

Estudo Numérico de Ondas Não Lineares em Metamateriais Formados por Vigas Pós-Flambadas

Lucas José Dantas Alcântara, lucasjosedantas@usp.br¹
Leopoldo Pisanelli Rodrigues de Oliveira, leopro@sc.usp.br¹

¹Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos

Resumo. Este trabalho investiga numericamente a formação de ondas estacionárias não lineares em uma cadeia de vigas biapoeadas em regime de pós-flambagem, acopladas por elementos elásticos. A modelagem do sistema é realizada com base na equação de oscilação transversal de uma viga não linear sujeita a cargas axiais, posteriormente reduzida a uma equação modal e, então, à Equação de Schrödinger Não Linear (NLSE), por meio do método das múltiplas escalas. A solução da NLSE é comparada à resposta obtida diretamente da equação modal, demonstrando que, apesar da omissão de termos de ordem superior na expansão perturbativa, a equação reduzida representa com precisão a dinâmica da estrutura. Também é mostrado que o parâmetro de amplitude de pós-flambagem influencia a resposta do sistema, o que permite sua utilização como parâmetro de ajuste no projeto da estrutura. Os resultados reforçam a aplicabilidade da abordagem ondulatória na modelagem de metamateriais com propriedades dinâmicas ajustáveis, ao mesmo tempo em que expandem essa formulação para o contexto de elementos estruturais em regime de pós-flambagem.

Palavras chave: Metamateriais. Não Linear. Pós-Flambagem. Equação de Schrödinger Não Linear. Múltiplas Escalas

Abstract. This work numerically investigates the creation of nonlinear standing waves in a chain of simply supported beams operating in the post-buckling regime, coupled through elastic elements. The system is modeled based on the transverse vibration equation of a nonlinear beam subjected to axial loads, which is subsequently reduced to a modal equation and, then, to the Nonlinear Schrödinger Equation (NLSE) via the method of multiple scales. The solution of the NLSE is compared to the response obtained directly from the modal equation, demonstrating that, despite the omission of higher-order terms in the perturbative expansion, the reduced equation accurately captures the structure's dynamics. It is also shown that the post-buckling amplitude parameter influences the system's response, allowing it to be used as a tuning parameter in the design of the structure. The results reinforce the applicability of the wave-based approach in modeling metamaterials with tunable dynamic properties, while also extending this formulation to the context of structural elements in the post-buckling regime.

Keywords: Metamaterials. Nonlinear. Post-buckling. Nonlinear Schrödinger Equation. Multiple Scales

1. INTRODUÇÃO

Metamateriais não lineares têm ganhado destaque na pesquisa científica por possibilitarem a ocorrência de fenômenos ondulatórios que superam as limitações de estruturas lineares, proporcionando *bandgaps* mais amplos ou profundos (Fang *et al.*, 2024). Especificamente, a dinâmica não linear tem sido explorada para o aprimoramento do controle de vibrações, conforme evidenciado em estudos recentes (Yang *et al.*, 2024; Sun *et al.*, 2025; Shen *et al.*, 2025; Tian *et al.*, 2025; Zhao *et al.*, 2024). Destacam-se os trabalhos de Xue *et al.* (2025) e Zhao *et al.* (2023), que propõem metamateriais adaptativos com capacidade de modulação dos *bandgaps* a partir da variação de parâmetros físicos. No primeiro caso, um elastômero magnetorreológico é utilizado para controlar uma rigidez variável via campo magnético externo. Já no segundo, a introdução de folgas entre o ressonador e limitadores rígidos dá origem a um sistema de osciladores bilineares, cuja não linearidade permite ajustar o *bandgap* por meio da variação dessa folga.

Uma abordagem alternativa para o estudo das oscilações em metamateriais considera a equivalência entre movimento oscilatório e propagação de ondas, como adotado em Fontanela *et al.* (2018); Barbosa *et al.* (2025); Grolet *et al.* (2016). Essa perspectiva é adotada por Barbosa *et al.* (2024), que apresentam uma metodologia de projeto baseada na Equação de Schrödinger Não Linear (NLSE) para descrever a dinâmica de cadeias de osciladores acoplados sob excitação externa. A modelagem assume uma hipótese de continuidade espacial nos deslocamentos, o que é válido quando para um dado comprimento o sistema possui um número suficiente de osciladores com força de interação entre eles também suficiente. A estabilidade das soluções obtidas pela NLSE sob diferentes formas de excitação tem sido abordada na literatura (Barashenkov and Smirnov, 1996; Jallouli *et al.*, 2017) e deve ser considerada no contexto do projeto, uma vez que instabilidades podem comprometer a formação sustentada de modos localizados. Ademais, essa abordagem permite o controle da posição, intensidade e extensão espacial da região de concentração vibracional ao longo da cadeia, o que pode ser

explorado em aplicações práticas de isolamento estrutural e controle passivo de vibrações.

Dado o avanço dos metamateriais com capacidade de modulação e a abordagem ondulatória para descrever seu movimento, este trabalho propõe um metamaterial cujas células unitárias são vigas em regime de pós-flambagem, cujas propriedades físicas dependem da carga axial imposta, permitindo, assim, a modulação do sistema. A equação da Schrödinger Não Linear (NLSE) é derivada para descrever a oscilação das vigas, sendo comparada com resultados numéricos obtidos a partir das equações diferenciais ordinárias (EDOs) em coordenadas modais.

2. METODOLOGIA

2.1 DESCRIÇÃO DO SISTEMA

O metamaterial ilustrado na Fig.1b é composto por vigas biapoiadas acopladas entre si por elementos de mola localizados em suas regiões centrais. As vigas encontram-se em configuração pós-flambagem (vide Fig.1a), ou seja, estão submetidas a cargas axiais de compressão superiores à carga crítica de flambagem.

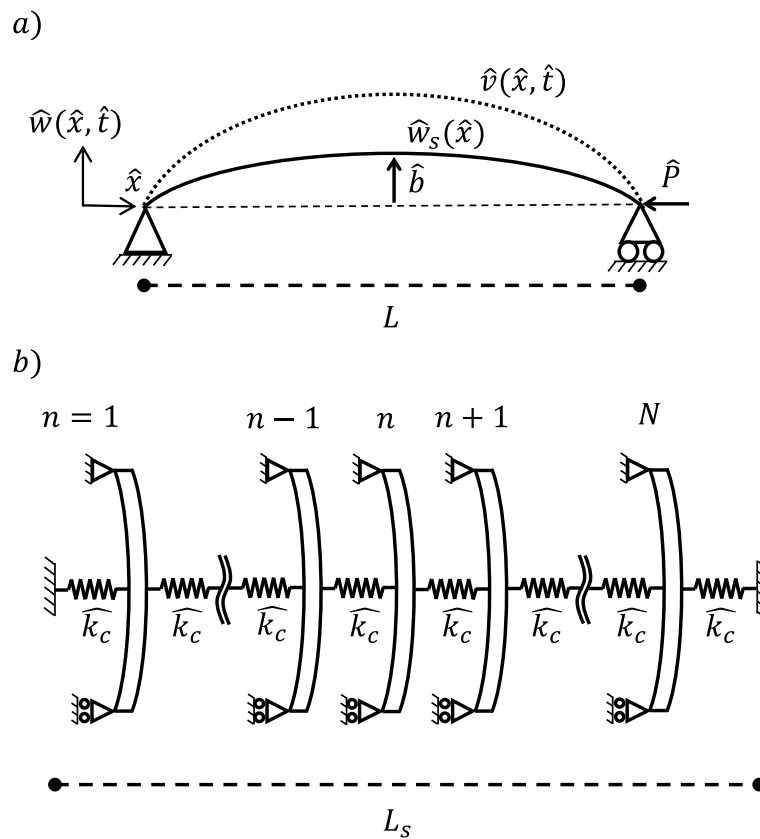


Figura 1. a) viga em flambagem sujeita à carga P , com destaque para os deslocamentos estático $\hat{w}_s(\hat{x})$ e dinâmico $\hat{v}(\hat{x}, \hat{t})$ que compõem o deslocamento $\hat{w}(\hat{x})$ da viga. b) arranjo de vigas no metamaterial.

Cada viga é modelada por uma Equação Diferencial Parcial (EDP), dependente da posição $\hat{x}$ e do tempo $\hat{t}$, sendo essas equações acopladas por meio dos elementos de mola. Para a análise, são adotados parâmetros de adimensionalização, a partir dos quais se obtém uma forma reduzida da EDP. Com essa equação adimensional, realiza-se uma análise estática a fim de determinar a configuração pós-flambagem do sistema. Em seguida, por meio de uma decomposição em bases modais, considerando apenas um modo, a EDP é reduzida a uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) em coordenadas modais. A essa EDO aplica-se o método das múltiplas escalas, resultando em uma equação algébrica que descreve as amplitudes da resposta. Com base em uma hipótese de continuidade, obtém-se a NLSE (*Nonlinear Schrödinger Equation*), que governa a propagação de ondas não lineares no sistema e a formação de ondas estacionárias em regime permanente. Por convenção, grandezas com um acento circunflexo ($\hat{}$) são dimensionais, enquanto suas contrapartes sem acento são adimensionais.

2.2 MODELO ANALÍTICO

A equação que descreve a n -ésima viga é

$$EI \frac{\partial^4}{\partial \hat{x}^4} \hat{w}_n(\hat{x}, \hat{t}) + 2\hat{\zeta} \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \hat{w}_n(\hat{x}, \hat{t}) - \frac{EA}{2L} \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \hat{w}_n(\hat{x}, \hat{t}) \int_0^L \left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}} \hat{w}_n(\hat{x}, \hat{t}) \right)^2 d\hat{x} + \hat{P} \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \hat{w}_n(\hat{x}, \hat{t}) + \hat{k}_c \left(2\hat{w}_n(\hat{x}, \hat{t}) - \hat{w}_{n-1}(\hat{x}, \hat{t}) - \hat{w}_{n+1}(\hat{x}, \hat{t}) \right) \delta \left(\hat{x} - \frac{L}{2} \right) + m \frac{\partial^2}{\partial \hat{t}^2} \hat{w}_n(\hat{x}, \hat{t}) = \hat{F} \cos(\hat{\Omega} \hat{t}), \quad (1)$$

com condições de contorno para vigas biapoimadas

$$\begin{aligned} \hat{w}_n(0, \hat{t}) = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \hat{w}_n(\hat{x}, \hat{t})}{\partial \hat{x}^2} \right|_{\hat{x}=0} &= 0, \\ \hat{w}_n(L, \hat{t}) = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 \hat{w}_n(\hat{x}, \hat{t})}{\partial \hat{x}^2} \right|_{\hat{x}=L} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

na qual, E é o módulo de Young do material, I é o momento de inércia da seção transversal da viga, $\hat{\zeta}$ é um fator de amortecimento genérico, A é a área da seção transversal da viga, L é o comprimento da viga, $\hat{P}$ é a carga axial de compressão aplicada ao sistema, $\hat{k}_c$ é a constante elástica da mola de acoplamento, $\delta(\hat{x} - \frac{L}{2})$ é a função delta de Dirac deslocada em $\frac{L}{2}$, m é a massa por unidade de comprimento da viga, $\hat{F}$ é a amplitude da força de excitação, $\hat{\Omega}$ é a frequência da excitação, e os índices n do deslocamento $\hat{w}_n$ indicam a viga correspondente ao deslocamento.

Introduzindo os seguintes parâmetros adimensionalizadores

$$\begin{aligned} x = \frac{\hat{x}}{L}, \quad r = \sqrt{\frac{I}{A}}, \quad w_n(x, t) = \frac{\hat{w}_n(\hat{x}, \hat{t})}{r}, \quad t = \hat{t} \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}, \quad \Omega = \frac{\hat{\Omega}}{\sqrt{\frac{EI}{mL^4}}}, \\ P = \hat{P} \frac{L^2}{EI}, \quad \zeta = \hat{\zeta} \sqrt{\frac{L^4}{EI m}}, \quad F = \hat{F} \frac{L^4}{EI r}, \quad k_c = \hat{k}_c \frac{L^4}{EI}, \end{aligned} \quad (3)$$

a Eq.(1) se torna

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4}{\partial x^4} w_n(x, t) + 2\zeta \frac{\partial}{\partial t} w_n(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_n(x, t) \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} w_n(x, t) \right)^2 dx + P \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_n(x, t) \\ + k_c \left(2w_n(x, t) - w_{n-1}(x, t) - w_{n+1}(x, t) \right) \delta \left(x - \frac{1}{2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} w_n(x, t) = F \cos(\Omega t), \end{aligned} \quad (4)$$

com condições de contorno

$$\begin{aligned} w_n(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 w_n(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=0} &= 0, \\ w_n(1, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 w_n(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=1} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

O deslocamento $w(x, t)$ é decomposto na soma de suas componentes de deslocamento dinâmico $v(x, t)$ e estático $w_s(x)$, com

$$w_s(x) = b \sin(\pi x), \quad (6)$$

sendo b o valor do deslocamento estático na metade do comprimento, que se relaciona com a carga axial P por meio da seguinte relação

$$b^2 = \frac{4(P - P_{cr})}{\pi^2}, \quad (7)$$

e $P_{cr} = \pi^2$ é a primeira carga crítica de flambagem para a viga biapoiada.

Assim, a Eq.(4) se torna

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4}{\partial x^4} v_n(x, t) + 2\zeta \frac{\partial}{\partial t} v_n(x, t) + \pi^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_n(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} v_n(x, t) + \pi^3 b^2 \sin(\pi x) \int_0^1 \cos(\pi x) \frac{\partial}{\partial x} v_n(x, t) dx \\ & - \pi b \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_n(x, t) \int_0^1 \cos(\pi x) \frac{\partial}{\partial x} v_n(x, t) dx - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_n(x, t) \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} v_n(x, t) \right)^2 dx \quad (8) \\ & + \frac{\pi^2 b}{2} \sin(\pi x) \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} v_n(x, t) \right)^2 dx + k_c \delta \left(x - \frac{1}{2} \right) (2v_n(x, t) - v_{n-1}(x, t) - v_{n+1}(x, t)) = F \cos(\Omega t), \end{aligned}$$

com condições de contorno

$$\begin{aligned} v_n(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 v_n(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=0} &= 0, \\ v_n(1, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 v_n(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=1} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

A partir da discretização em bases modais, v_n é reescrito como produto do modo de vibrar $\psi(x)$ e da coordenada modal $\eta(t)$, sendo

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sin(\pi x), \quad (10)$$

o primeiro modo de vibrar para uma viga biapoiada em condição de pós-flambagem, com $\omega_1 = \frac{b\pi^2}{\sqrt{2}}$. Assim, a Eq.(8) é reescrita em coordenadas modais,

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \eta_n(t) + \omega_1^2 \eta_n(t) + \frac{3\sqrt{2}\pi^4 b}{4} \eta_n^2(t) + \frac{\pi^4}{2} \eta_n^3(t) + 2\zeta \frac{d}{dt} \eta_n(t) \\ & + 2k_c (2\eta_n(t) - \eta_{n-1}(t) - \eta_{n+1}(t)) = \frac{2\sqrt{2}F}{\pi} \cos(\Omega t). \end{aligned} \quad (11)$$

Para utilizar o método das múltiplas escalas, os termos são expressos em perturbações de ε até terceira ordem,

$$\begin{aligned} F &= F_\varepsilon \varepsilon^3, \quad \zeta = \zeta_\varepsilon \varepsilon^2, \quad k_c = k_{c\varepsilon} \varepsilon^2, \quad \Omega = \omega_1 - \varepsilon^2, \\ \eta_n(t) &= \eta_{n1}(T_0, T_1, T_2) \varepsilon + \eta_{n2}(T_0, T_1, T_2) \varepsilon^2 + \eta_{n3}(T_0, T_1, T_2) \varepsilon^3, \\ T_k &= t \varepsilon^k \quad k = 0, 1, 2, \end{aligned} \quad (12)$$

de modo que T_k é o tempo perturbado em ε^k na ordem k e η_{nk} é a coordenada modal da viga n perturbada em ε na ordem k . Recolhendo termos de mesma ordem, e eliminando termos seculares, é obtida a expressão para $\eta_n(t)$ e a equação da amplitude da onda

$$\eta_n(t) = 2\varepsilon |A_n(T_2)| \cos(\omega_1 T_0 - \phi) + \varepsilon^2 \frac{\sqrt{2}}{b} |A_n(T_2)|^2 (\cos(2\omega_1 T_0 - 2\phi) - 3) + O(\varepsilon^3) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & 6\pi^4 A_n(T_2) |A_n(T_2)|^2 + \sqrt{2} i \pi^2 b \zeta_\varepsilon A_n(T_2) + \sqrt{2} i \pi^2 b \frac{d}{dT_2} A_n(T_2) \\ & - 2k_{c\varepsilon} (2A_n(T_2) - A_{n-1}(T_2) - A_{n+1}(T_2)) = -\frac{\sqrt{2} F_\varepsilon e^{-iT_2}}{\pi} \end{aligned} \quad (14)$$

nas quais, A_n é a amplitude complexa de oscilação do n -ésimo oscilador, i é a unidade complexa e $(\bar{})$ representa o conjugado complexo de uma grandeza. A distância $\Delta\hat{s}$ entre os osciladores é dada por

$$\Delta\hat{s} = \frac{L_s}{N-1}, \quad (15)$$

na qual, L_s é o comprimento da metaestrutura e N é o número de células unitárias da estrutura. Ao definir essa distância, é feita uma expansão de Taylor nas amplitudes de vigas adjacentes, assumindo que o domínio discreto em n se aproxima de um domínio contínuo em $\hat{s}$,

$$A_{n\pm 1}(T_2) \approx A(\hat{s}, T_2) \pm \Delta\hat{s} \frac{\partial A(\hat{s}, T_2)}{\partial \hat{s}} + \frac{\Delta\hat{s}^2}{2} \frac{\partial^2 A(\hat{s}, T_2)}{\partial \hat{s}^2}. \quad (16)$$

Dessa forma, se obtém uma equação que descreve uma onda em $\hat{s}$ e T_2

$$6\pi^4 A(\hat{s}, T_2) |A(\hat{s}, T_2)|^2 + \sqrt{2}i\pi^2 b \zeta_\varepsilon A(\hat{s}, T_2) + \sqrt{2}i\pi^2 b \frac{\partial A(\hat{s}, T_2)}{\partial T_2} + 2k_{c\varepsilon} \Delta\hat{s}^2 \frac{\partial^2 A(\hat{s}, T_2)}{\partial \hat{s}^2} = -\frac{\sqrt{2}F_\varepsilon e^{-iT_2}}{\pi}. \quad (17)$$

A Equação (17) pode ser simplificada para obter a NLSE. Para isso, $A(\hat{s}, T_2)$ é assumido da forma $\Psi(\hat{s}, T_2)e^{-iT_2}$ para eliminar o termo exponencial em F_ε , a coordenada $\hat{s}$ é adimensionalizada e parâmetros auxiliares são definidos

$$\begin{aligned} A(\hat{s}, T_2) &= \Psi(\hat{s}, T_2)e^{-iT_2}, \quad b_s = b \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{2}, \quad \delta_s^2 = \frac{k_{c\varepsilon}}{b_s} \Delta\hat{s}^2, \quad s = \frac{\hat{s}}{\delta_s}, \\ \Phi(s, T_2) &= \Psi(\hat{s}, T_2) \frac{\pi^2 \sqrt{3}}{\sqrt{2b_s}}, \quad L_w = \frac{L_s}{\delta_s}, \quad ds = \frac{\Delta\hat{s}}{\delta_s}, \quad h = F_\varepsilon \frac{\pi \sqrt{3}}{2b_s^{3/2}}, \end{aligned} \quad (18)$$

nos quais, δ_s é um fator adimensionalizador, L_w é o comprimento do domínio espacial adimensionalizado, ds é a discretização desse domínio, $\Phi(s, T_2)$ é a amplitude complexa da onda e h é o parâmetro de excitação externa na NLSE. Então, a NLSE é obtida

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} \Phi(s, T_2) + i \frac{\partial}{\partial T_2} \Phi(s, T_2) + \left(i\zeta_\varepsilon + 2|\Phi(s, T_2)|^2 - 1 \right) \Phi(s, T_2) + h = 0. \quad (19)$$

3. RESULTADOS

A Equação (19) admite três tipos de soluções: *bright solitons*, *dark solitons* e soluções constantes (*flat*). Como as soluções *flat* são invariantes em relação a s , não são consideradas neste trabalho. Entre os sólitons, apenas os *dark solitons* podem apresentar estabilidade temporal sob excitação externa (Barashenkov and Smirnov, 1996). Por isso, adota-se como condição inicial uma aproximação fornecida pelo metamodelo desenvolvido por Barbosa *et al.* (2023), que estima a amplitude da solução em função do amortecimento e da força externa. Essa abordagem permite iniciar a simulação com uma configuração próxima de um *dark soliton*, favorecendo a obtenção da resposta esperada.

A estabilidade das soluções da Eq. (19) depende da escolha adequada dos parâmetros, conforme o diagrama apresentado por Barbosa *et al.* (2024). Neste trabalho, utilizam-se 600 osciladores, com $k_{c\varepsilon} = 35, 88$ e amortecimento $\zeta_\varepsilon = 0, 3$. A Fig. 2 mostra a solução numérica da Eq. (19) para diferentes valores de b , indicando a possibilidade de ocorrência de soluções instáveis, *flat solutions* ou configurações estáveis com concentração localizada de energia.

Para validar a solução obtida a partir da Eq.(19), a Eq.(11) é resolvida numericamente e seus resultados são comparados, conforme ilustrado na Fig.3. Observa-se que a solução modal apresenta um pico de amplitude superior ao da solução da NLSE. Essa diferença ocorre porque a amplitude da onda na solução da NLSE representa apenas uma parcela da resposta modal completa, conforme descrito na Eq.(13), considerando termos até a ordem ε^2 . Apesar da negligência de termos de ordem superior, a NLSE consegue representar adequadamente a oscilação das vigas, especialmente fora da região de pico.

A flexibilidade no ajuste de b permite obter diferentes configurações de forma de onda a partir de uma mesma estrutura, o que é particularmente útil em aplicações onde se deseja adaptar o comportamento dinâmico do sistema sem modificar sua geometria. Como b e $k_{c\varepsilon}$ estão inter-relacionados na definição dos parâmetros da onda, a escolha desses valores pode ser conduzida de modo a atender restrições específicas de projeto, como limites de frequência, amplitude ou estabilidade. Essa possibilidade amplia o espaço de projeto, permitindo compatibilizar o desempenho dinâmico com diferentes restrições.

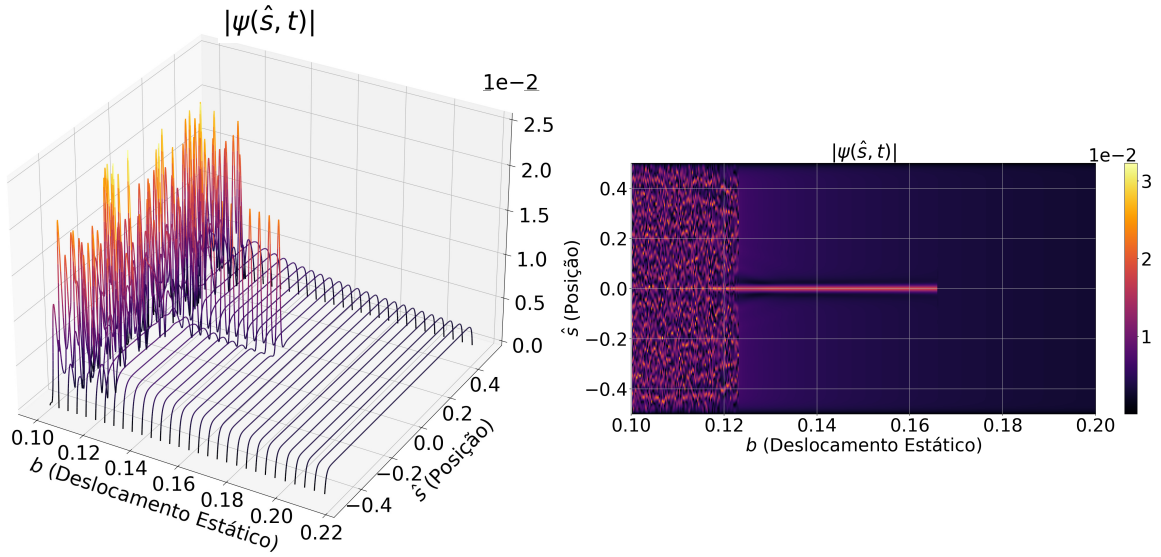


Figura 2. Amplitudes da onda para diferentes valores de b .

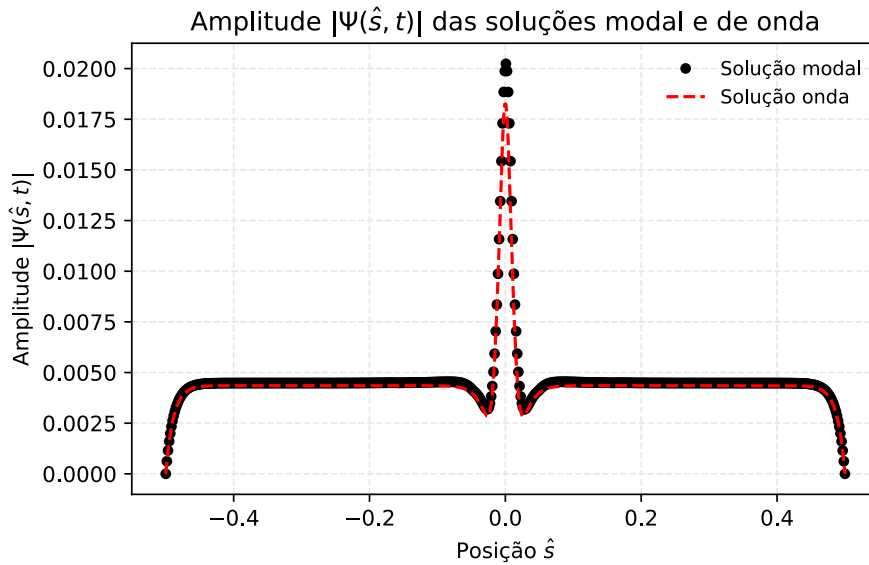


Figura 3. Comparação entre o valor absoluto da amplitude da onda, obtido numericamente por meio da NLSE (Solução ondulatória) e da equação modal (Solução modal).

4. CONCLUSÕES

Este trabalho apresenta uma análise numérica da formação de ondas estacionárias não lineares em uma cadeia de vigas biapoçadas submetidas à pós-flambagem, acopladas por elementos elásticos localizados. A modelagem utiliza o método das múltiplas escalas para derivar a Equação de Schrödinger Não Linear (NLSE), cuja solução descreve oscilações localizadas ao longo da estrutura. A comparação com a solução obtida a partir das equações modais completas demonstra que, mesmo com as simplificações do modelo, a NLSE fornece uma representação consistente da dinâmica do sistema. Além disso, o parâmetro b , relacionado à deflexão estática das vigas, oferece uma via de calibração da resposta estrutural, permitindo adequações conforme requisitos específicos de projeto. Os resultados obtidos reforçam a aplicabilidade da abordagem ondulatória na análise e no desenvolvimento de metamateriais com propriedades dinâmicas ajustáveis, estendendo seu uso ao contexto de estruturas em regime de pós-flambagem.

5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), através dos processos 2018/15894-0, 2021/05510-3 e 2024/22736-3. O último autor também agradece ao Conselho Nacional

de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), através do processo 303901/2021-7. Os autores também agradecem ao Eng. M.Sc. Arthur Barbosa e ao restante dos autores do trabalho Barbosa *et al.* (2023) por fornecerem acesso aos dados do metamodelo desenvolvido.

6. REFERÊNCIAS

- Barashenkov, I.V. and Smirnov, Y.S., 1996. "Existence and stability chart for the ac-driven, damped nonlinear schrödinger solitons". *Phys. Rev. E*, Vol. 54, No. 5, pp. 5707–5725. doi:10.1103/PhysRevE.54.5707. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.54.5707>.
- Barbosa, A., Kacem, N. and Bouhaddi, N., 2024. "A design methodology for nonlinear oscillator chains enabling energy localization tuning and soliton stability enhancement with optimal damping". *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 213, p. 111358. ISSN 0888-3270. doi:10.1016/j.ymssp.2024.111358. URL <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2024.111358>.
- Barbosa, A., Kacem, N. and Bouhaddi, N., 2025. "Robustness analysis of externally driven damped solitons in the presence of uncertainties and disorders". *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 476, p. 134612. ISSN 0167-2789. doi:10.1016/j.physd.2025.134612. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167278925000910>.
- Barbosa, A., Sena, J., Kacem, N. and Bouhaddi, N., 2023. "An artificial intelligence approach to design periodic nonlinear oscillator chains under external excitation with stable damped solitons". *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 205, p. 110879. ISSN 0888-3270. doi:10.1016/j.ymssp.2023.110879. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327023007872>.
- Fang, X., Lacarbonara, W. and Cheng, L., 2024. "Advances in nonlinear acoustic/elastic metamaterials and metastructures". *Nonlinear Dynamics*. doi:10.1007/s11071-024-10219-4. URL <https://doi.org/10.1007/s11071-024-10219-4>.
- Fontanela, F., Grolet, A., Salles, L., Chabchoub, A. and Hoffmann, N., 2018. "Dark solitons, modulation instability and breathers in a chain of weakly nonlinear oscillators with cyclic symmetry". *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 413, pp. 467–481. ISSN 0022-460X. doi:10.1016/j.jsv.2017.08.004. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X17306053>.
- Grolet, A., Hoffmann, N., Thouverez, F. and Schwingshackl, C., 2016. "Travelling and standing envelope solitons in discrete non-linear cyclic structures". *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 81, pp. 75–87. ISSN 0888-3270. doi:10.1016/j.ymssp.2016.02.062. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327016001138>.
- Jallouli, A., Kacem, N. and Bouhaddi, N., 2017. "Stabilization of solitons in coupled nonlinear pendulums with simultaneous external and parametric excitations". *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 42, pp. 1–11. ISSN 1007-5704. doi:10.1016/j.cnsns.2016.05.012. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570416301526>.
- Shen, M.M., Yang, J.H., Yang, D.S., Yang, X.D. and Qian, Y.J., 2025. "Vibration control in bolted joints with locally resonant metamaterials". *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 287, p. 109999. doi:10.1016/j.ijmecsci.2025.109999. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020740325000852>.
- Sun, Y., Li, Y., Zhang, G., Lee, H.P., Zheng, H. and Li, F., 2025. "Inertial amplification stiffened meta-panels for low-frequency sound insulation". *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 290, p. 110116. doi:10.1016/j.ijmecsci.2025.110116. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020740325002024>.
- Tian, W., Yang, Z., Li, M., Gu, Y. and Zhao, T., 2025. "Theoretical modeling and mechanism analysis of nonlinear metastructure for supersonic aeroelastic suppression". *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 224, p. 111931. doi:10.1016/j.ymssp.2024.111931. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S088832702400829X>.
- Xue, Y., Zhou, B., Li, J. and Zhang, W., 2025. "Controllably ultrawide bandgap of a metamaterial beam based on inertial amplification and magnetorheological elastomer". *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 109, p. 105494. doi:10.1016/j.euromechsol.2024.105494. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0997753824002742>.
- Yang, D., Guo, X., Zhang, W. and Cao, D., 2024. "Non-linear dynamics and bandgap control in magneto-rheological elastomers metamaterials with inertial amplification". *Thin-Walled Structures*, Vol. 204, p. 112237. doi:10.1016/j.tws.2024.112237. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263823124006785>.
- Zhao, J., Kovacic, I. and Zhu, R., 2024. "Wideband vibration attenuation of a metamaterial beam via integrated hardening and softening nonlinear resonators". *Nonlinear Dynamics*. doi:10.1007/s11071-024-10402-7. URL

<https://doi.org/10.1007/s11071-024-10402-7>.

Zhao, T., Yang, Z. and Tian, W., 2023. “Tunable nonlinear metastructure with periodic bi-linear oscillators for broadband vibration suppression”. *Thin-Walled Structures*, Vol. 191, p. 110975. doi:10.1016/j.tws.2023.110975. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263823123004536>.

7. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.