

Solução de Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem através do Método dos Elementos Finitos

Raphael Cagni Rosa, r206222@dac.unicamp.br
Carlos Henrique Daros, chdaros@fem.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas, Rua Professor Sérgio Buarque de Holanda, 251, Cidade Universitária "Zeferino Vaz", Barão Geraldo, Campinas, SP, CEP 13083-859

Resumo. O presente artigo apresenta uma introdução didática ao Método dos Elementos Finitos. O foco do estudo é a solução de Equações Diferenciais Lineares Gerais de Segunda Ordem. Tais equações modelam diversos fenômenos físicos importantes, como deflexões de cabos, deformações de barras, condução de calor com termo convectivo, eletroestática, etc. Para atingir tal objetivo, foi iniciado o estudo do MEF e a implementação computacional das formulações utilizando a linguagem MATLAB. Diversas simulações foram realizadas, com variações nas configurações do problema e nos níveis de discretização da malha, permitindo avaliar a influência desses fatores nos resultados obtidos. As soluções aproximadas foram organizadas em gráficos e tabelas, viabilizando a comparação com resultados analíticos e a análise da convergência do método.

Palavras-chave: Método dos Elementos Finitos. Equação Diferencial Linear de Segunda Ordem. Modelagem estrutural. Simulação numérica.

Abstract. This paper presents a didactic introduction to the Finite Element Method (FEM), with a focus on solving general second-order linear differential equations. These equations model a variety of important physical phenomena, such as cable deflections, bar deformations, heat conduction with convective terms, electrostatics, and others. To achieve this goal, the study of FEM was initiated along with the computational implementation of its formulations using the MATLAB language. Several simulations were performed, varying the problem configurations and the mesh discretization levels, which allowed for the assessment of their influence on the obtained results. The approximate solutions were organized into graphs and tables, enabling comparisons with analytical results and analysis of the method's convergence behavior.

Keywords: Finite Element Method. Second-Order Linear Differential Equation. Structural Modeling. Numerical Simulation.

1. INTRODUÇÃO

2. Introdução

Equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem modelam uma ampla variedade de fenômenos físicos, como vibrações em sistemas mecânicos, condução de calor e distribuição de campos elétricos. No entanto, a obtenção de soluções analíticas é, por vezes, impraticável devido à complexidade das geometrias e das condições de contorno envolvidas. Nesse cenário, os métodos numéricos assumem papel fundamental.

Dentre eles, o Método dos Elementos Finitos (MEF) destaca-se como uma técnica poderosa e versátil. Sua origem está associada à modelagem estrutural, mas atualmente é amplamente empregado em diferentes áreas da engenharia e ciências aplicadas, como mecânica dos sólidos, transferência de calor, eletromagnetismo e dinâmica dos fluidos. O MEF permite dividir o domínio de interesse em subdomínios menores (elementos finitos), nos quais são aplicadas aproximações locais, geralmente por funções polinomiais, resultando em um sistema global de equações a ser resolvido numericamente.

Entre suas principais vantagens estão a capacidade de representar geometrias complexas, a flexibilidade no uso de diferentes formas de elementos e a possibilidade de controlar a precisão da solução por meio do refinamento da malha. Uma revisão histórica mais aprofundada sobre o desenvolvimento e a consolidação do MEF pode ser encontrada nas obras de Zienkiewicz & Taylor e Bathe.

Este trabalho apresenta uma introdução didática ao MEF, com foco na resolução de equações diferenciais lineares de segunda ordem. A implementação computacional foi realizada em MATLAB, com simulações conduzidas para diferentes configurações de malha e funções de carga. Os resultados obtidos foram comparados com soluções analíticas conhecidas, permitindo avaliar a precisão e a convergência do método. Com isso, evidencia-se a eficácia do MEF mesmo em discretizações grosseiras, reforçando sua aplicabilidade na engenharia e nas ciências exatas.

3. METODOLOGIA

O objetivo desta seção é apresentar o método utilizado para desenvolver a modelagem matemática e validar os conceitos teóricos por meio da aplicação computacional.

Nesta seção é apresentada a formulação do MEF através do Método dos Resíduos Ponderados e da Formulação Fraca.

3.1 INTEGRAL PONDERADA E FORMULAÇÃO FRACA

Considere o problema para solução da equação diferencial:

$$-\frac{d}{dx} \left[a(x) \frac{du}{dx} \right] + cu(x) = f(x) \text{ para } 0 < x < L \quad (1)$$

para $u(x)$ submetido às seguintes condições de contorno:

$$u(0) = u_0, \left(a \frac{du}{dx} \right) |_{x=L} = Q_L \quad (2)$$

$a(x)$ e $f(x)$ são funções conhecidas da coordenada x ; u_0 e Q_L são valores conhecidos; L é o tamanho de um domínio unidimensional.

Quando os valores especificados são diferentes de zero ($u_0 \neq 0$ ou $Q_L \neq 0$), as condições de contorno são ditas "não homogêneas", e são "homogêneas" quando os valores são zero.

Suponha que buscamos uma aproximação de $u(x)$ de forma

$$u(x) \approx U_N(x) = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x) + \phi_0(x) \quad (3)$$

e determinar c_j tal que U_N satisfaça a equação diferencial em (1). Substituindo, temos:

$$-\frac{d}{dx} \left[a(x) \frac{dU_N}{dx} \right] + cU_N(x) = f(x) \text{ para } 0 < x < L \quad (4)$$

Já que o lado esquerdo da igualdade é uma aproximação, não se pode esperar que seja igual ao lado direito. A diferença

$$R(x, c_j) \equiv -\frac{d}{dx} \left[a(x) \frac{dU_N}{dx} \right] + cu(x) - f(x) \neq 0 \text{ para } 0 < x < L \quad (5)$$

é chamada de *residual* da aproximação na equação diferencial. Qualquer método aproximado procura um conjunto de N equações dentre as c_j que fazem R zerar.

Outro método para determinar c_j é fazer com que R desapareça em um sentido "ponderado-residual":

$$\int_0^L w_i(x) R(x, c_j) dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (6)$$

em que $w_i(x)$ é um conjunto de funções linearmente independentes, chamadas *funções ponderadas*, as quais podem ser diferentes das funções de aproximação $\phi_i(x)$. Quando estas são as mesmas para $w(x)$, temos o método de Galerkin.

Aqui, movemos todos os termos de uma equação diferencial para um único lado, de forma que seja igualado a zero, multiplicamos a equação por uma função peso $w(x)$ e depois integramos no domínio $\Omega = (0, L)$ do problema:

$$0 = \int_0^L w \left[-\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) + cu(x) - f \right] dx \quad (7)$$

Voltando para a forma integral em (7), integrando o primeiro termo por partes, obtemos a chamada formulação fraca do problema:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^L \left\{ w \left[-\frac{d}{dx} \left(a \frac{du}{dx} \right) \right] - wf + cu(x) \right\} dx + wcu(x) \\ &= \int_0^L \left(a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} - wf + cu(x) \right) dx + wcu(x) - \left[wa \frac{du}{dx} \right]_0^L \end{aligned} \quad (8)$$

As variáveis dependentes do problema $u(x)$ são chamadas *variáveis primárias (VP)*. Sua especificação constitui as *condições de contorno essenciais (CCE)*.

As variáveis secundárias, que aparecem no contorno $[0, L]$ ao se executar a integração por partes, sempre terão significado físico e são, comumente, quantidades de interesse. Nos casos de problemas de transferência de calor, a VS representa o calor, Q , a qual pode ser denotada por:

$$Q \equiv \left(a \frac{du}{dx} \right) n_x \quad (9)$$

Em que n_x é o cosseno entre o eixo positivo de x e o eixo normal à condição de contorno.

3.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O modelo de elemento finito pode ser desenvolvido utilizando a forma fraca das equações governantes de um elemento. Tomando uma aproximação de $u(x)$ dada por:

$$u(x) \approx U_M(x) = \sum c_j \phi_j(x), \quad (10)$$

sendo necessário satisfazer as condições de contorno do problema.

Para conectar essas soluções, é exigido que a solução seja contínua nos pontos em comum entre os elementos (*nós*). Dependendo do grau do polinômio de aproximação utilizado, nós adicionais podem ser identificados dentro do elemento.

Como a forma fraca sobre um elemento é equivalente à equação diferencial e às condições naturais de contorno, a solução aproximada $u_j^e(x)$ deve satisfazer:

$$u_j^e(x_a) = u_a^e \quad \text{e} \quad u_j^e(x_b) = u_b^e. \quad (11)$$

Utilizamos polinômios algébricos para aproximar a solução por duas razões:

- A interpolação facilita a derivação sistemática das funções de aproximação.
- A integração numérica de polinômios algébricos é simples.

O modelo de elementos finitos pode ser desenvolvido para um grau arbitrário de interpolação:

$$u \approx u_h^e = \sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j^e(x) \quad (12)$$

onde ψ_j^e são as funções de interpolação de Lagrange de grau $n - 1$. Para $n > 2$, em que a forma fraca da equação deve ser modificada para incluir variáveis secundárias não nulas, se houver, nos nós interiores.

A integração por partes no processo do desenvolvimento da forma fraca para um elemento com nós interiores é realizada nos intervalos $(x_1^e, x_2^e), (x_2^e, x_3^e), \dots, (x_{n-1}^e, x_n^e)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \int_{x_i^e}^{x_{i+1}^e} \left(a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} + cwu - wf \right) dx - \left[w(x) a \frac{du}{dx} \right]_{x_i^e}^{x_{i+1}^e} \right\} \\ &= \int_{x_1^e}^{x_n^e} \left(a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} + cwu - wf \right) dx \\ &\quad - w(x_1^e) Q_1^e - w(x_2^e) Q_2^e - \dots - w(x_n^e) Q_n^e, \end{aligned} \quad (13)$$

Onde x_i^{e-} e x_i^{e+} denotam os lados esquerdo e direito, respectivamente, do nó i , e:

$$Q_i^e = \left[-a \frac{du}{dx} \right]_{x_i^{e-}}^{x_i^{e+}}, \quad Q_1^e = \left[-a \frac{du}{dx} \right], \quad \dots, \quad Q_n^e = \left[a \frac{du}{dx} \right] \quad (14)$$

Assim, Q_i^e , para $i = 2, 3, \dots, n - 1$, denota o salto no valor da variável secundária ao passar do lado esquerdo para o lado direito do i -ésimo nó. Esse valor é zero se nenhuma fonte externa for aplicada ao nó. Assim, para um elemento com n nós, a forma fraca torna-se:

$$0 = \int_{x_a}^{x_b} \left[a \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} + c w u \right] dx - \int_{x_a}^{x_b} w f dx - \sum_{i=1}^n w(x_i) Q_i^e \quad (15)$$

Em seguida, desenvolvemos o modelo de elemento finito, então substituímos (12) por u e $w = \psi_i$, $w = \psi_j$, $\psi_i = \psi_j$ na forma fraca (15) para obter n equações algébricas da forma:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{x_a}^{x_b} \left[a \frac{d\psi_n}{dx} \frac{d}{dx} \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j(x) \right) + c \psi_n \left(\sum_{j=1}^n u_j^e \psi_j(x) \right) \right] dx \\ &\quad - \psi_n f - \sum_{j=1}^n w(x_j) Q_j^e \end{aligned} \quad (16)$$

A i -ésima equação do sistema de n equações pode ser escrita como:

$$0 = \sum_{j=1}^n K_{ij}^e u_j^e - f_i^e - Q_i^e \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (17)$$

em que

$$\begin{aligned} K_{ij}^e &= \int_{x_a}^{x_b} \left(a \frac{d\psi_i^e}{dx} \frac{d\psi_j^e}{dx} + c \psi_i^e \psi_j^e \right) dx \\ f_i^e &= \int_{x_a}^{x_b} f \psi_i^e dx \end{aligned} \quad (18)$$

Para o caso de interpolação linear com elementos finitos de dois nós obtemos:

$$[K^e] = \frac{a_e}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{c_e h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \{f^e\} = \frac{f_e h_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (19)$$

em que a_e pode assumir diversos valores, dependendo do problema em que ele está sendo usado. Ele pode assumir o valor de AE (em que A é a área da seção transversal da barra e E é o módulo de elasticidade) para casos de barras, k (coeficiente de condutividade térmica) para problemas de condução térmica, ϵ (constante dielétrica) para caso de eletroestática, dentre muitos outros físicos que podem assumir esta forma. Em casos de problema de condução de calor, o termo c_e pode assumir a função do termo convectivo de calor

4. RESULTADOS

Nesta seção, são apresentados os resultados obtidos por meio da implementação do Método dos Elementos Finitos (MEF) em ambiente MATLAB, conforme descrito na metodologia. Foram simulados diferentes casos de equações diferenciais com condições de contorno variadas, com o objetivo de validar o código desenvolvido, comparar as soluções aproximadas com as soluções analíticas conhecidas e analisar o comportamento da malha conforme o refinamento dos elementos.

4.1 EQUAÇÃO BASE

$$-\frac{d^2u}{dx^2} - u + x^2 = 0, \quad \text{para } 0 < x < 1 \quad (20)$$

com as condições de contorno $u(0) = 0$ e $u(1) = 0$ e coeficientes $a = 1$, $c = -1$ e $f(x) = -x^2$. Abaixo, na Fig. 1, está uma imagem da representação da malha do problema apresentado.

Sabendo disso, conseguimos determinar a matriz de rigidez e o vetor força:

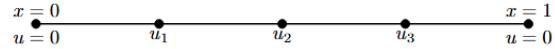


Figura 1. Representação da Malha e Condições de Contorno

$$\begin{aligned} [K_e] &= \frac{1}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \{F_e\} &= -x_m^2 \frac{h_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

em que x_m é a posição média do elemento, dado por $\frac{x_i+x_{i+1}}{2}$.

Com as equações necessárias determinadas, passamos para a implementação computacional e análise dos resultados:

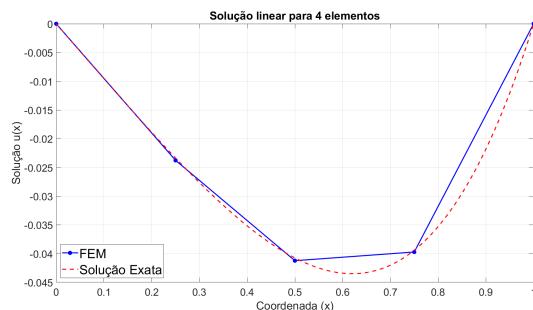


Figura 2. Solução $u(x)$ para 4 pontos

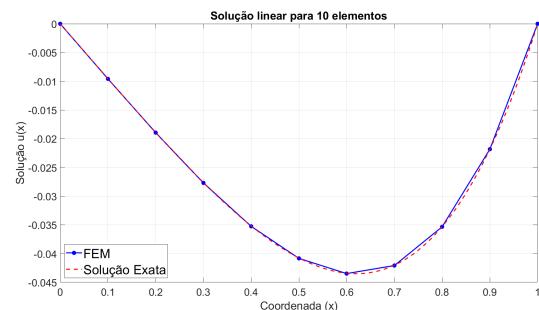


Figura 3. Solução $u(x)$ para 10 pontos

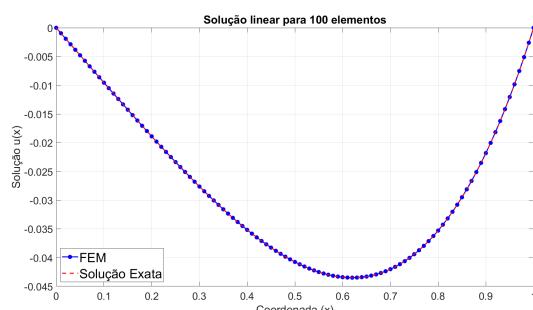


Figura 4. Solução $u(x)$ para 100 pontos

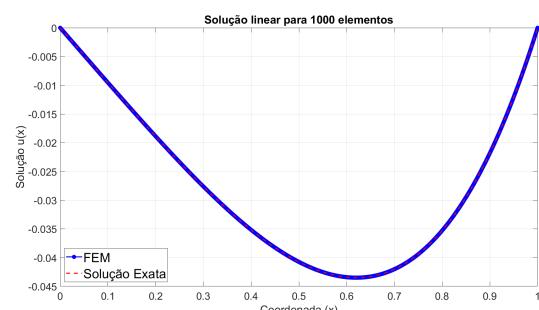


Figura 5. Solução $u(x)$ para 1000 pontos

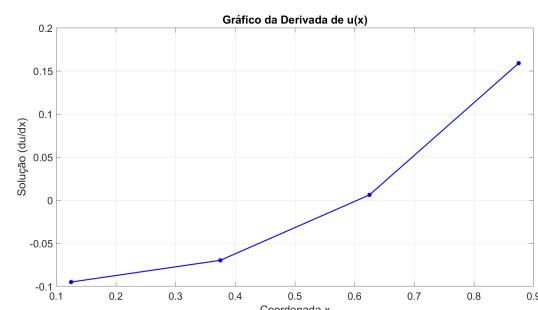


Figura 6. Solução analítica para derivada de $u(x)$ para 4 pontos

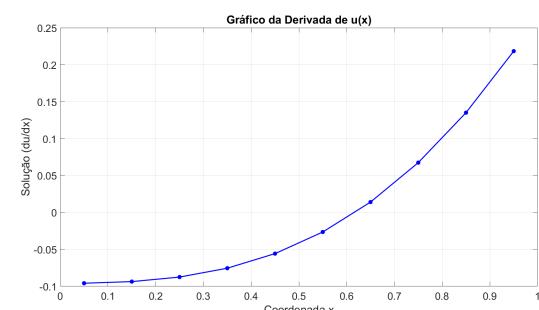


Figura 7. Solução analítica para derivada de $u(x)$ para 10 pontos

As Figs. 2, 3, 4 e 5 representam a solução da equação $u(x)$ para uma malha com quatro, dez, cem e mil elementos, respectivamente. Podemos ver a precisão do MEF ao analisar o formato da curva na figura 2. Mesmo com poucos pontos, ela tem a forma similar à solução exata, o que fica muito próximo da solução obtida na figura 5.

O código também é capaz de determinar o gráfico da derivada de $u(x)$ e de encontrar as variáveis secundárias, como mostram as Figs. 6, 7, 8 e 9, para quatro, dez, cem e mil pontos, respectivamente, contudo, a convergência para estas

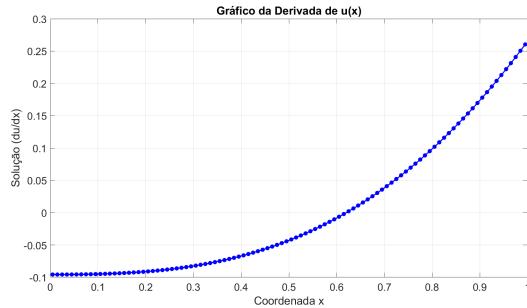


Figura 8. Solução analítica para derivada de $u(x)$ para 100 pontos

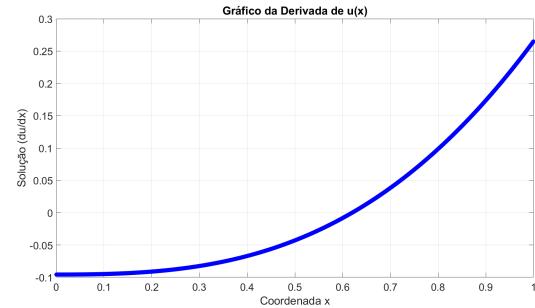


Figura 9. Solução analítica para derivada de $u(x)$ para 1000 pontos

variáveis é mais dispendiosa, já que para este cálculo é necessário realizar o cálculo de derivadas da solução, que possuem menor regularidade e convergência.

A Tab 1 mostra a comparação entre a solução exata e pelo MEF com valores da malha variando:

Tabela 1. Valores numéricos da solução $u(x)$ obtidos com MEF e solução exata

x	Solução para $u(x)$			
	4	50	1000	Exata
0	0	0	0	0
0.0625	0.059431	0.059823	0.059817	0.0598
0.125	0.11886	0.11923	0.11922	0.1192
0.1875	0.17829	0.17752	0.17753	0.1775
0.25	0.23772	0.23372	0.23374	0.2337
0.3125	0.2814	0.28654	0.28657	0.2866
0.375	0.32507	0.33442	0.33445	0.3345
0.4375	0.36874	0.37549	0.3755	0.3755
0.5	0.41242	0.40762	0.40759	0.4076
0.5625	0.40864	0.42825	0.4283	0.4283
0.625	0.40486	0.43482	0.43495	0.4350
0.6875	0.40108	0.42441	0.42463	0.4246
0.75	0.3973	0.39388	0.39417	0.3942
0.8125	0.29797	0.33986	0.34017	0.3402
0.875	0.19865	0.25876	0.25904	0.2590
0.9375	0.099325	0.14679	0.14698	0.1470
1	0	0	0	0

4.2 ALTERAÇÃO NA FORÇA

Além desta aplicação, foram feitos várias outras simulações com diferenças em relação às condições de contorno ou na própria equação diferencial, dentre eles, temos o exercício que busca a aproximação para a equação diferencial (22) e pede para que seja feita a comparação com a solução exata (23):

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \cos(\pi x), \quad (22)$$

$$0 < x < 1 \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

$$u(x) = \frac{1}{\pi^2} [\cos(\pi x) + 2x - 1] \quad (23)$$

Neste exemplo, teremos uma mudança no termo de rigidez e na força:

$$\begin{aligned} [K_e] &= \frac{1}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ \{F_e\} &= \cos(\pi x_m) \frac{h_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

Com isso, foram feitas as alterações no código já existente para que ele conseguisse resolver o problema atual. Em seguida, foram gerados os gráficos para malhas com diferentes números de elementos:

As Figs. 10, 11, 12 e 13 explicitam como o número de elementos de uma malha afetam a diferença na solução do problema.

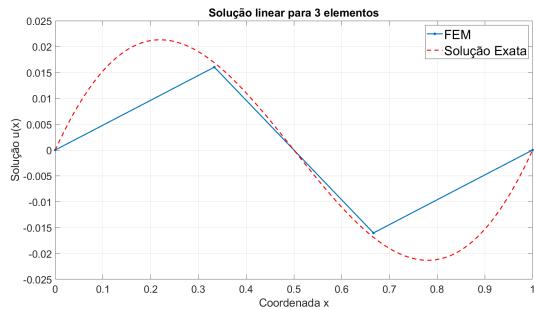


Figura 10. Solução $u(x)$ para 3 pontos

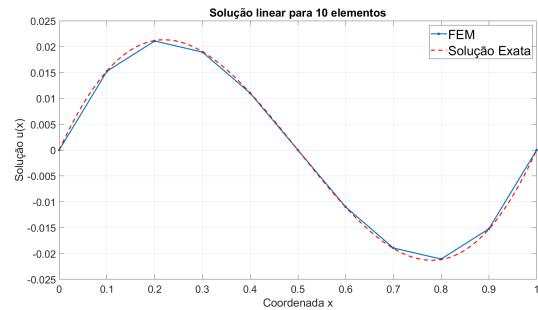


Figura 11. Solução $u(x)$ para 10 pontos

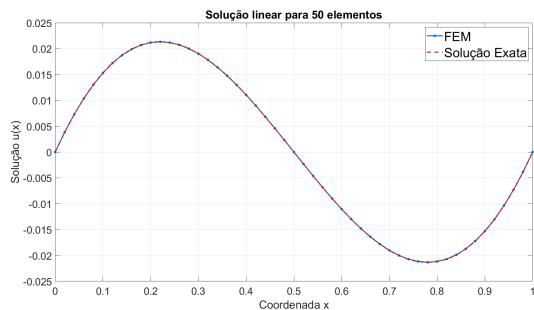


Figura 12. Solução $u(x)$ para 50 pontos

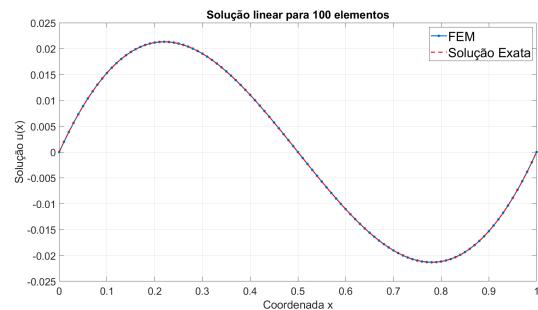


Figura 13. Solução $u(x)$ para 100 pontos

5. CONCLUSÃO

O presente trabalho permitiu a análise do comportamento de Equações Lineares Diferenciais Ordinárias Gerais de Segunda Ordem por meio do Método dos Elementos Finitos. A implementação computacional no MATLAB possibilitou a comprovação da eficácia do MEF e, através do refino de uma malha, foi possível observar a convergência da aproximação feita com o ele para a solução exata.

6. REFERÊNCIAS

- Bathe, K. J., 1996. Finite Element Procedures. Prentice Hall, New Jersey.
- Shames, I., Dym, C., 1985. Energy and finite element methods in structural mechanics. Hemisphere Publishing, New York.
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., 2000. The Finite Element Method Volume 1 : The Basis. Butterworth-Heinemann, Oxford.

7. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.