

Análise de vigas de Timoshenko com o MEF

Felipe Baptista Tavares, f205759@dac.unicamp.br

Prof. Dr. Carlos Henrique Daros, chdaros@unicamp.br¹

¹ Faculdade de Engenharia Mecânica, Rua Mendeleev 200, Cidade Universitária, Campinas

Resumo. O objetivo do trabalho é obter uma compreensão mais aprofundada do Método dos Elementos Finitos, com uma aplicação em vigas de Timoshenko. O trabalho envolveu o estudo da teoria de elementos finitos da viga de Timoshenko com uma análise dos seus pontos fortes e fracos através da comparação da solução numérica com exemplos analíticos.

Palavras chave: Travamento. Cisalhamento. Timoshenko. Elementos Finitos

Abstract. The objective of this work is to gain a deeper understanding of the Finite Element Method, with an application to the Timoshenko beam. The study focused on the finite element theory of Timoshenko beams, analyzing its strengths and weaknesses through the comparison of numerical solutions with analytical examples.

Keywords: Shear. Locking. Timoshenko. Finite Elements

1. Introdução

Este trabalho tem como objetivo a aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF) na análise estrutural, com um nível de profundidade superior abordado na graduação em Engenharia Mecânica na Unicamp. O MEF é uma ferramenta fundamental na engenharia moderna, permitindo a resolução numérica de problemas complexos que não admitem soluções analíticas.

O trabalho foi baseado nos princípios de energia, com ênfase especial no Princípio do Trabalho Virtual, que serve como base para a formulação variacional do MEF. Essa abordagem fornece maior generalidade e flexibilidade na modelagem de diferentes sistemas estruturais, além de ser essencial para o desenvolvimento de formulações mais sofisticadas.

A viga de Timoshenko é o objetivo central do presente artigo. Tal viga representa um avanço em consideração à cinemática simples da viga de Euler-Bernoulli (vigas finas). Vigas de Timoshenko são úteis na modelagem de vigas espessas e também são bem sucedidas para o caso de vigas finas.

Para a viga de Timoshenko, foi implementado um código computacional em MATLAB. O código foi testado em exemplos com soluções analíticas conhecidas, a fim de verificar sua precisão e validar a metodologia numérica. A comparação entre os resultados numéricos e analíticos permitiu avaliar o erro.

O estudo foi baseado nos livros (O. C. Zienkiewicz, 1976) e (Wang, C. M., 2000). Foram lidos capítulos introdutórios de conceitos básicos do método, análise matricial padrão, teoria de barras, requisitos para a solução numérica, viga de Euler-Bernoulli e viga de Timoshenko.

2. Metodologia

2.1 Princípio do Trabalho Virtual

Considere uma estrutura que não possui movimento de corpo rígido e que está sujeita a forças generalizadas Q_i . O estado de tensão de um ponto arbitrário é determinado pelo tensor de tensões σ_{ij} .

A estrutura deformada pelas forças é sujeita em seguida a um outro carregamento que produz deformações virtuais que não violam nenhuma condição de contorno cinemática (distorção virtual).

O princípio do trabalho virtual diz que se uma estrutura permanece em equilíbrio durante a distorção virtual, o trabalho virtual externo δW feito pelas forças externas Q_i é igual ao trabalho virtual interno δU feito pelas tensões internas σ_{ij} . O contrário também é válido: se $\delta W = \delta U$ para uma distorção virtual arbitrária, o corpo está em equilíbrio.

2.2 Viga de Timoshenko

Uma grandeza característica importante no estudo de vigas é a razão de esbeltez λ . Esse número é a razão entre o comprimento e a altura da viga: $\lambda = L/H$. Para vigas finas, onde $\lambda > 100$, a formulação tradicional de Euler-Bernoulli é muito boa, mas para as vigas mais grossas, o erro da teoria aumenta consideravelmente devido ao efeito do cisalhamento.

Para esses casos ($\lambda \approx 10$), é aconselhável utilizar a viga de Timoshenko, que leva em conta os efeitos cisalhantes.

Além disso, para as vigas feitas de materiais compósitos isso também vale, pois o cisalhamento transversal está presente mesmo para uma razão de esbeltez alta.

As hipóteses cinemáticas básicas de Timoshenko são: 1) A deflexão vertical w dos pontos da seção transversal são pequenos e iguais à deflexão do eixo da viga; 2) O deslocamento lateral v é zero; 3) Seções transversais normais ao eixo da viga antes da deformação permanecem planos, mas não necessariamente ortogonais ao eixo da viga.

O efeito da terceira hipótese é o que faz a viga de Timoshenko mais adequada para vigas grossas em relação à de Euler-Bernoulli, pois esta considera que a seção transversal permanece ortogonal ao eixo da viga, sendo que ocorre uma distorção na seção na realidade.

A figura 1 mostra a diferença da angulação das seções transversais. A seção transversal perpendicular ao eixo é a considerada na viga de Euler-Bernoulli e a em vermelho é a de Timoshenko, que considera a rotação adicional devido aos efeitos do cisalhamento. A figura 2 amplia as seções transversais e mostra como são as referências dos ângulos:

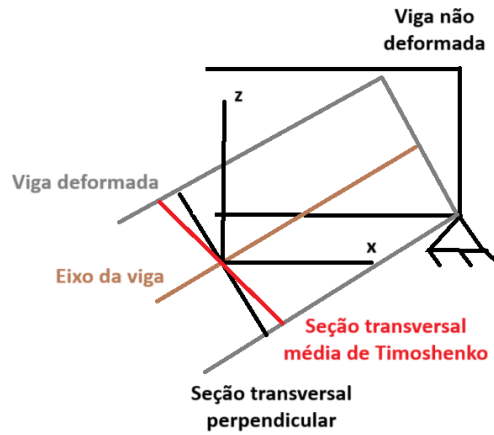


Figura 1. Esquema da cinemática da viga

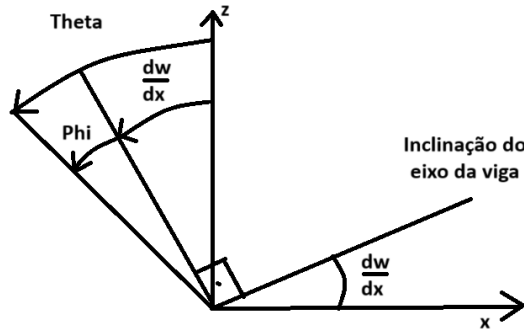


Figura 2. Cinemática da viga de Timoshenko

Os deslocamentos possíveis em um ponto são u , na direção do eixo x e w , na direção do eixo z . A rotação da seção transversal θ é:

$$\theta = \frac{dw}{dx} + \phi \quad (1)$$

$\frac{dw}{dx}$ é a inclinação do eixo da viga e ϕ é uma rotação adicional devido à distorção média da seção transversal. A deformação normal ε_x e a deformação de cisalhamento γ_{xz} são obtidas a seguir:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -z \frac{d\theta}{dx} ; \quad \gamma_{xz} = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} = \frac{dw}{dx} - \theta = -\phi \quad (2)$$

A tensão normal σ_x e de cisalhamento τ_{xz} em um ponto da seção transversal da viga estão relacionadas às deformações correspondentes por:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -zE\frac{d\theta}{dx}; \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G\left(\frac{dw}{dx} - \theta\right) \quad (3)$$

E é o módulo de Young do material e G é o módulo de cisalhamento transversal. O momento fletor M e força de cisalhamento Q são definidos como:

$$M = -\int_A z\sigma_x dA; \quad Q = \int_A \tau_{xz} dA \quad (4)$$

Substituindo a expressão das tensões e simplificando, obtém-se:

$$M = \hat{D}_b \frac{d\theta}{dx} = \hat{D}_b \kappa; \quad Q = \hat{G} \gamma_{xz} \quad (5)$$

$\hat{D}_b$ e $\hat{G}$ são parâmetros constitutivos integrados na seção, sendo também chamados de resultantes ou generalizados. Para materiais homogêneos:

$$\hat{D}_b = \int_A Ez^2 dA = EI_y \quad \text{e} \quad \hat{G} = \int_A G dA = GA \quad (6)$$

I_y é o momento de inércia em relação ao eixo neutro e A é a área da seção transversal. $\kappa = \frac{d\theta}{dx}$ é a deformação de flexão. κ e γ_{xz} são as deformações generalizadas, quantidades relacionadas com a seção que dependem apenas de x.

A tensão de cisalhamento é constante ao longo da espessura, o que conflita com a distribuição real, quadrática, para uma viga retangular.

Este problema pode ser resolvido modificando a energia interna dissipada pelas tensões de cisalhamento constantes no PTV para corresponder à energia exata deduzida da teoria de vigas.

$$\tau_{xz} = k_z G \gamma_{xz} \quad (7)$$

O parâmetro de correção de cisalhamento k_z ($k_z \leq 1$) leva em conta a distorção da seção transversal. Para materiais homogêneos:

$$Q = k_z GA \gamma_{xz}, \quad \text{então} \quad \hat{D}_s = GAk_z. \quad (8)$$

O PTV geral para uma viga de Timoshenko considera cargas distribuídas f_z e m , além de i cargas pontuais P_i e j momentos concentrados M_j^c :

$$\int_V (\delta\varepsilon_x \sigma_x + \delta\gamma_{xz} \tau_{xz}) dV = \int_0^L (\delta w f_z + \delta\theta m) dx + \sum_i \delta w_i P_i + \sum_j \delta\theta_j M_j^c \quad (9)$$

O lado esquerdo da igualdade representa o trabalho virtual interno feito pelas tensões reais. O lado direito mostra o trabalho virtual externo feito pelas cargas distribuídas e forças pontuais.

A equação pode ser modificada e chegamos no PTV em termos das integrais no eixo da viga:

$$\int_0^L \left[\delta \left(\frac{d\theta}{dx} \right) M + \delta\gamma_{xz} Q \right] dx = \int_0^L (\delta w f_z + \delta\theta m) dx + \sum_i \delta w_i P_i + \sum_j \delta\theta_j M_j^c \quad (10)$$

A primeira integral é o trabalho virtual interno induzido pelo momento fletor M e pela força de cisalhamento transversal Q. A equação mostra que o PTV envolve apenas primeiras derivadas da deflexão e da rotação, então requer apenas continuidade C^0 para w e θ .

Continuidade C^0 significa que o campo de deslocamentos deve ser contínuo, porém as derivadas dos deslocamentos podem ser descontínuas.

2.3 Formulação de elementos finitos

A viga é discretizada em elementos de comprimento $l^{(e)}$. O elemento e possui 2 nós (1 e 2), com numeração global i, j respectivamente. Cada nó possui dois graus de liberdades associados, a deflexão w_i e rotação θ_i . O esquema está representado na figura 3

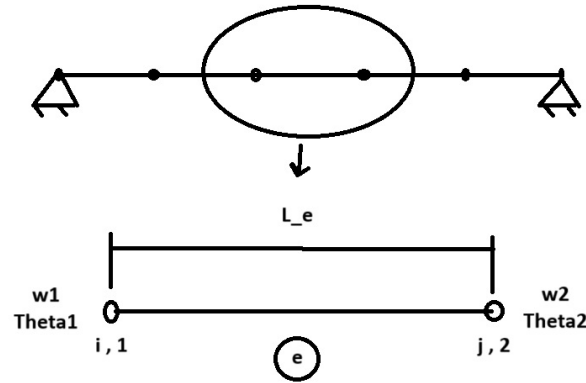


Figura 3. Elemento de 2 nós de Timoshenko

Devido aos seus requisitos de continuidade, a deflexão e a rotação são variáveis independentes e cada uma é interpolada usando funções de forma C^0 em termos da coordenada natural ξ :

$$w(\xi) = N_1 w_1 + N_2 w_2; \quad \theta(\xi) = N_1 \theta_1 + N_2 \theta_2; \quad \xi = 2 \frac{(x - x_c)}{l^{(e)}} \quad (11)$$

$l^{(e)}$ é o comprimento do elemento e x_c é a coordenada do centro do elemento:

$$l^{(e)} = x_2 - x_1; \quad x_c = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (12)$$

A transformação de coordenada entre x e ξ mostra que ξ varia de -1 a +1. As funções de forma são definidas como:

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi); \quad N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (13)$$

Observe que quando $\xi = -1$, a função $N_1 = 1$ e $N_2 = 0$. Quando $\xi = +1$, $N_1 = 0$ e $N_2 = 1$. Um valor de ξ no intervalo -1 a +1 resulta nas funções de forma tendo um valor entre 0 e 1.

Usa-se essa propriedade para interpolar o campo de deslocamentos em função dos deslocamentos nodais de maneira linear.

Pode-se organizar os deslocamentos no vetor de deslocamento $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^2 \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i = \mathbf{N}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)}; \quad \mathbf{a}^{(e)} = \begin{Bmatrix} a_1^{(e)} \\ a_2^{(e)} \end{Bmatrix}; \quad a_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$\mathbf{N}^{(e)}$ é a matriz de funções de forma, $\mathbf{a}^{(e)}$ é o vetor de deslocamentos nodais do elemento e w_1, θ_1, w_2 e θ_2 são as deflexões e rotações dos nós 1 e 2 respectivamente.

A deformação de flexão κ e deformação de cisalhamento γ_{xz} transversal são expressos em termos dos GDLs nodais:

$$\kappa = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \left[\frac{dN_1}{d\xi} \theta_1 + \frac{dN_2}{d\xi} \theta_2 \right] \frac{d\xi}{dx}; \quad \gamma_{xz} = \frac{dw}{dx} - \theta = \frac{d\xi}{dx} \left[\frac{dN_1}{d\xi} w_1 + \frac{dN_2}{d\xi} w_2 \right] - (N_1 \theta_1 + N_2 \theta_2) \quad (15)$$

É necessário interpolar a geometria do elemento para descobrir $\frac{d\xi}{dx}$. Isso é feito em termos das coordenadas dos dois nós na forma isoparamétrica. Isso significa que $\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{l^{(e)}}$.

Podemos escrever então na notação matricial:

$$\kappa = \frac{d\theta}{dx} = \mathbf{B}_\theta \mathbf{a}^{(e)}; \quad \gamma_{xz} = \frac{dw}{dx} - \theta = \mathbf{B}_s \mathbf{a}^{(e)} \quad (16)$$

$$\mathbf{B}_b = \left[0, -\frac{1}{l^{(e)}}, 0, \frac{1}{l^{(e)}}\right]; \quad \mathbf{B}_s = \left[-\frac{1}{l^{(e)}}, \frac{-(1-\xi)}{2}, \frac{1}{l^{(e)}}, \frac{-(1+\xi)}{2}\right] \quad (17)$$

$\mathbf{B}_b$ e $\mathbf{B}_s$ são, respectivamente, a matriz de deformação de flexão e de cisalhamento.

Os campos de deslocamento e deformação virtuais são expressos em termos das coordenadas nodais de maneira similar ao que já foi visto:

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \delta \mathbf{a}^{(e)}, \quad \delta \kappa = \mathbf{B}_b \delta \mathbf{a}^{(e)}, \quad \delta \gamma_{xz} = \mathbf{B}_s \delta \mathbf{a}^{(e)} \quad (18)$$

O momento fletor e força de cisalhamento são obtidos a partir de 5:

$$M = \hat{D}_b \mathbf{B}_b \mathbf{a}^{(e)}, \quad Q = \hat{D}_s \mathbf{B}_s \mathbf{a}^{(e)} \quad (19)$$

M é constante enquanto Q tem distribuição linear ao longo do comprimento do elemento devido às respectivas matrizes de deformação $\mathbf{B}_b$ e $\mathbf{B}_s$.

Adaptando a equação 10 para um elemento individual de Timoshenko, temos:

$$\int_{l^{(e)}} [\delta \kappa M + \delta \gamma_{xz} Q] dx = \int_{l^{(e)}} \delta \mathbf{u}^T \left\{ \begin{matrix} f_z \\ m \end{matrix} \right\} dx + [\delta \mathbf{a}^{(e)}]^T \mathbf{q}^{(e)} \quad (20)$$

Ao substituir os esforços internos e deslocamentos virtuais no PTV e fazer as simplificações, temos:

$$\left(\int_{l^{(e)}} [\mathbf{B}_b^T \hat{D}_b \mathbf{B}_b + \mathbf{B}_s^T \hat{D}_s \mathbf{B}_s] dx \right) \mathbf{a}^{(e)} - \int_{l^{(e)}} \mathbf{N}^T \left\{ \begin{matrix} f_z \\ m \end{matrix} \right\} dx = \mathbf{q}^{(e)} \quad (21)$$

Na forma compacta:

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)} - \mathbf{f}^{(e)} = \mathbf{q}^{(e)} \quad (22)$$

$\mathbf{K}^{(e)}$ é a matriz de rigidez do elemento. $\mathbf{q}^{(e)}$ é o vetor de forças nodais de equilíbrio. O vetor de forças nodais equivalentes devido ao carregamento distribuído de f_z e m é:

$$\mathbf{f}^{(e)} = \left\{ \begin{matrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \end{matrix} \right\} \quad \text{com} \quad f_i^{(e)} = \int_{l^{(e)}} N_i \left\{ \begin{matrix} f_z \\ m \end{matrix} \right\} dx \quad (23)$$

As forças verticais e momento externos fornecem contribuições não acopladas ao vetor $\mathbf{f}^{(e)}$. Isso ocorre pela interpolação independente de w e θ . Na viga de Euler-Bernoulli, por exemplo, a carga vertical induz momento nodal pela interpolação C^1 da deflexão.

2.4 Travamento do cisalhamento

A integração numérica exata de $\mathbf{K}_b^{(e)}$ requer um único ponto de Gauss, pois todos os termos são constantes no elemento:

$$\mathbf{K}_b^{(e)} = \left(\frac{\hat{D}_b}{l} \right)^{(e)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

A integração exata de $\mathbf{K}_s^{(e)}$ requer dois pontos de Gauss, já que aparecem termos quadráticos em ξ devido ao produto $N_i N_j$. Para materiais homogêneos:

$$\mathbf{K}_s^{(e)} = \left(\frac{\hat{D}_s}{l} \right)^{(e)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{l^{(e)}}{2} & -1 & \frac{l^{(e)}}{2} \\ \cdot & \frac{(l^{(e)})^2}{3} & -\frac{l^{(e)}}{2} & \frac{(l^{(e)})^2}{6} \\ \cdot & \cdot & 1 & -\frac{l^{(e)}}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{(l^{(e)})^2}{3} \end{bmatrix} \quad (25)$$

O travamento do cisalhamento é um fenômeno que acontece com o elemento de 2 nós de Timoshenko com integração gaussiana exata e aproximação linear de w e θ . Para vigas grossas, a sua performance é adequada, porém conforme $\lambda \rightarrow \infty$, a rigidez do elemento aumenta e os valores dos deslocamentos nodais diminuem excessivamente.

Um método popular para reduzir a influência da rigidez excessiva do cisalhamento é sub-integrar os termos de $\mathbf{K}_s^{(e)}$ usando uma quadratura de uma ordem a menos que a exata. $\mathbf{K}_b^{(e)}$ ainda é integrada exatamente.

A matriz de rigidez do elemento para uma integração uniforme de $\mathbf{K}_b^{(e)}$ e $\mathbf{K}_s^{(e)}$ é:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{\hat{D}_s}{l} & \frac{\hat{D}_s}{2} & -\frac{\hat{D}_s}{l} & \frac{\hat{D}_s}{2} \\ \cdot & \frac{\hat{D}_s l}{4} + \frac{\hat{D}_b}{l} & \frac{\hat{D}_s}{2} & \frac{\hat{D}_s l}{4} - \frac{\hat{D}_b}{l} \\ \cdot & \cdot & \frac{\hat{D}_s}{l} & -\frac{\hat{D}_s}{2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\hat{D}_s l}{4} + \frac{\hat{D}_b}{l} \end{bmatrix} \quad (26)$$

Essa mudança na matriz de rigidez introduz um erro na aproximação do deslocamento. No entanto, à medida que o número de elementos da malha aumenta, o erro cai consideravelmente. O elemento de viga de 2 nós com integração reduzida de $\mathbf{K}_s^{(e)}$ gera um elemento válido para vigas finas e grossas. Para fazer a validação, foi feito um programa computacional em Matlab.

3. Resultados

3.1 Exemplo com carga constante

O exemplo utilizado como comparação está na figura 4:

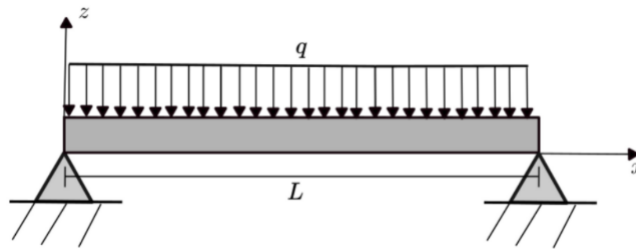


Figura 4. Viga com carga uniforme

E	ν	k_z	q	b
10^6	0.25	5/6	1	1

Tabela 1. Valores numéricos utilizados (SI)

A solução analítica deste problema foi obtida a partir de (Wang. C. M., 2000) e é:

$$w_{an}(x) = \frac{qL^4}{24EI_y}(\bar{x} - 2\bar{x}^3 + \bar{x}^4) - \frac{qL^2}{2GAk_z}(\bar{x} - \bar{x}^2); \quad \theta_{an}(x) = -\frac{qL^3}{24EI_y}(1 - 6\bar{x}^2 + 4\bar{x}^3), \quad \bar{x} = \frac{x}{L} \quad (27)$$

A solução numérica proposta anteriormente foi implementada e comparada com a solução analítica. A malha utilizada é de 10 elementos.

Erro (em%)	$\lambda = 100$	$\lambda = 10$
Integração reduzida	1,59	1,56
Integração exata	97,1	25,6

Tabela 2. Erro relativo para λ variáveis com 10 elementos - carga constante

Para testar a influência do número de elementos, foi usada uma outra malha, com 20 elementos, para a comparação.

Por fim, para testar a capacidade do elemento de 2 nós com integração reduzida, foi imposto $\lambda = 1$ para ver se a solução numérica está incorporando o cisalhamento desse caso. É importante salientar que essas condições onde o comprimento e altura são iguais não caracterizam propriamente uma viga, mas sim uma placa. Porém, para fins de validação, é um caso útil. A figura 5 mostra a deflexão da viga ao longo do comprimento para esse caso:

Erro (em%)	$\lambda = 100$	$\lambda = 10$
Integração reduzida	0,40	0,39
Integração exata	89,3	3,34

Tabela 3. Erro relativo para λ variáveis com 20 elementos - carga constante

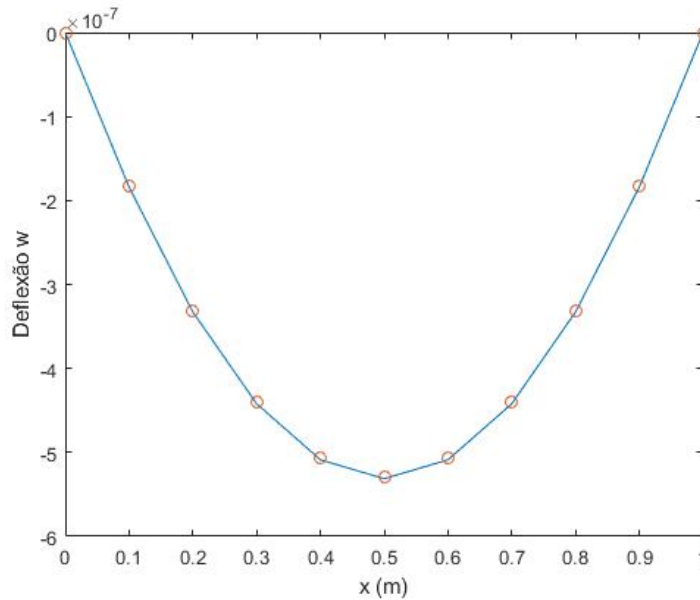


Figura 5. Integração reduzida com $\lambda = 1$

O erro obtido foi de 0,47%, o que é um indicativo de sucesso da simulação numérica.

3.2 Exemplo com carga senoidal

A viga utilizada e o valores das propriedades são os mesmos do exemplo 1. No entanto, a carga é $q(x) = q \sin(\frac{\pi x}{L})$. A solução analítica para este caso é:

$$w_{an}(x) = (\frac{qL^4}{EI_y\pi^4} + \frac{qL^2}{GAk_z\pi^2})\sin(\frac{\pi x}{L}); \quad \theta_{an}(x) = -\frac{qL^3}{EI_y\pi^3}\cos(\frac{\pi x}{L}) \quad (28)$$

A aproximação das forças equivalentes é feita de acordo com a equação 23, de modo que a carga senoidal em cada elemento é aproximada como sendo linear para a realização das integrais no elemento.

Similarmente ao exemplo 1, utilizam-se malhas de 10 e 20 elementos para cálculo dos erros relativos na deflexão.

Erro (em%)	$\lambda = 100$	$\lambda = 10$
Integração reduzida	2,44	2,41
Integração exata	97,1	26,2

Tabela 4. Erro relativo para λ variáveis com 10 elementos - carga senoidal

Erro (em%)	$\lambda = 100$	$\lambda = 10$
Integração reduzida	0,62	0,61
Integração exata	89,3	8,1

Tabela 5. Erro relativo para λ variáveis com 20 elementos - carga senoidal

4. Conclusão

Conclui-se que o elemento linear de Timoshenko com integração reduzida é adequado para vigas finas e grossas. Não há grande variação no erro relativo entre os dois casos. Já a integração exata fornece um erro grande para um problema simples, com carga constante. Assim, ao utilizar a modelagem de elementos finitos linear de Timoshenko, deve-se optar pela integração reduzida, que intrinsicamente adiciona um erro à solução, porém ele é baixo comparado ao travamento do cisalhamento.

5. Referências

O. C. Zienkiewicz, K.M., 1976. *Finite Elements and Approximation*. A wiley-interscience Publication (John Wiley Sons).
Wang, C. M., Reddy. J. N., L.K.H., 2000. *Shear Deformable Beams and Plates. Relationships with Classical Solutions*. Elsevier, Oxford, UK.