

CONTROLE DE VIBRAÇÃO UTILIZANDO METAMATERIAIS COM EFEITO DE AMPLIFICAÇÃO INERCIAL

Carlos Eduardo Cezario de Moraes, carlos.cezario@unesp.br¹

Gabriel Biancolin Moimas, gabriel.moimas@unesp.br¹

Paulo José Paupitz Gonçalves, paulo.paupitz@unesp.br¹

¹Faculdade de Engenharia de Bauru, Universidade Estadual Paulista (UNESP), Av. Eng. Luiz Edmundo C. Coube 14-01 - Vargem Limpa Bauru

Resumo: Este trabalho propõe o uso de metamateriais com um mecanismo de amplificação inercial como uma solução passiva para o controle de vibrações. Sabe-se da literatura que o uso de estruturas periódicas proporciona faixas de frequência nas quais as ondas de vibração não podem se propagar ou são significativamente atenuadas (stopbands), acarretando em uma atenuação significativa da transmissibilidade de deslocamento de vibração de uma estrutura periódica. Essas stopbands são influenciadas por características dinâmicas da estrutura periódica como rigidez e inércia. Nesse trabalho, será analisada a transmissibilidade de deslocamento de uma célula de uma estrutura periódica finita mono-acoplada com um mecanismo de amplificação inercial, visando verificar a influência dos parâmetros geométricos e inerciais do mecanismo na atenuação de vibração em comparação com modelos já comumente empregados na literatura. A inércia do mecanismo de amplificação inercial e a equação do movimento foi obtida por meio da equação de Lagrange, com isso, as matrizes de inércia, rigidez e amortecimento foram obtidas, e, consequentemente, a transmissibilidade de deslocamento de vibração foi estimada. Está previsto também o desenvolvimento de um protótipo físico, que servirá como base para uma futura validação experimental dos resultados obtidos em simulação. Resultados preliminares demonstram que o mecanismo de amplificação inercial assegura, para pequenas massas do mecanismo, faixas mais largas de atenuação de vibração com um pico de anti-ressonância não visto nos demais modelos conhecidos da literatura. Em contrapartida, em altas frequências nota-se uma piora na performance em comparação aos outros modelos.

Palavras chave: metamateriais, mecanismo de amplificação inercial, vibrações estruturais, estruturas periódicas, stopbands.

Abstract. This work proposes the use of metamaterials incorporating an inertial amplification mechanism as a passive solution for vibration control. It is well established in the literature that the use of periodic structures leads to frequency ranges in which vibration waves cannot propagate or are significantly attenuated (stopbands), resulting in a substantial reduction in the displacement transmissibility of such structures. These stopbands are influenced by the dynamic characteristics of the periodic structure, such as stiffness and inertia. In this study, the displacement transmissibility of a unit cell from a finite mono-coupled periodic structure equipped with an inertial amplification mechanism is analyzed, with the aim of evaluating the influence of the mechanism's geometric and inertial parameters on vibration attenuation, and comparing the results with models commonly employed in the literature. The inertance of the inertial amplification mechanism and the corresponding equation of motion were derived using Lagrange's equation. From this, the inertia, stiffness, and damping matrices were obtained, enabling the estimation of the vibration displacement transmissibility. The development of a physical prototype is also planned, which will serve as the basis for future experimental validation of the simulation results. Preliminary findings demonstrate that the inertial amplification mechanism ensures wider vibration attenuation bands even with small added masses, and introduces an anti-resonance peak not observed in other models available in the literature. On the other hand, at higher frequencies, a performance degradation is noted when compared to these conventional models.

Keywords: metamaterials, inertial amplification mechanism, structural vibrations, periodic structures, stopbands.

1. INTRODUÇÃO

O uso de metamateriais no controle passivo de vibrações tem se destacado como uma alternativa inovadora e eficiente, principalmente por sua capacidade de manipular a propagação de ondas em estruturas mecânicas. Revisões amplas como as de Chen *et al.* (2018) e Liu *et al.* (2020) mostram a evolução conceitual e tecnológica dos metamateriais acústicos e fonônicos, destacando suas propriedades tunáveis, aplicações em diversas escalas e os desafios relacionados ao desempenho em baixas frequências. Embora esses estudos enfoquem predominantemente aspectos acústicos, eles estabelecem um panorama essencial que contextualiza o desenvolvimento de novas abordagens voltadas ao controle vibracional em estruturas mecânicas, como é o caso da presente pesquisa.

Com base nessa evolução conceitual, o presente trabalho se alinha a uma linha de pesquisa que propõem o uso de mecanismos de amplificação inercial (IAMs) aplicados a estruturas periódicas unidimensionais. Esse tipo de mecanismo é capaz de gerar bandgaps em faixas específicas de frequência com mínima adição de massa, sendo uma alternativa promissora frente aos ressonadores locais convencionais. Tal ideia foi explorada por Yilmaz *et al.* (2007), que demonstraram que, ao amplificar as forças inerciais entre dois pontos de uma estrutura periódica, é possível induzir frequências de antirressonância e bloquear a propagação de ondas de forma eficiente e compacta.

A pesquisa de Frandsen *et al.* (2016) aprofunda esse conceito ao aplicá-lo a estruturas contínuas, como hastes elásticas com mecanismos periódicos fixados, mantendo a integridade estrutural do sistema. Os autores demonstram que, mesmo com massas reduzidas, os IAMs podem gerar bandgaps largos e profundos. Fenômenos como picos múltiplos de atenuação, coalescência de bandas e transições entre regimes de dispersão são observados e relacionados diretamente à geometria e parâmetros dos mecanismos, o que reforça a importância de uma modelagem paramétrica robusta como a que se propõe neste trabalho.

Já Muhammad *et al.* (2020) exploram o comportamento de vigas com seções transversais não uniformes combinadas com IAMs, validando experimentalmente que essa combinação resulta em bandgaps duplos e de largura significativamente ampliada. Em especial, o artigo mostra que o ajuste dos parâmetros de amplificação — como o ângulo das alavancas e a massa do amplificador — permite controlar com precisão a posição e a largura das bandas de atenuação, algo que também se pretende investigar neste projeto por meio de simulações numéricas e modelagem via equações de Lagrange.

Em continuidade a essas abordagens, Settini *et al.* (2021) oferecem uma visão avançada sobre a influência da não linearidade em sistemas com amplificação inercial, mostrando que as propriedades de dispersão podem ser ajustadas não apenas por parâmetros geométricos e de massa, mas também pela resposta dinâmica não linear da estrutura. Essa observação amplia o campo de atuação dos IAMs, sugerindo que a inclusão de efeitos não lineares pode ser explorada como estratégia adicional de ajuste fino dos bandgaps, especialmente em aplicações que exigem desempenho variável em tempo real ou em sistemas sujeitos a grandes amplitudes de excitação.

Além disso, Zeng *et al.* (2022) trazem evidências da eficácia dos IAMs em escalas estruturais maiores, ao aplicá-los em metamateriais sísmicos. O estudo demonstra a geração de bandgaps em frequências ultra-baixas, algo essencial para aplicações como isolamento de vibrações em fundações de edifícios e infraestruturas críticas. Esse resultado reforça a ideia de que o princípio da amplificação inercial é versátil e escalável, sendo aplicável tanto em estruturas micro como em grandes sistemas de engenharia — característica que também embasa o interesse desta pesquisa no desenvolvimento de um protótipo físico funcional, capaz de validar os efeitos simulados.

O foco em estruturas com controle passivo de vibrações, baseadas na dinâmica de células unitárias, contribui para ampliar as possibilidades de aplicação dos metamateriais na engenharia. Os trabalhos acima citados demonstram a relevância da utilização de IAMs para a atenuação de vibração em estruturas, no entanto ainda se é pouco estudado o controle passivo de vibração em estruturas periódicas com amplificadores inerciais. Portanto, esse trabalho visa compreender o comportamento dinâmico de estruturas periódicas finitas monoacopladas com IAMs e compará-las com estruturas periódicas já estudadas na literatura.

2. ESTRUTURA PERIÓDICA FINITA MONO-ACOPLADA COM MECANISMO DE AMPLIFICAÇÃO INERCIAL

A Figura 1 ilustra a estrutura periódica unidimensional mono-acoplada composta por n células analisada neste trabalho. A transmissibilidade de deslocamento de vibração é analisada considerando uma força externa harmônica sendo aplicada em uma das extremidades da estrutura. Para uma estrutura periódica desse tipo, a transmissibilidade de toda estrutura pode ser derivada a partir da transmissibilidade de uma célula somente. Para isso, foram analisadas as células finitas dos casos: (i) acopladas com molas e amortecedores, (ii) acopladas com mola-amortecedor-inertância e (iii) acopladas com mola-amortecedor e o mecanismo de amplificação de inércia. Em todos os casos, a constante de rigidez entre as massas é K e a constante de amortecimento entre as massas é c , além da transmissibilidade da célula ser determinada considerando a razão entre os deslocamentos das massas das extremidades, conforme será visto à frente.

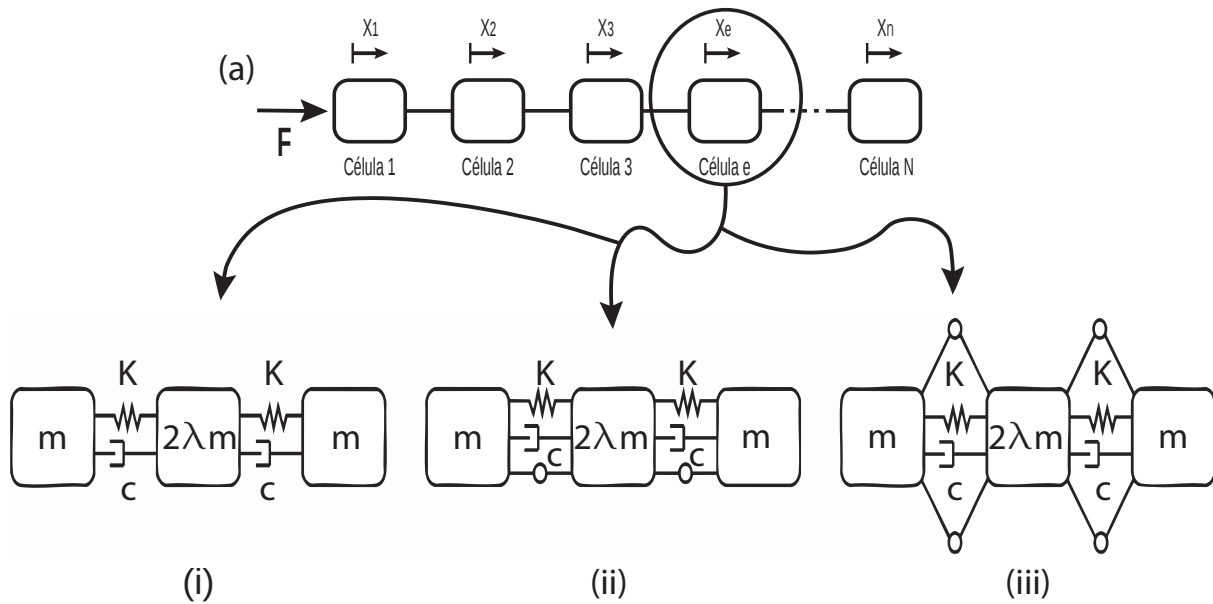


Figura 1. (a) Estrutura periódica finita monoacoplada de N células sujeito a uma excitação periódica na extremidade esquerda. (i) célula com modelo clássico massa-mola-amortecedor, (ii) célula com uma inércia qualquer em paralelo às molas e (iii) sistema com um mecanismo de amplificação inercial

Assim, adotou-se uma abordagem progressiva de elementos no sistema. Inicialmente, considerou-se o caso (i), no qual o sistema é constituído apenas por molas e amortecedores. Esse modelo foi implementado no MATLAB por meio da formulação das equações de movimento, permitindo a obtenção de respostas dinâmicas do sistema sob diferentes massas intermediárias e diferentes comprimentos da alavanca do inerte.

No caso (ii), foi adicionado um mecanismo de amplificação inercial à célula unitária. Esse mecanismo visa amplificar as forças inerciais internas sem aumento significativo de massa, contribuindo para a formação de *bandgaps* e, consequentemente, para a mitigação da propagação das ondas vibratórias ao longo da estrutura. Trata-se de um mecanismo no qual a força gerada é proporcional à aceleração relativa entre as extremidades do inerte, segundo a relação:

$$f_b = b(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) \quad (1)$$

onde b representa o parâmetro de acoplamento inercial em (kg). O modelo foi igualmente implementado no MATLAB e analisado sob os mesmos critérios de excitação.

Por fim, no caso (iii), foi incorporado o mecanismo inerte proposto nesta pesquisa, o qual se diferencia por apresentar variáveis adicionais associadas à sua geometria, inércia e acoplamento entre as massas. Esse mecanismo foi desenvolvido com o objetivo de proporcionar uma resposta dinâmica ajustável e mais eficiente, permitindo maior controle sobre as faixas de atenuação.

Ademais, os resultados obtidos para cada uma das configurações, são apresentados, com o objetivo de comparar o desempenho dos três modelos propostos quanto à sua capacidade de reduzir vibrações ao longo da estrutura periódica.

3. Modelagem Matemática e Simulação

Com o objetivo de compreender o efeito de diferentes configurações estruturais sobre a atenuação de vibrações, foram desenvolvidos modelos numéricos no ambiente MATLAB, com análise no domínio da frequência para excitações harmônicas. A modelagem foi realizada de forma dimensional, mantendo os parâmetros físicos em suas unidades originais. O principal parâmetro analisado foi a transmissibilidade que para os três casos avaliados, definem-se:

$$T = \frac{X_3}{X_1} \quad (2)$$

Sendo, X_1 e X_3 a amplitude de deslocamento da primeira e terceira massa de cada célula. A transmissibilidade T representa a razão entre as amplitudes de vibração transmitida e excitada em um sistema. Quando $T = 1$, a amplitude de vibração da massa à esquerda é igual à da massa à direita, indicando que não há atenuação, a vibração se propaga integralmente através do sistema. Quando a transmissibilidade é muito inferior a 1, significa que ocorre atenuação de vibração, ou seja, a energia vibracional é reduzida, refletida ou dissipada, caracterizando uma região de isolamento dinâmico. Por outro lado, quando T é muito superior a 1, observa-se amplificação da vibração, podendo indicar ressonância, em que o

sistema responde com amplitudes elevadas a certas frequências específicas. Assim, apresenta-se a formulação geral e a descrição de cada caso avaliado.

3.1 Formulação Geral

A equação de movimento para uma célula unitária genérica no domínio do tempo é:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (3)$$

Assumindo que exista uma força harmônica $f(t) = Fe^{j\omega t}$ aplicada na massa esquerda, a resposta também será harmônica $x(t) = Xe^{j\omega t}$ resultando em:

$$(-\omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{C} + \mathbf{K})\mathbf{X} = \mathbf{F}(\omega) \quad (4)$$

A resposta da estrutura a uma excitação harmônica no domínio da frequência é obtida a partir de:

$$\mathbf{X}(\omega) = (-\omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{F}(\omega) \quad (5)$$

As matrizes de amortecimento $\mathbf{C}$ e rigidez $\mathbf{K}$, adotadas nos três casos, foram consideradas com coeficientes dimensionais constantes, em que $c = 0,01$ [N.s/m] e $k = 1$ [N/m]. Para o caso base (sem amplificação), são dadas por:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c & -c & 0 \\ -c & 2c & -c \\ 0 & -c & c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \quad (6)$$

Essas matrizes refletem a simetria e a conexão entre os graus de liberdade da célula unitária, assumindo que o amortecimento é proporcional e distribuído entre os elementos.

3.2 Descrição dos Casos

Caso (i) – Sistema Inicial

Modelo com massas, molas e amortecedores distribuídos em uma célula unitária periódica. A variável α , associada à massa central relativa da célula unitária, foi variada com o objetivo de avaliar sua influência sobre a resposta dinâmica da estrutura, variando $\alpha = 0,5, 1$ e 2 . O foco foi a análise da transmissibilidade T em função da frequência.

Caso (ii) – Amplificação Inercial

Neste caso, adicionou-se um mecanismo de amplificação inercial (IAM), modificando a matriz de massa para incluir acoplamentos b . Observou-se a formação de bandas adicionais de atenuação, especialmente nas regiões de ressonância.

Caso (iii) – Inerter

A estrutura incorpora um mecanismo tipo inerter. A modelagem foi feita utilizando a formulação de Lagrange, considerando parâmetros geométricos h e L , que afetam o ângulo de amplificação φ . Neste caso, foi adotada uma modelagem totalmente dimensional, e a influência do inerter é incorporada na matriz de massa por meio de um termo adicional equivalente (b_{IAM}). Este termo é representado por:

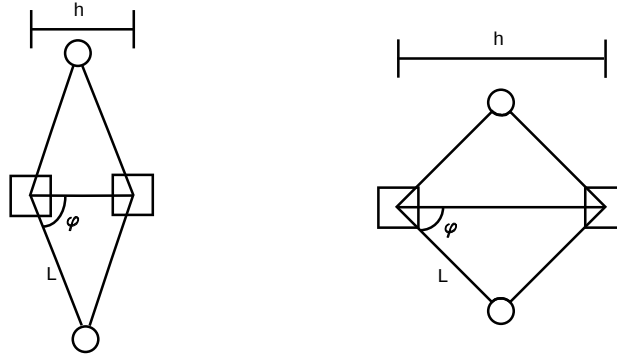


Figura 2. Variação do ângulo φ segundo parâmetros h e L

$$b_{IAM} = 2b \left(\frac{h^2}{4L^2 - h^2} \right) \quad (7)$$

Neste estudo, considerou-se $m = 1$ kg, $b = 0,05$ kg, e $L = 70$ mm. A altura horizontal entre as massas finitas, h , foi variado entre 35 mm, 70 mm e 105 mm.

A transmissibilidade da estrutura com o inerter foi expressa por:

$$T_i = \frac{X_3}{X_1} = \frac{-\omega^2 b + i\omega c + k}{-\omega^2(m + b) + i\omega c + k} \quad (8)$$

3.3 Comparação das Matrizes de Massa

As diferentes formas da matriz de massa M adotadas nos três casos são apresentadas a seguir. Para o terceiro caso, realizou-se a substituição direta de χ conforme a modelagem dimensional.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_b = \begin{bmatrix} m + b & -b & 0 \\ -b & 2(\alpha m + b) & -b \\ 0 & -b & m + b \end{bmatrix} \quad (9)$$

Para o caso da estrutura periódica com o mecanismo de amplificação inercial:

$$\mathbf{M}_{IAM} = \begin{bmatrix} m + b_{IAM} & -b_{IAM} & 0 \\ -b_{IAM} & 2(\alpha m + b_{IAM}) & -b_{IAM} \\ 0 & -b_{IAM} & m + b_{IAM} \end{bmatrix} \quad (10)$$

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

Em virtude dos modelos desenvolvidos nas seções anteriores, são apresentados e analisados os resultados das simulações numéricas obtidas. O principal objetivo da análise é avaliar o comportamento dinâmico da estrutura periódica frente à variação dos parâmetros inerciais a massa intermediária (αm) e geométricos do IAM (h).

Os resultados estão organizados de forma a permitir a comparação entre os três casos propostos: (i) sistema inicial com massas, molas e amortecedores; (ii) sistema com mecanismo de amplificação inercial (IAM); e (iii) sistema com inerter. Para verificar a influência na atenuação de vibração, foram estimadas para todos os casos a transmissibilidade T , conforme as Eq. 2 e 8, que representa a razão entre a amplitude da resposta na extremidade da estrutura e a amplitude da excitação. Esse índice permite identificar faixas de frequência nas quais ocorre atenuação significativa da vibração, caracterizando o surgimento de bandgaps.

A variabilidade do α afeta diretamente as características dos bandgaps observados nos diagramas de transmissibilidade. De acordo com α crescente, os bandgaps ficam cada vez mais largos e mais abruptos, refletindo capacidade de atenuação da faixa de atuação para frequências específicas. Ademais, nota-se uma antecipação do início dos bandgaps para frequências mais baixas, o que amplia a faixa de atuação efetiva do sistema como isolador vibracional. Na Figura 3 imagem (c), observa-se o efeito da variação de h à medida que h aumenta, há um deslocamento dos picos de ressonância e dos vales de antirressonância para frequências mais baixas, alterando significativamente a resposta dinâmica e a posição das regiões de mínima transmissibilidade.

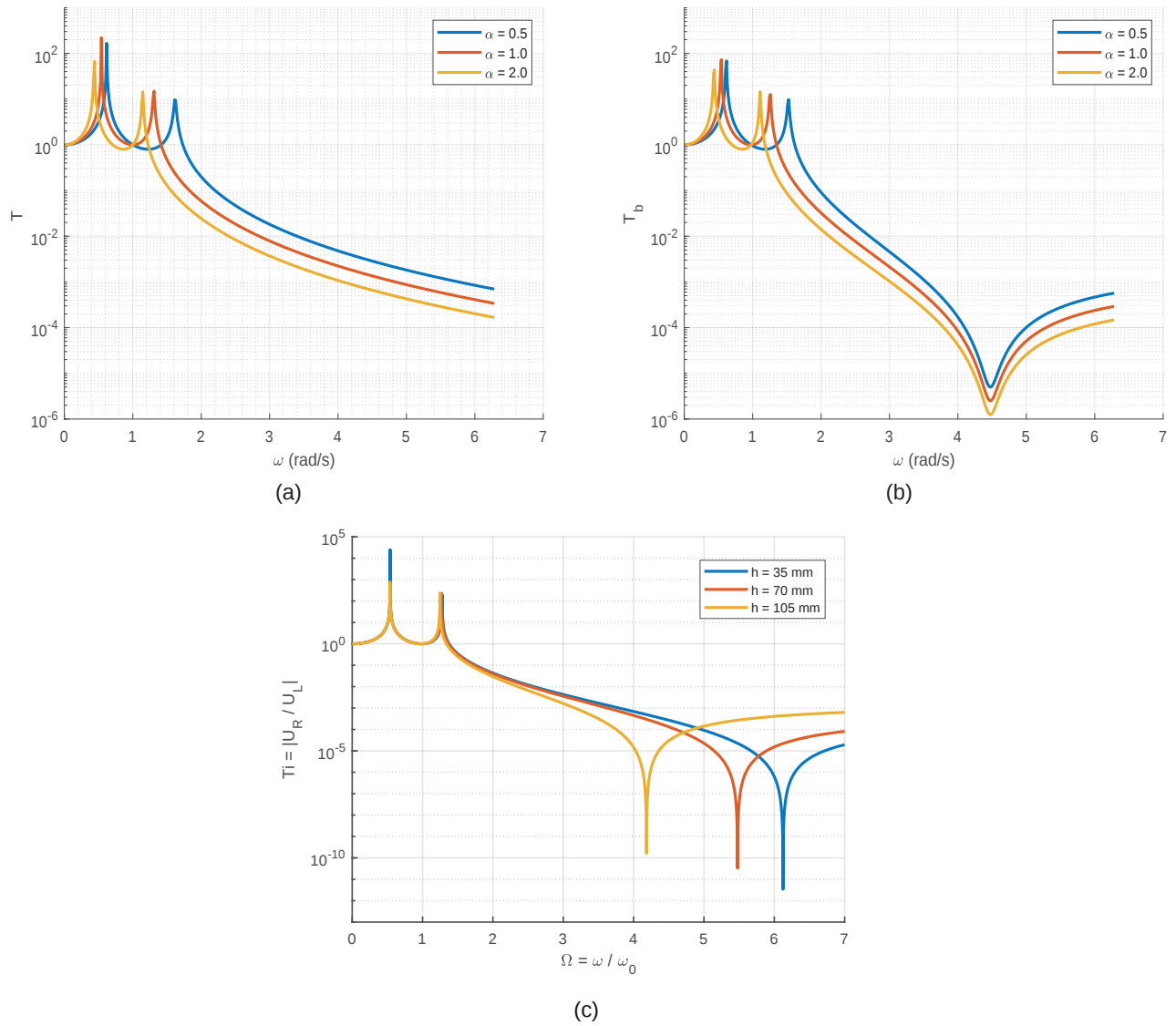


Figura 3. Imagem (a): comparação da razão T , para $\alpha = 0.5$, $\alpha = 1$ e $\alpha = 2$. Imagem (b): comparação da razão T_b , para os mesmos valores de α . Imagem (c): comparação da razão T_i , para $(h = 35 \text{ mm})$, $(h = 70 \text{ mm})$ e $(h = 105 \text{ mm})$

5. ENSAIOS EXPERIMENTAIS

Para a realização dos testes experimentais, foi necessário o desenvolvimento do mecanismo de amplificação inercial. A primeira etapa consistiu no projeto do mecanismo em ambiente CAD 3D, com o objetivo de atender às exigências geométricas e funcionais necessárias para o acoplamento de rolamentos e massas à estrutura de suporte.

Durante a fase de modelagem, foi definido o comprimento total do dispositivo como $L = 70$ mm, valor que como registrado nas simulações da modelagem matemática influencia nos resultados obtidos. Essa dimensão foi determinada com base nos resultados previstos pela simulação, na viabilidade de montagem dos componentes e na escala compatível para os ensaios.

Após a finalização do modelo CAD, foi realizada a impressão 3D do protótipo utilizando filamento de PLA.

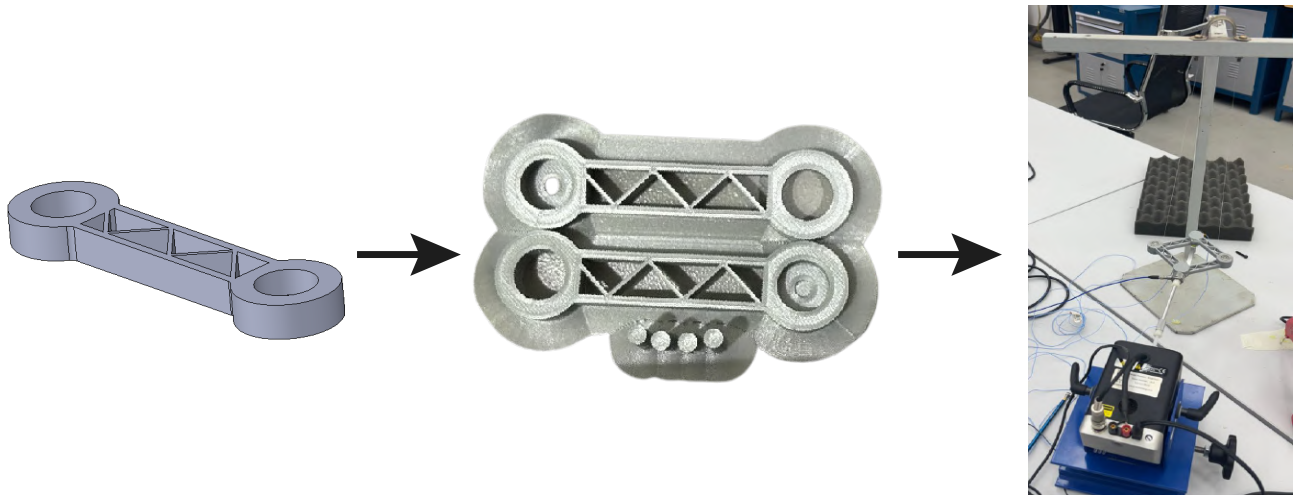


Figura 4. Evolução do desenvolvimento do protótipo: modelo CAD; protótipo impresso em 3D; montagem final utilizada nos testes.

O ensaio experimental consistiu em suspender uma semicélula do sistema periódico com o (IAM) por meio de fios de forma que a frequência da suspensão ficasse bem abaixo da frequência fundamental do sistema. Para o ensaio foi utilizado um Shaker da Marca Modal Shop, Modelo 2004. Foram utilizados dois acelerômetros para medir o deslocamento em extremidades opostas do dispositivo. Os sinais enviados ao shaker (randômico) e os sinais medidos nos acelerômetros foram gravados em um sistema de aquisição da marca Dewesoft (modelo syrius). Para obtenção da função transmissibilidade foram feitas 50 médias. O resultado da transmissibilidade é mostrado na figura 5

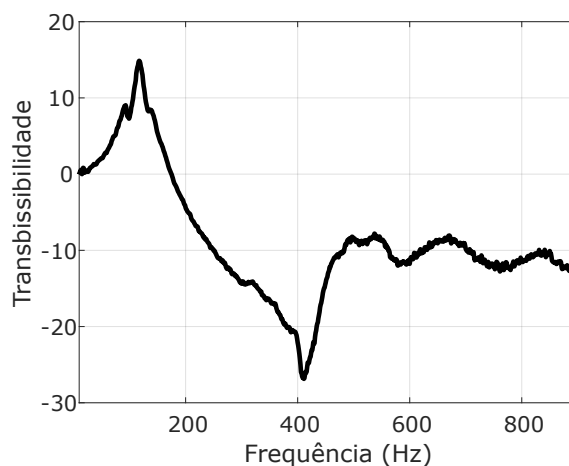


Figura 5. Transmissibilidade (dB - ref 1 m/s²)

Como pode-se notar na figura 5, o sistema construído apresenta as propriedades apresentadas nos ensaios de simulação numérica, com um pico de ressonância, uma anti-ressonância e valores aproximadamente de transmissibilidade após a ressonância.

6. CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi apresentado o comportamento dinâmico de uma sistema periódico onde os estudos foram feitos a partir de uma célula unitária. O comportamento dinâmico de um dispositivo inerter foi discutido em termos de simulação computacional e uma forma de obter este comportamento utilizando um sistema de barras rígidas articuladas. O dispositivo construído foi testado e o resultado mostra que o sistema tem comportamento conforme o previsto pela teoria.

7. AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC/CNPq) pelo apoio financeiro para o desenvolvimento do trabalho.

8. REFERÊNCIAS

- Chen, S., Fan, Y., Fu, Q., Wu, H., Jin, Y., Zheng, J. and Zhang, F., 2018. “A review of tunable acoustic metamaterials”. *Applied Sciences*, Vol. 8, No. 9, p. 1480.
- Frandsen, N.M., Bilal, O.R., Jensen, J.S. and Hussein, M.I., 2016. “Inertial amplification of continuous structures: Large band gaps from small masses”. *Journal of Applied Physics*, Vol. 119, No. 12.
- Liu, J., Guo, H. and Wang, T., 2020. “A review of acoustic metamaterials and phononic crystals”. *Crystals*, Vol. 10, No. 4, p. 305.
- Muhammad, S., Wang, S., Li, F. and Zhang, C., 2020. “Bandgap enhancement of periodic nonuniform metamaterial beams with inertial amplification mechanisms”. *Journal of Vibration and Control*, Vol. 26, No. 15-16, pp. 1309–1318.
- Settimi, V., Lepidi, M. and Bacigalupo, A., 2021. “Nonlinear dispersion properties of one-dimensional mechanical metamaterials with inertia amplification”. *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 201, p. 106461.
- Yilmaz, C., Hulbert, G.M. and Kikuchi, N., 2007. “Phononic band gaps induced by inertial amplification in periodic media”. *Physical Review B—Condensed Matter and Materials Physics*, Vol. 76, No. 5, p. 054309.
- Zeng, Y., Cao, L., Wan, S., Guo, T., Wang, Y.F., Du, Q.J., Assouar, B. and Wang, Y.S., 2022. “Seismic metamaterials: Generating low-frequency bandgaps induced by inertial amplification”. *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 221, p. 107224.

9. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.