temperaturas são dadas pela Eq. (2).

$$T_m = T_m|_{q_m=0} + \phi_{11}q_m \quad (2a)$$

$$T_{m+1} = T_m|_{q_m=q_{m+1}=0} + \phi_{21}q_m \quad (2b)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$T_{m+r-1} = T_m|_{q_m=\dots=q_{m+r-1}=0} + \phi_{r1}q_m \quad (2c)$$

onde, ϕ_j é o coeficiente de sensibilidade dado pela Eq. (3).

$$\phi_j = \sum_{i=0}^{j-1} \Delta\phi_i \quad (3)$$

O procedimento dos mínimos quadrados para estimar q_m com as temperaturas medidas, $Y_m, Y_{m+1}, \dots, Y_{m+r-1}$, é dado pela Eq. (4).

$$s = \sum_{i=1}^r (Y_{m+i-1} - T_{m+i-1})^2$$

$$= \sum_{i=1}^r (Y_{m+i-1} - T_{m+i-1}|_{q=0} - \phi_i q_M)^2 \quad (4)$$

A Equação (4) é diferenciada com respeito a q_m , igualada a 0 e o q_M é substituído por $\hat{q}_M$, resultando na Eq. (5).

$$\hat{q}_M = \frac{\sum_{i=1}^r (Y_{m+i-1} - T_{m+i-1}|_{q=\dots=0})\phi_i}{\sum_{i=1}^r \phi_i^2} \quad (5)$$

Desta forma, a Eq. (5) pode ser utilizada para estimar o fluxo.

2.2. Método da Função Especificada para Problemas Inversos Não Lineares

Nos casos onde a abordagem do problema será feita de maneira não linear, como dito anteriormente, o Teorema de Duhamel não pode ser aplicado. Deste modo, faz-se necessário a utilização de um método iterativo.

Considerando um vetor $\vec{T}$ com n observações dependentes de um vetor β de parâmetros desconhecidos e tamanho p . Se $\vec{T} = \vec{T}|_{\vec{\beta}}$ para $\beta = \vec{b}$ então o valor de $\vec{T}$ em $\beta = \vec{b} + \Delta\vec{b}$, é relacionado com $\beta = \vec{b}$ a partir da serie de Taylor mostrada na Eq. (6).

$$\vec{T}|_{\vec{b}+\Delta\vec{b}} = \vec{T}|_{\vec{b}} + \left. \frac{\partial \vec{T}}{\partial \beta} \right|_{\vec{b}} \Delta\vec{b} \quad (6)$$

O gradiente da Eq. (6) é uma matriz de coeficientes de sensibilidade de tamanho $n \times p$ que é dada pela Eq. (7).

$$[X_\beta] = \left. \frac{\partial \vec{T}}{\partial \beta} \right|_{\vec{b}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial \beta_1} & \frac{\partial T_1}{\partial \beta_2} & \dots & \frac{\partial T_1}{\partial \beta_p} \\ \frac{\partial T_2}{\partial \beta_1} & \frac{\partial T_2}{\partial \beta_2} & \dots & \frac{\partial T_2}{\partial \beta_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_n}{\partial \beta_1} & \frac{\partial T_n}{\partial \beta_2} & \dots & \frac{\partial T_n}{\partial \beta_p} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Supondo que existam $\vec{Y}$ valores de temperatura medidos experimentalmente, que correspondem a $\vec{T}$, deve-se obter valores de $\vec{b}$ de modo que os valores de $\vec{T}$ sejam os mais próximos possíveis de $\vec{Y}$. Assim, é assumido que exista um modelo numérico para o cálculo de $\vec{T}$ para cada valor de $\vec{b}$ estimado.

O valor de ideal de $\vec{b}$ pode ser obtido utilizando a minimização da função objetivo, dada pela Eq. (8).

$$S = (\vec{Y} - \vec{T})^T (\vec{Y} - \vec{T}) \quad (8)$$

Substituindo $\vec{T}$ por $\vec{T}|_{\vec{b}+\Delta\vec{b}}$ na Eq. (8) obtém-se a Eq. (9).

$$S = (\vec{Y} - \vec{T}|_{\vec{b}} - [X_\beta]\Delta\vec{b})^T (\vec{Y} - \vec{T}|_{\vec{b}} - [X_\beta]\Delta\vec{b}) \quad (9)$$

Assim, deve-se encontrar um valor de $\Delta\vec{b}$ que torne S mínimo. Para isso, a Eq. (9) é derivada com relação a $\Delta\vec{b}$ e igualada a 0, resultando na Eq. (10).

$$\Delta\vec{b} = ([X_\beta]^T [X_\beta])^{-1} [X_\beta]^T (\vec{Y} - \vec{T}|_{\vec{b}}) \quad (10)$$

Na Equação (10) é calculado o incremento $\Delta\vec{b}$ para o parâmetro $\vec{b}$ para cada iteração no instante de tempo t . Conforme $\Delta\vec{b}$ se aproxima de zero, considera-se que a convergência foi atingida para aquele tempo.

Utilizando o algoritmo gaussiano e o processo explicado anteriormente, o fluxo de calor desconhecido na região de contorno pode ser estimado para problemas não lineares uni, bi e tridimensionais.

Assim como no método utilizado para problemas lineares, a estimação será feita apenas para um valor de fluxo q_M por vez correspondente ao tempo atual t_M . Para regularizar o método, novamente, medições de temperatura futuras são utilizadas. Para isso, assume-se valores temporários para os fluxos $q_M, q_{M+1}, \dots, q_{M+r-1}$. Uma vez que o único parâmetro β desconhecido é o fluxo de calor, tem-se $p = 1$, logo a matriz de sensibilidade $[X_\beta]$ se torna um vetor $\bar{X}_q$. Deste modo, o produto $[X_q]^T [X_q]$ é um escalar, que pode ser calculado pela Eq. (11).

$$[X_q]^T [X_q] = \sum_{n=1}^r \left(\frac{\delta T_n}{\delta q_M} \right)^2 = \sum_{n=1}^r \chi_{q_n}^2 \quad (11)$$

Por fim, substituindo a Eq. (11) na Eq. (10), tem-se a Eq. (12).

$$\Delta q_M = \frac{\sum_{n=1}^r \chi_{q_n} (Y_n - T_n)}{\sum_{n=1}^r \chi_{q_n}^2} \quad (12)$$

A Equação (12) é muito parecida com a forma linear da Função Especificada, no entanto a maneira de calcular $\bar{X}_q$ e $\vec{T}$ são diferentes, além de que o fluxo de calor q_M não é obtido de maneira instantânea.

O algoritmo utilizado para estimar o fluxo de calor em problemas não lineares é:

- (1) Entrar com um valor arbitrário para q_M ;
- (2) Determinar uma tolerância. Neste trabalho foi utilizado $tol = 0,0001$;
- (3) Resolver o modelo matemático para obter as temperaturas $\vec{T}$ a partir do fluxo q_M ;
- (4) Resolver as equações necessárias para determinar o valor $\bar{X}_q$;
- (5) Utilizar a Eq. (10) para calcular uma correção $\Delta q_M^{(i)}$;
- (6) Se $\Delta q_M < tol$, então o processo convergiu. Se não, então o valor de q_M é atualizado:

$$q_M^{(i+1)} = q_M^{(i)} + \Delta q_M^{(i)}$$
- (7) Retornar ao passo (3) até garantir a convergência do passo (6);
- (8) Iniciar o algoritmo novamente para um novo passo de tempo

A convergência do passo (6) pode ser difícil de ser atingida. Para isso, um critério de parada é utilizado definido pela Eq. (13).

$$\frac{\Delta q_M^{(i)}}{q_M^{(i+1)}} \leq tol \quad (13)$$

2.3. Procedimento Experimental

Para testar os métodos, avaliar seus funcionamentos e comparar quanto as suas vantagens e desvantagens, um experimento envolvendo uma amostra de metal duro foi desenvolvido. O experimento consistiu em submeter uma amostra de metal duro, com dimensões de 12,7 x 12,7 x 4,7 mm³, a um aquecedor resistivo com área de aquecimento de 10,4 x 10,4 mm², de modo que a amostra de metal duro tivesse sua face superior apenas parcialmente submetida ao fluxo de calor. Para obter um valor experimental do fluxo de calor, um transdutor de fluxo de calor foi posicionado entre a amostra e o aquecedor. A montagem experimental pode ser vista na Fig. 1. A amostra estava sujeita a convecção com o ar em todas suas faces, exceto na região ocupada pelo aquecedor. Uma vez que o experimento simulado apresenta altas temperaturas, seu coeficiente de transferência térmica convectiva deve ser consideravelmente alto. Com o intuito de facilitar as modelagens, o coeficiente de transferência térmica convectiva h foi considerado igual a 20 W/m² °C em ambos os casos. Um termopar foi posicionado na coordenada (0,0095; 0,0035; 0,0047) m para obter a temperatura na posição e posteriormente estimar o fluxo, a taxa de aquisição foi de 0,222 segundos.

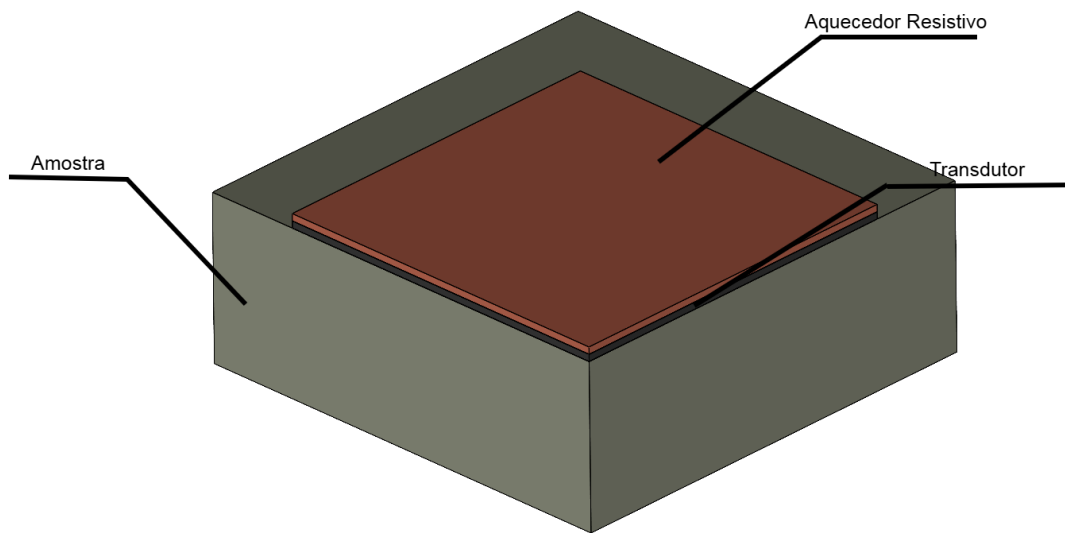


Figura 1. Montagem experimental do metal duro

Na simulação, as condições de contorno experimentais foram reproduzidas. O modelo foi implementado no software comercial COMSOL. Um fluxo de calor parabólico dado pela Eq. (14) foi aplicado. As temperaturas foram calculadas pelo software e as temperaturas na posição (0,0095; 0,0035; 0,0047) m foram utilizadas para estimar o fluxo. A taxa de aquisição utilizada foi de 1 segundo, de modo que

$$q(t) = -3,2t^2 + 800t \quad 0 \leq t \leq 250 \quad (14)$$

Os valores de condutividade térmica (k) e calor específico (c_p) para o método não linear foram retirados do trabalho de Jiang, *et al.* (2016) e tem seus valores estimados pelas Eqs. (15) e (16). Já para o método linear, esses valores foram considerados constantes; calculados por essas equações com a peça em temperatura inicial de 29,2 °C, o que resultou em $k = 54,96$ W/m.K e $c_p = 211,92$ J/kg, os valores foram considerados na temperatura inicial para demonstrar a influência da variação desses parâmetros na estimação.

$$k(T) = 2.23 \times 10^{-8} T^3 - 2.22 \times 10^{-6} T^2 - 2.42 \times 10^{-2} T + 55.67 \quad 20 < T < 950 \quad (15)$$

$$Cp(T) = 2.06 \times 10^{-7} T^3 - 3.81 \times 10^{-4} T^2 + 2.93 \times 10^{-1} T + 203.7 \quad 20 < T < 950 \quad (16)$$

3. RESULTADOS

Os resultados obtidos de estimação de fluxo de calor utilizando os Métodos da Função Especificada Linear e Não Linear, com essa última também chamada de Método da Função Especificada Sequencial Adaptada, para os experimentos prático e simulado serão apresentados nessa seção.

3.1. Experimento Prático

Após a realização do experimento, os dados de temperatura obtidos pelo termopar foram computados. A temperatura teve pouca variação, com a peça inicialmente a 29,2 °C e atingindo o valor máximo de 60,61 °C. As equações do MFE

Linear e Não Linear foram programadas no software MATLAB, de modo que, utilizando as temperaturas obtidas, fosse possível fazer a estimação do fluxo de calor durante o experimento. Para ambos os casos, foram utilizados 10 passos de tempo futuros. Os valores estimados por ambos os métodos são comparados com o fluxo de calor medido pelo transdutor e apresentados na Fig. 2 (a). Além disso, a diferença entre os fluxos de calor estimados e o fluxo de calor medido são apresentados na Fig. 2 (b).

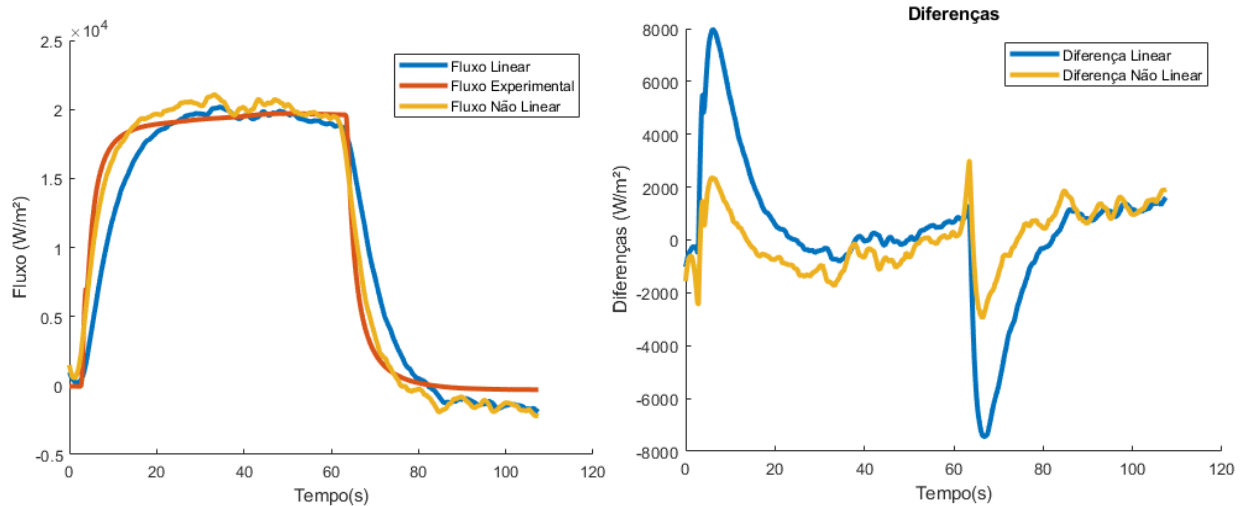


Figura 2. (a) Fluxo experimental e Fluxos estimados pelo método linear e não linear para o experimento prático. (b) Diferença dos métodos linear e não linear para o fluxo de calor medido

O tempo de computação para os métodos foram de 12 minutos para o método linear e 4 horas e 15 minutos para o método não linear.

3.2 Experimento Simulado

O intuito do experimento simulado é avaliar a diferença de precisão entre os métodos linear e não linear em problemas onde o fluxo de calor incidente consiga gerar grande variações de temperatura na amostra, visto que com variações significativas de temperatura, as propriedades térmicas sofrem mudanças mais perceptíveis. Diante disso, foi admitido um fluxo de calor na simulação que causava uma considerável variação da temperatura, com a peça inicialmente a 29,2 °C e atingindo o valor máximo de 175,56 °C.

Para tornar as temperaturas calculadas pelo programa COMSOL mais próximas de uma temperatura experimental, erros aleatórios no intervalo de $[-0,5; 0,5]$ °C foram adicionados ao longo das temperaturas, simulando o ruído experimental de medições. A temperatura sem os erros adicionados é apresentada na Fig. 3 (a), juntamente da temperatura com os erros adicionados. Para facilitar a visualização dos efeitos do erro adicionado, a Fig. 3 (b) apresenta uma ampliação do gráfico no intervalo de 221 à 232.

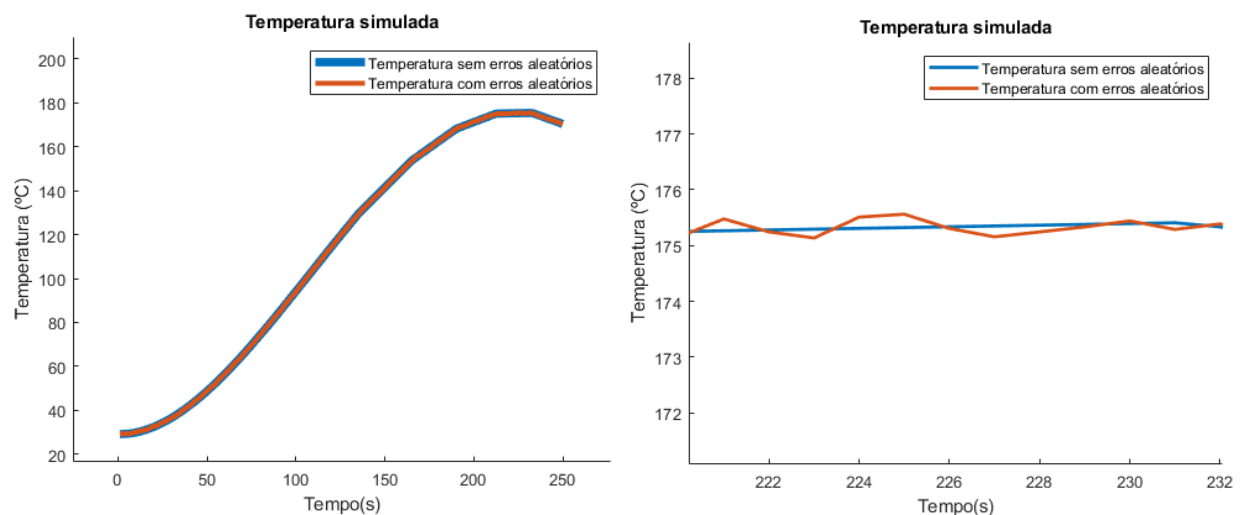


Figura 3. (a) Temperaturas sem erro adicionado e com erro adicionado. (b) Ampliação do gráfico de temperaturas sem erro adicionado e com erro adicionado

Essas temperaturas artificiais assumidas como experimentais, aplicado o conceito de problema inverso, foram comparadas às temperaturas estimadas pelo COMSOL, tendo então fluxos de calor distintos estimados com a MFE Linear e Não Linear.

Para esse caso, devido ao maior número de medições de temperatura, utilizou-se 20 passos de tempo futuros. Os valores dos fluxos estimados são apresentados na Fig. 4 (a), e eles estão indicados juntamente com o fluxo de calor usado (“Fluxo simulado”) para a criação das temperaturas anteriores. Além disso as diferenças entre fluxo simulado e os fluxos estimados são apresentadas na Fig. 4 (b).

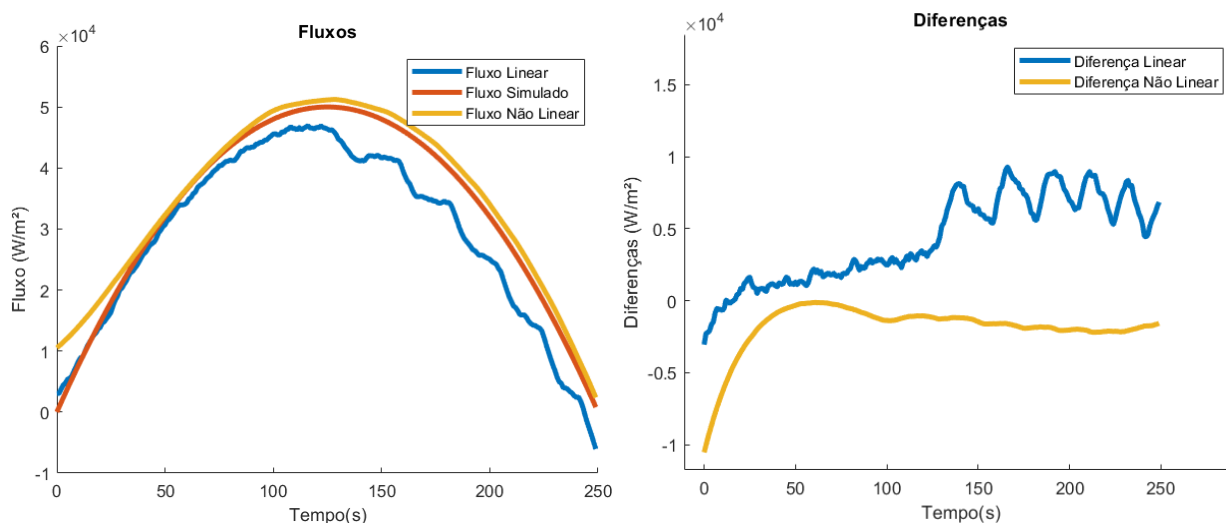


Figura 4. (a) Fluxo experimental e Fluxos estimados pelo método linear e não linear para o experimento simulado. (b) Diferenças dos métodos linear e não linear para o experimento pratico

O tempo computacional para os métodos foram de 4 minutos para o método linear e 1 hora e 36 minutos para o método não linear.

4. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou duas análises para avaliar e comparar os Métodos da Função Especificada Linear e Não Linear na estimação de fluxos de calor. Sendo esses programados no MATLAB e aplicados com a ajuda do programa COMSOL.

Com os resultados, é possível afirmar, em geral, que o MFE apresenta boa confiabilidade, no entanto algumas ressalvas devem ser feitas em relações as abordagens lineares e não lineares.

A abordagem linear do MFE apresenta menor exigência computacional, tornando seu uso mais fácil e rápido. Entretanto, em aplicações onde a amostra apresenta grande variação de temperatura suas estimações perdem precisão, uma vez que as propriedades térmicas do material estudado sofrem grandes variações.

Por outro lado, a abordagem não linear apresenta alta exigência computacional, visto que é utilizado um método iterativo na estimação. Além disso, exige um estudo dos materiais envolvidos para boa representação das propriedades térmicas variando com a temperatura. Todavia, essa abordagem entrega estimções mais alinhadas com a realidade.

Ao final, conclui-se que os experimentos práticos e simulados corroboraram a adequação dos métodos para a estimação de fluxo de calor.

5. AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, por me conceder força, sabedoria e perseverança para superar os desafios ao longo desta jornada. Sem sua orientação e proteção, este trabalho não teria sido possível.

Aos meus pais, Adalberto e Carla, pela criação impecável e pelo suporte dado durante toda a elaboração deste trabalho.

Ao professor Dr. Sandro Metrevelle Marcondes de Lima e Silva, por ter me dado a oportunidade de ser seu orientado e pelos ensinamentos durante esse período.

Ao aluno de doutorado Fernando Viana Avelar Dutra por me ajudar com os programas necessários para realizar as estimações feitas nesse trabalho.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela bolsa de iniciação científica.

Ao Instituto de Engenharia Mecânica pela estrutura fornecida.

A CAPES e o CNPq pelos recursos fornecidos.

6. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.

7. REFERÊNCIAS

BACKUS, G. E.; GILBERT, J. F. “Numerical Applications of a Formalism for Geophysical Inverse Problems”. *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, 1967.

BECK, J. V.; BLACKWELL, B.; CLAIR, C. “Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems”. New York: Wiley Interscience Publication, 1985.

JIANG, F.; ZHANG, T.; YAN, L. “Estimation of temperature-dependent heat transfer coefficients in near-dry cutting”. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, v. 86, n. 5-8, p. 1207–1218, 2016. ISSN 14333015.

LIONHEART, W.R.B. “EIT Reconstruction Algorithms: Pitfalls, Challenges and Recent Developments”. *Physiol. Meas.*, 25, p. 125-143, 2004.

MATSUSHIMA, K.; IWAMIYA, T. “An Aerodynamic Design Method for Multi Element Wings Using Inverse Problems”. *International Symposium on Inverse Problems in Engineering Mechanics (ISIP)*, p. 417-425, Nagano, Japan, 1998.

RAMOS, N. P. “Inverse problems applied to the experimental thermal and hygric analysis of engineering materials”. PhD Thesis, Postgraduate Program in Mechanical Engineering, Mechanical Engineering Institute, Federal University of Itajubá. Itajubá, Brazil. 2024.

SANTOS, M. R. et al. “Analyses of Effects of Cutting Parameters on Cutting Edge Temperature Using Inverse Heat Conduction Technique”. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2014, p. 1-11, 2014.

SILVA, R. G. D.; MAGALHÃES, E. S.; LIMA E SILVA, S. M. M. “Modified nonlinear function specification and temperature moving sensor to estimate the heat supply in a welding process”. *International Journal of Thermal Sciences*, Volume 162, 2021, 106780, ISSN 1290-0729.

WOODBURY, K. A. *Inverse Engineering Handbook*. Boca Raton: CRC Press, 2003.