

ANÁLISE DA FLEXÃO DE NANOVIGAS DUPLAS ELASTICAMENTE CONECTADAS UTILIZANDO O MEF

Welky K. F. de Brito, welky@usp.br¹

Ângelo V. Mendonça, mendonca@ct.ufpb.br²

Edson D. Leonel, edleonel@usp.br¹

¹Departamento de engenharia de estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, Av. Trabalhador são-carlense, 400, 13566-590, São Carlos-SP, Brasil.

²Departamento de engenharia civil e ambiental, Universidade Federal da Paraíba, Centro de tecnologia, Campus I, 58059-900, João Pessoa – PB, Brasil.

Resumo. Os nanomateriais têm despertado o interesse da comunidade científica devido às suas excelentes propriedades mecânicas, elétricas, químicas e térmicas, constituindo-se elementos fundamentais das nanoestruturas. Devido ao efeito de nanoescala, a abordagem segundo a teoria da elasticidade clássica (local) pode resultar em soluções inadequadas para alguns problemas. A literatura sobre sistemas de nanovigas conectadas por camada elástica normalmente aborda o tema considerando as hipóteses cinemáticas de Euler-Bernoulli, a qual desconsidera as deformações por cisalhamento, e o modelo de camada elástica de um parâmetro de Winkler, no qual as molas são consideradas mutuamente independentes. Este trabalho tem por objetivo apresentar uma formulação baseada no método dos elementos finitos (MEF) para a análise da flexão de sistemas de nanovigas duplas conectadas por camada elástica de Pasternak utilizando a teoria não local de Eringen associada a teoria de vigas de Timoshenko. A precisão e a convergência da formulação baseada no MEF apresentada são validadas mediante a comparação com soluções analíticas ou numéricas disponíveis na literatura.

Palavras chave: MEF. Nanovigas duplas. Pasternak. Timoshenko.

Abstract. Nanomaterials have attracted significant attention from the scientific community due to their unique mechanical, electrical, chemical, and thermal properties, constituting the fundamental elements of nanostructures. Because of the small-scale effect, classical (or local) elasticity theory may yield inadequate solutions for certain problems. In studies of nanobeam systems elastically connected, the Euler-Bernoulli beam theory combined with the Winkler model is commonly used. However, this approach neglects shear deformations and assumes mutually independent springs. This work presents a finite element (FEM)-based formulation to analyze the bending behavior of double-nanobeam systems coupled by a Pasternak elastic layer, incorporating Eringen's nonlocal elasticity theory and Timoshenko beam theory. The accuracy and convergence of the proposed FEM formulation are verified by comparing it with available analytical and numerical solutions in the literature.

Keywords: FEM, double-nanobeam system, Pasternak, Timoshenko

1. INTRODUÇÃO

Estudos relacionados ao comportamento de sistemas de nanovigas múltiplas elasticamente conectadas têm atraído considerável atenção da comunidade científica, devido às suas diversas aplicações na nanoengenharia. Dada a complexidade frente a realização de experimentos em escala nanométrica, abordagens como a simulação por dinâmica molecular (DM) e teorias do contínuo adequadamente estabelecidas têm sido utilizadas por diversos pesquisadores. Contudo, a simulação por DM demanda um elevado custo computacional, limitando sua utilização em casos práticos. Já as teorias do contínuo não local, que levam em consideração o efeito de nanoescala, têm se mostrado uma alternativa altamente atrativa. Entre elas, destaca-se a teoria da elasticidade não local proposta por Eringen (Eringen e Edelen, 1972; Eringen, 1983), que tem sido amplamente empregada na análise de nanoestruturas.

Entre os primeiros estudos a investigar sistemas de nanovigas duplas conectadas por meio elástico utilizando a teoria não local de Eringen destacam-se os trabalhos de Murmu e Adhikari (2010, 2011, 2012). Nesses trabalhos, a teoria não local foi empregada para analisar frequências naturais e instabilidade em sistemas com extremidades simplesmente apoiadas. Os autores constataram que os efeitos de nanoescala influenciam substancialmente tanto os modos de vibração quanto a estabilidade do sistema, com maior impacto nas vibrações em fase que nas fora de fase. Posteriormente, Stamenković *et al.* (2016) examinaram a influência de campos magnéticos externos atuando axialmente em sistemas de duplas paredes de nanotubos de carbono interligadas por camada elástica, desenvolvendo soluções analíticas para o cálculo das frequências naturais, razão de amplitude e resposta forçada em quatro distintos cenários de excitação. Paralelamente, Rahmani

et al. (2017a) dedicaram-se ao estudo da flambagem em sistemas de nanovigas compósitas. A análise de cargas móveis nesses sistemas também recebeu considerável atenção, conforme demonstrado nos estudos de Şimşek (2011), Hashemi e Khaniki (2018, 2017), Rahmani *et al.* (2017b) e Lü *et al.* (2015). Essas pesquisas adotaram consistentemente a teoria de vigas de Euler-Bernoulli em conjunto com o modelo de Winkler para descrever a cinemática de deformação do sistema de nanovigas elasticamente conectadas. Recentemente, Henrique *et al.* (2024) propuseram uma solução baseada no MEF para análise da flexão de sistemas de nanovigas duplas de Euler-Bernoulli conectadas por camada elástica de Pasternak.

Embora menos numerosos, existem trabalhos que incorporam efeitos de inércia rotatória e deformação por cisalhamento na abordagem não local de Eringen. Ahmadi (2022) investigou a influência dos efeitos de nanoescala na vibração livre de sistemas múltiplos de nanovigas conectadas elasticamente, analisando o comportamento do sistema sob diversas condições de contorno. Hosseini e Rahmani (2016) incorporaram efeitos de superfície no estudo da flambagem de nanovigas duplas conectadas, apresentando soluções exatas para o caso de apoios simples. Por sua vez, Faroughi *et al.* (2021) exploraram a vibração em sistemas de múltiplas nanovigas compósitas. Todos esses estudos adotaram o modelo de Winkler para representar a conexão elástica entre as nanovigas.

O presente trabalho tem como objetivo desenvolver uma formulação baseada no método dos elementos finitos para análise da flexão em sistemas de nanovigas duplas conectadas por camada elástica de Pasternak. A abordagem combina a teoria de vigas de Timoshenko com a elasticidade não local de Eringen para descrever a cinemática de deformação do sistema. Os resultados obtidos, quando comparados com dados disponíveis na literatura, demonstram a consistência e versatilidade da formulação proposta.

2. FORMULAÇÃO

O sistema duplo de vigas conectadas por camada elástica consiste em duas vigas prismáticas - uma superior e outra inferior - interligadas ao longo de todo seu comprimento L por uma camada elástica. A cinemática de deformação das nanovigas é descrita pela teoria de vigas de Timoshenko, que incorpora os efeitos de deformação por cisalhamento. A camada elástica adotada segue o modelo de Pasternak, caracterizada pelos parâmetros K (rigidez da mola) e K_p (coeficiente de cisalhamento).

De acordo com a teoria de vigas de Timoshenko, os campos de deslocamento são definidos por:

$$u = z\phi(x), \quad v = 0, \quad w = w(x), \quad (1)$$

onde u, w são os deslocamentos axial e transversal, respectivamente, e $\phi(x) = \phi$ refere-se à rotação da seção transversal. Por sua vez, considerando o regime de pequenas deformações, a deformação linear e a distorção da viga serão dadas, respectivamente, por:

$$\varepsilon_x = z \frac{d\phi}{dx}, \quad (2)$$

$$2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} = \phi + \frac{dw}{dx}. \quad (3)$$

Segundo a teoria de Timoshenko, as tensões de cisalhamento são consideradas uniformemente distribuídas ao longo da altura da viga, o que difere da distribuição real dessas tensões. Dessa forma, introduz-se um fator de correção κ , que ajusta a tensão cisalhante calculada para melhor aproximá-la dos valores reais.

A variação da energia potencial total do sistema duplo é dada por (Brito *et al.*, 2019):

$$\delta U = \int_V \sigma_{x_i} \delta \varepsilon_{x_i} + 2\sigma_{xz_i} \delta \varepsilon_{xz_i} dV + \int_L K (w_1 - w_2) (\delta w_1 - \delta w_2) + K_p \left(\frac{dw_1}{dx} - \frac{dw_2}{dx} \right) \left(\frac{d\delta w_1}{dx} - \frac{d\delta w_2}{dx} \right) dx, \quad (4)$$

onde σ_{x_i} é a tensão normal, σ_{xz_i} é a tensão cisalhante e o índice $i = 1, 2$ refere-se as vigas superior e inferior, respectivamente. Considerando as vigas sujeitas a carregamentos e momentos fletores distribuídos ao longo do seu comprimento, tem-se que a variação do trabalho das forças externas é dado por:

$$\delta W = \int_L g_i(x) w_i(x) dx + \int_L m_i(x) \phi_i(x) dx. \quad (5)$$

Considerando o princípio da energia potencial total mínima, $\delta U_{total} = \delta U - \delta W = 0$, após algumas integrações por partes e manipulações algébricas, obtém-se a equação de equilíbrio do sistema de vigas duplas conectadas por camada elástica de Pasternak:

$$\frac{dV_i}{dx} - f_i = 0, \quad (6)$$

$$\frac{dM_i}{dx} - V_i + m_i = 0, \quad (7)$$

onde $M_i = \int_A \sigma_{ix} z dA$ é o momento fletor em torno do eixo y , $V_i = \int_A \sigma_{ix} dA$ é o esforço cortante na direção z , $f_1 = K(w_1 - w_2) - K_p \left(\frac{d^2 w_1}{dx^2} - \frac{d^2 w_2}{dx^2} \right) - g_1$ e $f_2 = K(w_2 - w_1) - K_p \left(\frac{d^2 w_2}{dx^2} - \frac{d^2 w_1}{dx^2} \right) - g_2$. As condições de contorno consistem em especificar um elemento de cada um dos seguintes pares:

$$\begin{aligned} w_1 \text{ ou } V_1 + K_p \left(\frac{dw_1}{dx} - \frac{dw_2}{dx} \right) &= V_1^{eq}, \phi_1 \text{ ou } M_1, \\ w_2 \text{ ou } V_2 - K_p \left(\frac{dw_1}{dx} - \frac{dw_2}{dx} \right) &= V_2^{eq}, \phi_2 \text{ ou } M_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Note que, as equações de equilíbrio na forma como estão apresentadas, definidas em função dos esforços, são válidas tanto para as teorias locais como para as não locais.

2.1 Teoria da elasticidade não-local

Na teoria da elasticidade não local, a tensão em um ponto depende não apenas da deformação local, mas também das deformações em todos os demais pontos do corpo contínuo. Com base na teoria de Eringen, o tensor das tensões não local para um material elástico, homogêneo e isotrópico é expresso por (Eringen, 1983):

$$\sigma_{kl}(x) = \int_V \alpha(|x - x'|, \tau) \sigma_{kl}^c(x') dV(x'), \quad (9)$$

na qual α é a função kernel normalizada sobre todo o corpo (ou parâmetro não-local), $\tau = e_0 a / L$ é uma constante do material que depende dos comprimentos interno a e externo L e do parâmetro e_0 específico para cada material, e $\sigma_{kl}^c(x')$ é o tensor das tensões clássicas (ou locais), relacionado ao tensor das deformações lineares ε_{kl} pela lei de Hooke generalizada:

$$\sigma_{kl}^c = C_{klmn} \varepsilon_{kl}. \quad (10)$$

Na elasticidade linear não local, a equação de equilíbrio pode ser obtida por meio do balanço de forças não locais:

$$\sigma_{kl,k} + f_l = 0. \quad (11)$$

Substituindo a Eq. (9) na Eq. (11), obtém-se a forma integral da equação constitutiva não local. Escolhendo uma função kernel adequada, Eringen demonstrou que a equação constitutiva não local em sua forma integral pode ser representada por uma equação diferencial equivalente. Para o caso particular de vigas, essa relação é expressa por:

$$\left(1 - \mu \frac{d^2}{dx^2} \right) \sigma(x) = \sigma^c(x), \quad (12)$$

sendo $\mu = (e_0 a)^2$.

A partir da Eq. (12), podem-se estabelecer as seguintes relações entre os momentos fletores e esforços cortantes não locais e suas respectivas deformações:

$$M_i - \mu_i \frac{d^2 M_i}{dx^2} = E_i I_i \frac{d\phi_i}{dx}. \quad (13)$$

$$V_i - \mu_i \frac{d^2 V_i}{dx^2} = \kappa_i G_i A_i \left(\phi_i + \frac{dw_i}{dx} \right), \quad (14)$$

onde A_i é a área da seção transversal, I_i é o momento de inércia em torno do eixo y , E_i é o módulo de Young e G_i é o módulo de elasticidade transversal.

Com o auxílio das equações de equilíbrio, Eqs. (6) e (7), conclui-se que as expressões para o momento fletor e o esforço cortante são dadas por:

$$M_i = E_i I_i \frac{d\phi_i}{dx} + \mu_i f_i - \mu_i \frac{dm_i}{dx}, \quad (15)$$

$$V_i = \kappa_i G_i A_i \left(\phi_i + \frac{dw_i}{dx} \right) + \mu_i \frac{df_i}{dx}. \quad (16)$$

Substituindo as Eqs. (15) e (16) nas Eqs. (6) e (7), obtém-se a equação de equilíbrio do sistema de nanovigas duplas conectadas por camada elástica para o problema estático:

$$\kappa_i G_i A_i \left(\frac{d\phi_i}{dx} + \frac{d^2 w_i}{dx^2} \right) - f_i + \mu_i \frac{d^2 f_i}{dx^2} = 0, \quad (17)$$

$$E_i I_i \frac{d^2 \phi_i}{dx^2} - \kappa_i G_i A_i \left(\phi_i + \frac{dw_i}{dx} \right) + m_i - \mu_i \frac{d^2 m_i}{dx^2} = 0. \quad (18)$$

Note que, se $\mu_i = 0$, recai-se na equação de equilíbrio do sistema na teoria local. Alternativamente, pode-se expressar a equação na forma variacional:

$$\int_L E_i I_i \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\delta\phi_i}{dx} + \mu_i f_i \frac{d\delta\phi_i}{dx} - \mu_i \frac{dm_i}{dx} \frac{d\delta\phi_i}{dx} + \kappa_i G_i A_i \left(\phi_i + \frac{dw_i}{dx} \right) \left(\delta\phi_i + \frac{d\delta w_i}{dx} \right) + \mu_i \frac{df_i}{dx} \left(\delta\phi_i + \frac{d\delta w_i}{dx} \right) dx + \int_L K (w_1 - w_2) (\delta w_1 - \delta w_2) + K_p \left(\frac{dw_1}{dx} - \frac{dw_2}{dx} \right) \left(\frac{d\delta w_1}{dx} - \frac{d\delta w_2}{dx} \right) dx - [\overline{M}_i \delta\phi_i]_0^L - [\overline{V}_i^{eq} \delta w_i]_0^L = 0, \quad (19)$$

sendo as condições de contorno dadas por:

$$\begin{aligned} E_i I_i \frac{d\phi_i}{dx} + \mu_i f_i - \mu_i \frac{dm_i}{dx} - \overline{M}_i &= 0, \\ \kappa_1 G_1 A_1 \left(\phi_1 + \frac{dw_1}{dx} \right) + \mu_1 \frac{df_1}{dx} + K_p \left(\frac{dw_1}{dx} - \frac{dw_2}{dx} \right) - \overline{V}_1^{eq} &= 0, \\ \kappa_2 G_2 A_2 \left(\phi_2 + \frac{dw_2}{dx} \right) + \mu_2 \frac{df_2}{dx} - K_p \left(\frac{dw_1}{dx} - \frac{dw_2}{dx} \right) - \overline{V}_2^{eq} &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

2.2 Formulação em elementos finitos

Os campos de deslocamento e rotação adotados neste trabalho seguem a mesma formulação da viga de Timoshenko sem camada elástica. Dessa forma, essas variáveis são expressas em função dos deslocamentos nodais e das funções de forma, conforme estabelecido por:

$$\begin{aligned} w_1(\xi) &= N_1^1 d_1 + N_2^1 d_2 + N_3^1 d_3 + N_4^1 d_4 = [N^1] \{u_1\}, \quad \phi_1(\xi) = \hat{N}_1^1 d_1 + \hat{N}_2^1 d_2 + \hat{N}_3^1 d_3 + \hat{N}_4^1 d_4 = [\hat{N}^1] \{u_1\}, \\ w_2(\xi) &= N_1^2 d_5 + N_2^2 d_6 + N_3^2 d_7 + N_4^2 d_8 = [N^2] \{u_2\}, \quad \phi_2(\xi) = \hat{N}_1^2 d_5 + \hat{N}_2^2 d_6 + \hat{N}_3^2 d_7 + \hat{N}_4^2 d_8 = [\hat{N}^2] \{u_2\}, \end{aligned} \quad (21)$$

sendo as funções intepoladoras definidas por:

$$\begin{aligned} N_1^i &= \Psi_i (\xi - 1) (\xi^2 + \xi - 6\beta_i - 2), \quad N_2^i = -\alpha \Psi_i (\xi^2 - 1) (-\xi + 3\beta_i + 1), \\ N_3^i &= \Psi_i (\xi + 1) (-\xi^2 + \xi + 6\beta_i + 2), \quad N_4^i = \alpha \Psi_i (\xi^2 - 1) (\xi + 3\beta_i + 1), \\ \hat{N}_1^i &= 3\Psi_i (\xi^2 - 1) / \alpha, \quad \hat{N}_2^i = \Psi_i (\xi - 1) (3\xi - 6\beta_i + 1), \\ \hat{N}_3^i &= 3\Psi_i (1 - \xi^2) / \alpha, \quad \hat{N}_4^i = \Psi_i (\xi + 1) (3\xi + 6\beta_i + 1), \end{aligned} \quad (22)$$

onde $\Psi_i = 1/4 (1 + 3\beta_i)$, $\beta_i = \kappa_i G_i A_i / E_i I_i \alpha^2$, $\alpha = L/2$ e $-1 \leq \xi \leq 1$.

Com base na Eq. (19), escreve-se a forma variacional discretizada:

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 \left\{ [\hat{B}^1]^T E_1 I_1 [\hat{B}^1] + [NB^1]^T \kappa_1 G_1 A_1 [NB^1] + [\hat{B}^2]^T E_2 I_2 [\hat{B}^2] + [NB^2]^T \kappa_2 G_2 A_2 [NB^2] \right\} J d\xi \\ &+ \int_{-1}^1 \left\{ [NN]^T K [NN] + [BB]^T K_p [BB] + [B_\mu]^T \{K [NN] - K_p [DD]\} \right\} J d\xi \\ &+ \int_{-1}^1 \left\{ [NB_\mu]^T (K [BB] - K_p [PP]) - \mu_1 [\hat{B}^1]^T g_1 - \mu_2 [\hat{B}^2]^T g_2 \right\} J d\xi \\ &+ \int_{-1}^1 \left\{ -\mu_1 [NB^1]^T \frac{dg_1}{dx} - \mu_2 [NB^2]^T \frac{dg_2}{dx} - \mu_1 [\hat{B}^1]^T \frac{dm_1}{dx} - \mu_2 [\hat{B}^2]^T \frac{dm_2}{dx} \right\} J d\xi = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

onde $[B^i] = (d[N^i]/d\xi)(d\xi/dx)$, $[\hat{B}^i] = (d[\hat{N}^i]/d\xi)(d\xi/dx)$, $[D^i] = (d^2[N^i]/d\xi^2)(d\xi/dx)^2$, $[P^i] = (d^3[N^i]/d\xi^3)(d\xi/dx)^3$, $[NB^i] = [\hat{N}^i] + [B^i]$, $[NN] = [N^1] - [N^2]$, $[BB] = [B^1] - [B^2]$, $[B_\mu] = \mu_1 [\hat{B}^1] - \mu_2 [\hat{B}^2]$, $[DD] = [D^1] - [D^2]$, $[NB_\mu] = \mu_1 [NB^1] - \mu_2 [NB^2]$, $[PP] = [P^1] - [P^2]$.

Resolvendo todas as integrais da Eq. (23), pode-se escrever o sistema algébrico do MEF da seguinte forma:

$$[K] \{U\} = \{F\}, \quad (24)$$

onde $[K]$ é a matriz de rigidez, $\{F\}$ é o vetor de cargas nodais equivalentes e $\{U\}$ é o vetor dos deslocamentos nodais. A forma explícita de cada um deles é apresentada na sequência:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}, \{U\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \{F\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}, \quad (25)$$

sendo

$$\begin{aligned} [K_{11}] &= [k_{nv1}] + K \{ [W(\beta_1, \beta_1)] + \mu_1 [W^{nl}(\beta_1, \beta_1)] \} + K_p \{ [P(\beta_1, \beta_1)] + \mu_1 [P^{nl}(\beta_1)] \}, \\ [K_{12}] &= -K \{ [W(\beta_1, \beta_2)] + \mu_1 [W^{nl}(\beta_1, \beta_2)] \} - K_p \{ [P(\beta_1, \beta_2)] + \mu_1 [P^{nl}(\beta_2)] \}, \\ [K_{21}] &= -K \{ [W(\beta_2, \beta_1)] + \mu_1 [W^{nl}(\beta_2, \beta_1)] \} - K_p \{ [P(\beta_2, \beta_1)] + \mu_1 [P^{nl}(\beta_1)] \}, \\ [K_{22}] &= [k_{nv2}] + K \{ [W(\beta_2, \beta_2)] + \mu_2 [W^{nl}(\beta_2, \beta_2)] \} + K_p \{ [P(\beta_2, \beta_2)] + \mu_2 [P^{nl}(\beta_2)] \}. \end{aligned} \quad (26)$$

A matriz de rigidez associada às vigas superior e inferior é dada por:

$$[k_{nvi}] = \frac{E_i I_i}{2\alpha^3 (3\beta_i + 1)} \begin{bmatrix} 3 & -3\alpha & -3 & -3\alpha \\ -3\alpha & \alpha^2 (3\beta_i + 4) & 3\alpha & -\alpha^2 (3\beta_i - 2) \\ -3 & 3\alpha & 3 & 3\alpha \\ -3\alpha & -\alpha^2 (3\beta_i - 2) & 3\alpha & \alpha^2 (3\beta_i + 4) \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Já a parcela da matriz de rigidez associada à camada elástica de Pasternak é dada por:

$$[W(\chi, \lambda)] = \Psi \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_4 & p_5 \\ p_2 & p_3 & -p_5 & p_6 \\ p_4 & -p_5 & p_1 & -p_2 \\ p_5 & p_6 & -p_2 & p_3 \end{bmatrix}, [P(\chi, \lambda)] = \Lambda \begin{bmatrix} p_7 & p_8 & -p_7 & p_8 \\ p_8 & p_9 & -p_8 & -p_{10} \\ -p_7 & -p_8 & p_7 & -p_8 \\ p_8 & -p_{10} & -p_8 & p_9 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

onde $\Psi = 1/[210(3\chi + 1)(3\lambda + 1)]$, $\Lambda = 1/[30\alpha(3\chi + 1)(3\lambda + 1)]$ e cujos coeficientes são dados por:

$$\begin{aligned} p_1 &= 3\alpha(147\chi + 147\lambda + 420\chi\lambda + 52), p_2 = -\alpha^2(105\chi + 126\lambda + 315\chi\lambda + 44), \\ p_3 &= 2\alpha^3(21\chi + 21\lambda + 63\chi\lambda + 8), p_4 = 9\alpha(21\chi + 21\lambda + 70\chi\lambda + 6), \\ p_5 &= \alpha^2(105\chi + 84\lambda + 315\chi\lambda + 26), p_6 = -6\alpha^3(7\chi + 7\lambda + 21\chi\lambda + 2) \\ p_7 &= 45\chi + 45\lambda + 135\chi\lambda + 18, p_8 = -3\alpha, p_9 = \alpha^2(15\chi + 15\lambda + 45\chi\lambda + 8), \\ p_{10} &= \alpha^2(15\chi + 15\lambda + 45\chi\lambda + 2). \end{aligned} \quad (29)$$

Finalmente, as matrizes associadas ao efeito não local são dadas por:

$$[W^{nl}(\chi, \lambda)] = \Lambda \begin{bmatrix} q_1 & q_3 & -q_1 & q_3 \\ q_2 & q_4 & -q_3 & -q_5 \\ -q_1 & -q_3 & q_1 & -q_3 \\ q_3 & -q_5 & -q_2 & q_4 \end{bmatrix}, [P^{nl}(\chi)] = \Xi \begin{bmatrix} 3 & -3\alpha & -3 & -3\alpha \\ -3\alpha & q_6 & 3\alpha & q_7 \\ -3 & 3\alpha & 3 & 3\alpha \\ -3\alpha & q_7 & 3\alpha & q_6 \end{bmatrix} \quad (30)$$

onde $\Xi = \frac{1}{2\alpha^3(3\chi+1)}$ e ainda

$$\begin{aligned} q_1 &= 45\chi + 45\lambda + 135\chi\lambda + 18, q_2 = -3\alpha(30\chi + 30\lambda + 90\chi\lambda + 11), q_4 = \alpha^2(15\chi + 15\lambda + 45\chi\lambda + 8), \\ q_3 &= -3\alpha, q_5 = -3\alpha^2(15\chi + 15\lambda + 45\chi\lambda + 2), q_6 = \alpha^2(3\chi + 4), q_7 = -\alpha^2(3\chi - 2). \end{aligned} \quad (31)$$

Considerando um carregamento distribuído com variação linear ao longo do comprimento das nanovigas superior e/ou inferior, temos:

$$f_i = \frac{1}{3\alpha(3\beta_i + 1)} \begin{bmatrix} (60\beta_i + 21)\alpha^2 + (45\beta_i + 15)\mu_i & (30\beta_i + 9)\alpha^2 - (45\beta_i + 15)\mu_i \\ -(15\beta_i + 6)\alpha^3 - (90\beta_i + 30)\mu_i\alpha & -(15\beta_i + 4)\alpha^3 \\ (30\beta_i + 9)\alpha^2 - (45\beta_i + 15)\mu_i & (60\beta_i + 21)\alpha^2 + (45\beta_i + 15)\mu_i \\ (15\beta_i + 4)\alpha^3 & (15\beta_i + 6)\alpha^3 + (90\beta_i + 30)\mu_i\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_i(0) \\ g_i(L) \end{Bmatrix}. \quad (32)$$

Tabela 1. Deslocamentos e rotações adimensionais máximos

$\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2$	Resposta	2 Elem.	4 Elem.	8 Elem.	10 Elem.	Ref.
1	$\bar{w}_1 \cdot 10^{-2}$	7.1610	7.2242	7.2428	7.2449	7.1510
	$\bar{\phi}_1 \cdot 10^{-1}$	3.0398	3.2152	3.3071	3.3224	3.0306
	$\bar{w}_2 \cdot 10^{-2}$	6.8661	6.8029	6.7843	6.7822	6.6510
	$\bar{\phi}_2 \cdot 10^{-1}$	2.3769	2.2014	2.1096	2.0943	2.3860
2	$\bar{w}_1 \cdot 10^{-1}$	1.3389	1.3460	1.3490	1.3493	1.3401
	$\bar{\phi}_1 \cdot 10^{-1}$	5.5943	5.9108	6.1231	6.1638	5.6272
	$\bar{w}_2 \cdot 10^{-1}$	1.3138	1.3067	1.3037	1.3034	1.2901
	$\bar{\phi}_2 \cdot 10^{-1}$	4.8224	4.5059	4.2936	4.2529	4.7895
3	$\bar{w}_1 \cdot 10^{-1}$	1.9629	1.9701	1.9737	1.9742	1.9651
	$\bar{\phi}_1 \cdot 10^{-1}$	8.1179	8.5256	8.8376	8.9022	8.1855
	$\bar{w}_2 \cdot 10^{-1}$	1.9398	1.9326	1.9290	1.9285	1.9151
	$\bar{\phi}_2 \cdot 10^{-1}$	7.2988	6.8910	6.5790	6.5145	7.2312
4	$\bar{w}_1 \cdot 10^{-1}$	2.5873	2.5944	2.5985	2.5991	2.5901
	$\bar{\phi}_1$	1.0631	1.1102	1.1493	1.1579	1.0725
	$\bar{w}_2 \cdot 10^{-1}$	2.5654	2.5583	2.5542	2.5536	2.5401
	$\bar{\phi}_2 \cdot 10^{-1}$	9.7856	9.3149	8.9232	8.8381	9.6913
5	$\bar{w}_1 \cdot 10^{-1}$	3.2120	3.2189	3.2234	3.2240	3.2151
	$\bar{\phi}_1$	1.3139	1.3656	1.4112	1.4215	1.3255
	$\bar{w}_2 \cdot 10^{-1}$	3.1907	3.1838	3.1794	3.1787	3.1651
	$\bar{\phi}_2$	1.2277	1.1761	1.1305	1.1202	1.2162

3. EXEMPLOS

Considere um sistema de nanovigas duplas, simplesmente apoiadas, com seção transversal de dimensões b, h e comprimento L , conectadas por uma camada elástica cujos coeficientes normalizados são dados por: $\bar{K} = 100$ e $\bar{K}_p = 0, 1$. Considere ainda que ambas as nanovigas são idênticas e que uma carga uniformemente distribuída atua apenas ao longo da nanoviga superior g_1 . Os deslocamentos máximos adimensionais foram calculados para diferentes valores do parâmetro não local, conforme apresentado na Tab. 1, enquanto a análise do comportamento do sistema, em função dos parâmetros da fundação elástica, é mostrada na Fig. 1. Os parâmetros adimensionais são dados por: $\bar{K} = KL^4/E_1I_1$, $\bar{K}_p = K_pL^2/E_1I_1$, $\bar{\mu}_i = \mu_i/L^2$, $\bar{w}_i = w_iE_iI_i/g_iL^4$, $\bar{\phi}_i = \phi_iE_iI_i/g_iL^3$ e $g_2 = \beta g_1$.

Os resultados apresentados na Tab. 1, em termos de deslocamentos e rotações máximas adimensionais, foram comparados com os obtidos por Henrique *et al.* (2024), considerando a teoria de vigas de Euler-Bernoulli, com uma relação $h/L = 0,3$. Observa-se que os resultados deste trabalho aproximam-se significativamente dos resultados de referência, embora no trabalho citado não se considere a deformação por cisalhamento. Verifica-se ainda uma convergência dos valores obtidos. Mesmo com o aumento do fator de escala, o erro relativo em relação à referência mantém-se consistente, sendo as maiores discrepâncias observadas nas rotações.

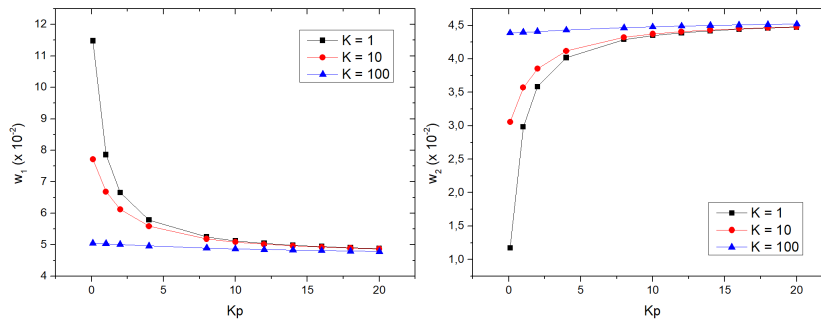


Figura 1. Deslocamentos máximos nas vigas superior e inferior, considerando $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 = 1$

A influência da variação dos parâmetros da camada elástica no deslocamento das nanovigas, considerando $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 = 1$, é mostrada na Fig. 1. Como pode ser observado, embora os deslocamentos $\bar{w}_1$ diminuam à medida que $\bar{K}_p$ aumenta, o efeito de $\bar{K}$ é mais significativo. À medida que $\bar{K}$ assume valores elevados, a influência do $\bar{K}_p$ torna-se limitada a partir de determinado valor. Quando $\bar{K}_p = 0$, registram-se os deslocamentos máximos. Comportamento análogo é verificado para os deslocamentos $\bar{w}_2$.

4. CONCLUSÕES

Neste trabalho, desenvolveu-se uma formulação baseada no Método dos Elementos Finitos para análise da flexão em sistemas de nanovigas duplas elasticamente conectadas por camada elástica de Pasternak. A partir das hipóteses de Timoshenko associadas à teoria não local de Eringen, derivaram-se explicitamente a matriz de rigidez do sistema e o vetor de cargas nodais. A formulação proposta foi validada por meio de exemplos numéricos que demonstraram resultados satisfatórios, evidenciando uma abordagem eficiente, versátil e com potencial para aplicações práticas.

5. AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

6. REFERÊNCIAS

- Ahmadi, I., 2022. “Free vibration of multiple-nanobeam system with nonlocal timoshenko beam theory for various boundary conditions”. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 143, pp. 719–739.
- Brito, W.K.F., Maciel, W.G.M., Pereira, A.C. and Mendonça, A.V., 2019. “Fem analysis of a timoshenko double-beam system with a pasternak inner layer”. In *Proceedings of the XL Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, ABMEC*. Natal - RN, Brasil. URL <https://cilamce.com.br/anais/arearestrita/apresentacoes/128/6330.pdf>.
- Eringen, A.C., 1983. “On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves”. *Journal of applied physics*, Vol. 54, No. 9, pp. 4703–4710.
- Eringen, A. and Edelen, D., 1972. “On nonlocal elasticity”. *International Journal of Engineering Science*, Vol. 10, No. 3, pp. 233–248. ISSN 0020-7225.
- Faroughi, S., Sari, M. and Abdelkefi, A., 2021. “Nonlocal timoshenko representation and analysis of multi-layered functionally graded nanobeams”. *Microsystem Technologies*, Vol. 27, pp. 893–911.
- Hashemi, S.H. and Khaniki, H.B., 2017. “Dynamic behavior of multi-layered viscoelastic nanobeam system embedded in a viscoelastic medium with a moving nanoparticle”. *Journal of Mechanics*, Vol. 33, No. 5, pp. 559–575.
- Hashemi, S.H. and Khaniki, H.B., 2018. “Dynamic response of multiple nanobeam system under a moving nanoparticle”. *Alexandria engineering journal*, Vol. 57, No. 1, pp. 343–356.
- Henrique, G.L., Mendonça, A.V., Siqueira, A.C.F., Pereira, A.C., Brito, W.K.F. and do Nascimento Júnior, P.C., 2024. “Finite element analysis of double nanobeams having pasternak foundation in between”. In *Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE)*.
- Hosseini, S. and Rahmani, O., 2016. “Surface effects on buckling of double nanobeam system based on nonlocal timoshenko model”. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 16, No. 10, p. 1550077.
- Lü, L., Hu, Y. and Wang, X., 2015. “Forced vibration of two coupled carbon nanotubes conveying lagged moving nanoparticles”. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 68, pp. 72–80.
- Murmu, T. and Adhikari, S., 2010. “Nonlocal transverse vibration of double-nanobeam-systems”. *Journal of Applied Physics*, Vol. 108, No. 8, p. 083514. ISSN 0021-8979.
- Murmu, T. and Adhikari, S., 2011. “Axial instability of double-nanobeam-systems”. *Physics Letters A*, Vol. 375, No. 3, pp. 601–608. ISSN 0375-9601.
- Murmu, T. and Adhikari, S., 2012. “Nonlocal elasticity based vibration of initially pre-stressed coupled nanobeam systems”. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 34, pp. 52–62. ISSN 0997-7538.
- Rahmani, O., Hosseini, S. and Parhizkari, M., 2017a. “Buckling of double functionally-graded nanobeam system under axial load based on nonlocal theory: an analytical approach”. *Microsystem Technologies*, Vol. 23, pp. 2739–2751.
- Rahmani, O., Norouzi, S., Golmohammadi, H. and Hosseini, S., 2017b. “Dynamic response of a double, single-walled carbon nanotube under a moving nanoparticle based on modified nonlocal elasticity theory considering surface effects”. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 24, No. 15, pp. 1274–1291.
- Şimşek, M., 2011. “Nonlocal effects in the forced vibration of an elastically connected double-carbon nanotube system under a moving nanoparticle”. *Computational Materials Science*, Vol. 50, No. 7, pp. 2112–2123. ISSN 0927-0256.
- Stamenković, M., Karličić, D., Goran, J. and Kozić, P., 2016. “Nonlocal forced vibration of a double single-walled carbon nanotube system under the influence of an axial magnetic field”. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, Vol. 11, No. 3, pp. 279–307.

7. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.