

CONTROLE DE CRISES EPILÉTICAS ATRAVÉS DO SISTEMA DINÂMICO NEURONAL DE HINDMARSH-ROSE COM ANÁLISE COMPARATIVA DOS CONTROLES LQR E SDRE

Gabriel de Moraes Cordeiro, cordeiro.gabriel@aluno.ifsp.edu.br¹

Leticia Gomes, gomes.leticia1@aluno.ifsp.edu.br¹

Fábio Roberto Chavarette, fabio.chavarette@unesp.br²

¹Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Acesso Heitor de Souza Pinheiro S/N, Araraquara/SP,

²Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP, Rua Prof. Francisco Degni S/N, Araraquara/SP

Resumo. O modelo de Hindmarsh-Rose, composto por um sistema de equações diferenciais ordinárias de terceira ordem, é amplamente utilizado na modelagem do comportamento dinâmico de neurônios biológicos, reproduzindo padrões regulares, irregulares e caóticos de disparo. Em particular, dinâmicas caóticas e hipercaóticas modeladas por este sistema estão associadas a condições patológicas como a epilepsia. Neste contexto, o presente trabalho propõe uma análise comparativa entre duas técnicas de controle não linear — Controle Ótimo Linear (LQR) e Controle via Equações de Riccati Dependentes do Estado (SDRE) — com o objetivo de suprimir oscilações caóticas no modelo de Hindmarsh-Rose e conduzir a dinâmica do sistema para órbitas periódicas estáveis. A estratégia LQR, baseada na linearização do sistema em torno de um ponto de equilíbrio, é avaliada frente ao método SDRE, que preserva a não linearidade do modelo ao resolver equações de Riccati parametrizadas pelo estado do sistema. A eficácia de ambos os controladores é analisada por meio de simulações numéricas, considerando tanto o comportamento transiente quanto a robustez frente a perturbações paramétricas. Os resultados obtidos demonstram que ambos os métodos são capazes de estabilizar a dinâmica do neurônio eletrônico; no entanto, o controle SDRE apresenta desempenho superior em termos de precisão da trajetória e adaptação às variações do sistema. Tais resultados evidenciam o potencial do controle ótimo não linear como ferramenta para o desenvolvimento de dispositivos biomiméticos voltados ao tratamento de distúrbios neurológicos como a epilepsia.

Palavras chave: LQR, controle, crise epilética, sistema neuronal, caos

Abstract. The Hindmarsh-Rose model, composed of a third-order system of ordinary differential equations, is widely used to model the dynamic behavior of biological neurons, reproducing regular, irregular, and chaotic firing patterns. In particular, chaotic and hyperchaotic dynamics modeled by this system are associated with pathological conditions such as epilepsy. In this context, the present work proposes a comparative analysis between two nonlinear control techniques — Linear Quadratic Regulator (LQR) and State-Dependent Riccati Equation (SDRE) control — aiming to suppress chaotic oscillations in the Hindmarsh-Rose model and drive the system dynamics toward stable periodic orbits. The LQR strategy, based on the linearization of the system around an equilibrium point, is evaluated against the SDRE method, which preserves the model's nonlinearity by solving Riccati equations parameterized by the system's state. The effectiveness of both controllers is assessed through numerical simulations, taking into account both transient behavior and robustness to parametric uncertainties. The results show that both methods are capable of stabilizing the dynamics of the electronic neuron; however, the SDRE control exhibits superior performance in terms of trajectory accuracy and adaptation to system variations. These findings highlight the potential of nonlinear optimal control as a promising tool for the development of biomimetic devices aimed at treating neurological disorders such as epilepsy.

Keywords: SDRE, control, epileptic seizures, neuronal system, chaos

1. INTRODUÇÃO

O sistema nervoso humano é constituído por bilhões de neurônios, células especializadas responsáveis pela captação, processamento e transmissão de informações sensoriais e motoras. Essas células apresentam propriedades eletrofisiológicas específicas, determinadas pela organização molecular de suas membranas, que as capacitam a responder a estímulos e propagar impulsos eletroquímicos. Tal fenômeno é regido por dois processos fisiológicos

fundamentais: a excitabilidade, que define a capacidade do neurônio de gerar potenciais de ação em resposta a estímulos, e a condutibilidade, que permite a transmissão desses sinais ao longo de complexas redes neurais (Butera, Rinzel e Smith, 1999).

A compreensão da atividade elétrica dos neurônios constitui um desafio intrínseco à complexidade do sistema nervoso central, onde bilhões de células interagem de maneira não linear por meio de sinapses químicas e elétricas. Para descrever matematicamente essas interações, diversos modelos têm sido propostos, com o intuito de compreender os mecanismos que regulam a propagação dos sinais neurais e suas consequências fisiológicas e patológicas. Um marco nesse campo foi o modelo introduzido por Hodgkin e Huxley (1952), que representou a membrana neuronal como um circuito elétrico, no qual os íons funcionam como fontes eletromotrizes controladas por gradientes de concentração. Esse modelo permitiu avanços substanciais na compreensão da dinâmica das condutâncias iônicas e da geração de potenciais de ação, tornando-se a base para formulações posteriores.

Entre os modelos derivados, destaca-se o modelo de Hindmarsh-Rose (HR), formulado para descrever a atividade oscilatória dos neurônios com base na dinâmica das condutâncias. Esse modelo, expresso por um sistema de equações diferenciais ordinárias de terceira ordem, é amplamente adotado na neurociência computacional devido à sua capacidade de reproduzir padrões complexos de disparo neuronal, incluindo o fenômeno de bursting — caracterizado por períodos de disparos rápidos intercalados com fases de repouso (Hindmarsh e Rose, 1984). Tais oscilações, quando exacerbadas, podem apresentar comportamento caótico ou hipercaótico, frequentemente associado a distúrbios neurológicos como a epilepsia, uma condição caracterizada por descargas elétricas anormais e sincrônicas no cérebro, que resultam em crises convulsivas espontâneas.

Nesse contexto, o uso de ferramentas matemáticas aplicadas ao controle dinâmico da atividade neuronal tem se revelado uma abordagem promissora para a mitigação de crises epiléticas. A engenharia de controle, desde o regulador centrífugo de James Watt no século XVIII até os desenvolvimentos teóricos de Minorsky e os critérios de estabilidade de Nyquist (1932), tem evoluído significativamente, culminando na formulação da teoria de controle moderno. Essa teoria permite a modelagem, análise e regulação de sistemas dinâmicos complexos, inclusive em aplicações biomédicas, oferecendo métodos para suprimir oscilações caóticas e manter a estabilidade de estados fisiológicos (Ogata e Severo, 1998).

Neste estudo, propõe-se a aplicação da técnica de Controle Ótimo Linear (LQR - Linear Quadratic Regulator) como estratégia para suprimir o comportamento caótico do modelo de Hindmarsh-Rose, conduzindo sua dinâmica para uma órbita periódica estável. A eficácia da metodologia é avaliada por meio de simulações numéricas, com análise da resposta do sistema controlado, visando à redução de padrões caóticos e à prevenção de estados críticos associados à atividade epilética. Ao propor uma abordagem quantitativa para o controle da atividade neuronal, este trabalho contribui para o avanço das técnicas de modelagem computacional e de controle aplicadas à neurociência, reforçando o papel da engenharia na interface com as ciências da vida para o tratamento de distúrbios neurológicos.

2. METODOLOGIA

A passagem do impulso nervoso é pautada pela propagação da despolarização por meio do neurônio, fenômeno que propicia a repolarização da membrana, o que permite recuperar o seu estado quiescente normal e finaliza a transmissão do impulso.

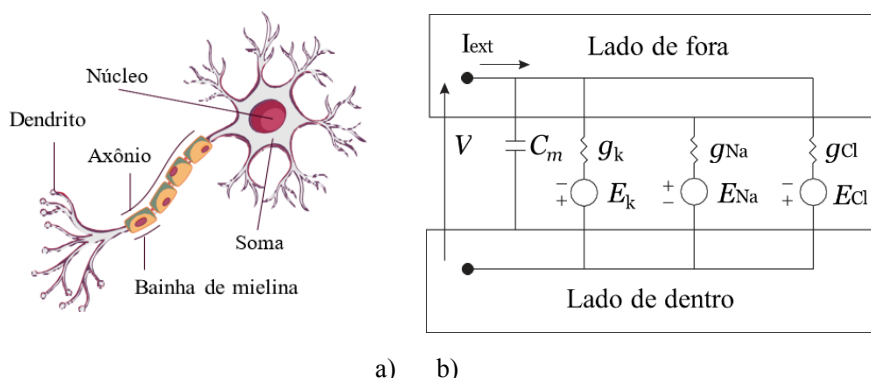


Figura 1. a) Esquema das principais partes do neurônio motor.

b) Circuito elétrico equivalente proposto por Hodgkin e Huxley. (Modificado de Hodgkin e Huxley, 1952)

O modelo seminal de Hodgkin e Huxley (1952) estabeleceu que o fluxo total de corrente através da membrana neuronal decorre da soma de três principais contribuições: (1) a corrente de potássio, (2) a corrente de sódio e (3) a corrente de vazamento, que engloba fluxos de íons como cloreto e bicarbonato. A dinâmica dessas correntes, em

conjunto com a capacitância da membrana, define a equação da corrente de membrana, possibilitando a descrição precisa do comportamento eletrofisiológico dos neurônios. A Figura 2 ilustra o circuito equivalente associado a esse modelo, representando as interações entre os diversos elementos que compõem a membrana celular.

No escopo da modelagem computacional da atividade elétrica neuronal, um dos fenômenos mais investigados é o de *burstings* neuronais — disparos intermitentes de potenciais de ação, intercalados por períodos de silêncio. Tal comportamento pode ser analisado de forma eficiente por meio do modelo de Hindmarsh-Rose, que descreve a dinâmica do potencial de membrana utilizando um sistema de equações diferenciais ordinárias de terceira ordem. O modelo emprega três variáveis de estado adimensionais: x , que representa o potencial de membrana; y , associada aos fluxos iônicos rápidos; e z , relacionada aos fluxos iônicos lentos. A interação não linear entre essas variáveis gera uma dinâmica rica e multifacetada, que abrange desde disparos regulares até regimes caóticos e hipercaóticos, sendo particularmente útil na investigação de distúrbios neurológicos, como a epilepsia (Hindmarsh e Rose, 1984).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - ax^3 + bx^2 - z + I \\ \dot{y} &= c - dx^3 - y \\ \dot{z} &= r(s(x - x_r) - z)\end{aligned}\quad (1)$$

Dependendo dos valores adotados para seus parâmetros, o modelo de Hindmarsh-Rose (HR) é capaz de simular uma ampla gama de comportamentos dinâmicos, topologicamente equivalentes aos padrões de disparo neuronal observados experimentalmente. Essa flexibilidade torna o modelo HR um dos mais representativos para o estudo qualitativo do fenômeno de *bursting* neuronal, caracterizado por sequências de disparos rápidos intercaladas com períodos de silêncio (Meirovitch, 1970). Além disso, o sistema pode apresentar dinâmicas caóticas, caracterizadas por trajetórias aperiódicas e sensibilidade extrema às condições iniciais, aspectos frequentemente associados a processos neurofisiológicos complexos. A dinâmica do sistema é descrita pelo seguinte conjunto de equações diferenciais (Hindmarsh e Rose, 1984): onde $x(t)$ representa o potencial de membrana, $y(t)$ está associado aos fluxos iônicos rápidos e $z(t)$ aos fluxos iônicos lentos. O modelo é parametrizado por oito constantes reais: a, b, c, d, r, s, x_r , e I , cujos valores influenciam diretamente a dinâmica neuronal: $a, b, c, b, e d$ determinam a presença de disparos rápidos e *bursting*, bem como a frequência das oscilações no potencial de membrana; I : representa a corrente de entrada no neurônio (corrente DC), podendo ser oriunda de sinapses ou estímulos externos; r controla a velocidade de variação da variável z , influenciando a frequência e o número de picos dentro de um *burst*; s : regula o mecanismo de adaptação neuronal, ajustando a resposta a estímulos prolongados: define a coordenada x do ponto de equilíbrio estável subliminar, influenciando a trajetória do sistema no espaço de fase. Essa parametrização confere ao modelo HR uma grande capacidade de ajuste, permitindo a reprodução fiel de distintos padrões de disparo neuronal observados em registros experimentais. Ao capturar tanto fenômenos periódicos quanto caóticos, o modelo se destaca como uma ferramenta fundamental para a compreensão matemática dos processos biofísicos subjacentes à atividade elétrica neuronal.

2.1 Controle Linear Ótimo e SDRE

A supressão do caos neuronal pode ser alcançada por meio de estratégias de controle ótimo, sendo o Controle Linear Quadrático (LQR) um dos métodos clássicos mais utilizados. O LQR é baseado na teoria de controle ótimo linear e visa minimizar um funcional de custo quadrático, reduzindo as oscilações do sistema até atingir uma órbita periódica estável (Paluš, Milan et al., 2001). Esse controle é particularmente eficaz para estabilizar trajetórias e mitigar dinâmicas caóticas em sistemas neurais modelados por equações diferenciais.

Tabela 1. Comparativo e principais diferenças entre os dois métodos. Fonte: Próprio Autor

Critério	LQR (Linear Quadratic Regulator)	SDRE (State-Dependent Riccati Equation)
Linearidade	Requer sistema linear ou linearizável	Trata sistemas fortemente não lineares
Estabilidade	Garante estabilidade apenas localmente	Garante estabilidade em uma faixa mais ampla
Adaptação	Usa ganhos fixos de realimentação	Ajustar os ganhos em tempo real
Flexibilidade	Limitado a perturbações pequenas	Capaz de lidar com variações dinâmicas significativas
Aplicação ao Modelo HR	Pode funcionar em regime linearizado	Melhor para suprimir caos neuronal e <i>bursting</i>

Na formulação do LQR, a função de controle $u(t)u(t)u(t)$ é determinada a partir da realimentação do estado, garantindo que a trajetória do sistema siga a trajetória ótima definida pelas condições iniciais. Dessa forma, a abordagem pode ser dividida em dois aspectos fundamentais: Controle de Programa: O controle ótimo estabelece uma trajetória pré-definida que deve ser seguida pelo sistema, garantindo a convergência para uma solução ótima associada às condições iniciais. Síntese de Controle. O SDRE estende o LQR para sistemas fortemente não lineares, resolvendo a equação de Riccati de forma adaptativa, conforme a dinâmica do sistema evolui. Enquanto o LQR pode ser suficiente para pequenas variações da trajetória, o SDRE é mais adequado para sistemas altamente dinâmicos e caóticos, pois adapta a lei de controle conforme as condições do sistema evoluem. Dessa forma, o SDRE se apresenta como uma solução mais eficiente para controle neuronal, permitindo estabilizar o potencial de membrana de forma mais precisa e robusta. O controle ótimo é uma ferramenta fundamental para estabilizar sistemas caóticos, como os modelos de dinâmica neuronal. O LQR se destaca por sua simplicidade e eficiência para sistemas aproximadamente lineares, enquanto o SDRE se mostra superior para controlar sistemas fortemente não lineares, garantindo maior flexibilidade e desempenho na supressão de estados caóticos. A escolha entre os dois métodos deve considerar o nível de não linearidade do sistema e a necessidade de adaptação em tempo real. A principal vantagem do método SDRE é sua capacidade de lidar com sistemas altamente não lineares preservando uma estrutura semelhante ao controle LQR linear, o que facilita sua implementação e análise. Tal controle é desejável em aplicações que visam mitigar comportamentos neurais disfuncionais, como os observados em condições patológicas, incluindo crises epiléticas.

2.2 Formulação para Problema de Controle

O método SDRE será utilizado para diminuir a oscilação do sistema em torno de uma órbita desejada. Diferentemente da estratégia de controle utilizada em que o controle dependia de dois controladores, um não linear (feedforward) e outro linear (feedback), neste, o controle foi realizado apenas com o controle SDRE.

Este método, proposto pela primeira vez por Pearson (1962) e mais tarde expandido por Wernli e Cook, foi estudado por Mracek independente e Cloutie e aludida por Friedland. Aplicação da Equação de Riccati Dependente do Estado (SDRE) para controle do sistema não-linear tem visto crescente aplicação C. P. Mracek, J.R. Cloutier, C. N. D'Souza.

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} x^T Q(x) x + u^T R(x) u dt \quad (1)$$

com relação ao estado x e controle u sujeito à restrição não lineares

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2)$$

com $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $f(x) \in C^k$, $g(x) \in C^k$, $Q(x) \in C^k$, $R(x) \in C^k$, $k \geq 1$, e onde $Q(x) = C^T(x)C(x) \geq 0$, e $R(x) > 0$, para todo x . Assumindo que $f(0) = 0$ e $g(x) \neq 0$ para todo x . Selecionando $Q(x)$ e $R(x)$ de tal forma que o índice de desempenho $J(x,u)$ é globalmente convexo. Buscamos estabilizar soluções aproximadas do problema da forma $u = \emptyset(x)$ onde $\emptyset$ é uma função não linear de x .

A dinâmica não linear pode ser representada da seguinte forma

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u \quad (3)$$

onde

$$\begin{aligned} f(x) &= A(x)x \\ B(x) &= g(x) \end{aligned} \quad (4)$$

No caso multivariável, já há um número grande de maneiras de se transformar o sistema não linear para coeficientes dependentes de estado (state-dependent coefficients - SDC). Associados à forma SDC, temos as seguintes definições: $A(x)$ é uma parametrização (detectável) observável do sistema não linear (na região Ω) se o par $C(x), A(x)$ é pontual observável (detectável) no sentido linear de todos os $x \in \Omega$. $A(x)$ é uma parametrização (estabilizável) controlável do sistema não linear (na região Ω) se o par $\{B(x), A(x)\}$ é pontual controlável (estabilizável) no sentido linear de todos os $x \in \Omega$.

Considerando as condições iniciais e finais: $x(t_0) = x_0$, $x(\infty) = 0$. Os coeficientes do estado dependente são

dados por:

$$A(x) = J \quad (5)$$

escrevendo,

$$\dot{x} = A(x)x + [1]u \quad (6)$$

sendo x um vetor.

O estado x e o controle u são dados pela função $f(x)=A(x)x$, $b(x)=B(x)$ e $d(x)=S(x)x$ (Shawky et al, 1996).

Pressupondo-se que $f(0) = 0$, o que implica que a origem é um ponto de equilíbrio. O funcional custo a ser minimizado através do controle SDRE é dado por:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} x^T Q(x)x + u^T R(x)u dt \quad (7)$$

Sendo $Q(x)$ uma matriz definida positiva ou semidefinida positiva e $R(x)$ definida positiva. O controle por realimentação de estados utilizando o controle SDRE é dado por:

$$u = -R^{-1}(x)B^T(x)P(x)x \quad (8)$$

Sendo a matriz P a equação de Riccati dependente dos estados dada por:

$$A^T(x)P + PA(x) - PB(x)R^{-1}(x)B^T(x)P + Q(x) = 0 \quad (9)$$

sendo:

$$u = -R^{-1}(x)B^T(x)\lambda \quad (12)$$

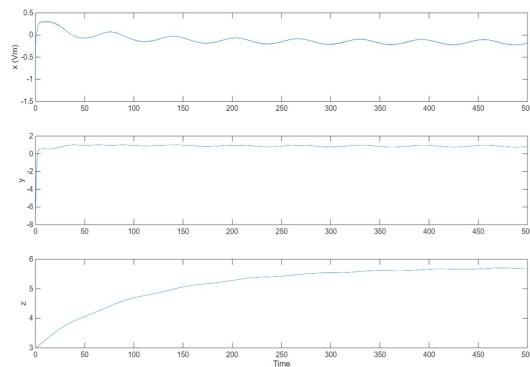
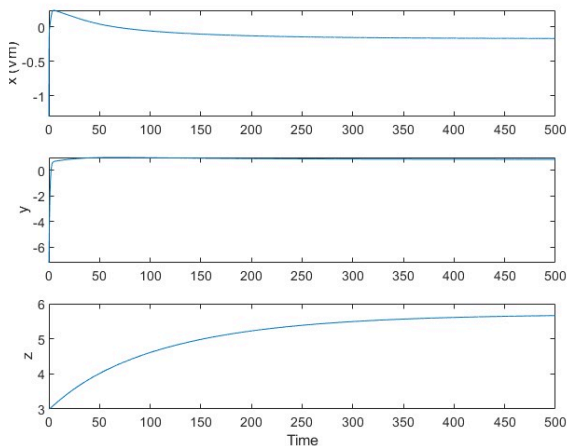
Pressupondo um co-estado, sabe-se que:

$$\lambda = P(x)x \quad (13)$$

Substituindo-se u em λ obtêm-se o controle SDRE.

3. RESULTADOS

Devido à simplicidade estrutural das equações diferenciais do modelo de Hindmarsh-Rose, compostas majoritariamente por termos polinomiais na variável xxx , sua implementação em circuitos eletrônicos analógicos torna-se viável. Tais modelos vêm sendo empregados na tentativa de restaurar o funcionamento de circuitos neurais biológicos comprometidos, como aqueles afetados por descargas elétricas cerebrais anormais — uma característica comum em distúrbios neurológicos como a epilepsia —, cujo comportamento dinâmico apresenta similaridades com impulsos nervosos fisiológicos [3]. Para as simulações numéricas, adotaram-se os seguintes valores de parâmetro: $a = 1$, $b=3$, $c=1$, $d=5$, $r=0,006$, $x=-1,56$, $s=4$, e $I=2,7$, conforme referenciado em [14]. Os resultados obtidos demonstram a eficácia do controlador na atenuação das oscilações caóticas, promovendo a transição para um regime dinâmico periódico e estável. A robustez do sistema de controle foi validada mediante a introdução de incertezas paramétricas no modelo, evidenciando sua capacidade de manter desempenho e estabilidade mesmo diante de variações nas condições do sistema biológico simulado. Para as simulações numéricas foram adotados os parâmetros listados, como o parâmetro I representa a corrente injetada, cabe analisar como o modelo se comporta quando I sobre variações. A função de controle derivada por meio da técnica de controle ótimo linear quadrático (LQR) apresentou os seguintes ganhos: $KLQR=[-0,5393, -1,0471, 4,1795]$



a) b)

Figura 02: a) Controle SDRE simples b) Controle com Ruído Branco

A Figura 02 apresenta a resposta temporal das variáveis de estado x , y e z do sistema controlado. Observa-se que a variável x inicia com um valor negativo e converge suavemente para a origem ao longo do tempo, indicando um comportamento estável e bem amortecido. A variável y , por sua vez, sofre uma queda abrupta nos instantes iniciais, estabilizando-se rapidamente em um valor constante negativo, o que sugere uma transição rápida e controlada. Já a variável z apresenta um crescimento gradual a partir de aproximadamente 3 até atingir um valor próximo de 6, demonstrando uma resposta contínua e sem oscilações. Em conjunto, os resultados indicam que o sistema apresenta um desempenho dinâmico satisfatório, com boa estabilidade, rápida acomodação e ausência de sobre-elevações, características desejáveis em aplicações de controle robusto. O termo ruído refere-se a sinais indesejáveis que interferem na transmissão e processamento de informações em sistemas, sendo caracterizado por suas propriedades estatísticas no tempo e por sua Densidade Espectral de Potência (PSD) no domínio da frequência. Com base nas curvas temporais das variáveis $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$, observa-se a influência de um distúrbio senoidal — possivelmente modelado como ruído branco filtrado — atuando sobre o canal de controle. A variável $x(t)$ exibe oscilações amortecidas, típicas da resposta a um sinal oscilatório em um sistema dissipativo, sugerindo a ação de uma excitação periódica. Já $y(t)$ apresenta comportamento amortecido com leve oscilação, indicando que o sistema responde à perturbação mantendo a estabilidade. Por fim, $z(t)$ mostra um crescimento até atingir um novo equilíbrio, sinalizando que a perturbação não compromete a estabilidade global. Esse padrão é coerente com modelos neuronais sob influência de estímulos sensoriais externos ou flutuações sinápticas modeladas por ruído branco com componente senoidal. Portanto, o sistema representado parece responder a um estímulo senoidal no canal de controle, simulando a influência direta sobre um neurônio, com o comportamento global indicando amortecimento, adaptação e estabilização, características comuns em modelos de controle neurodinâmico sob excitação periódica ou ruído branco de baixa intensidade.

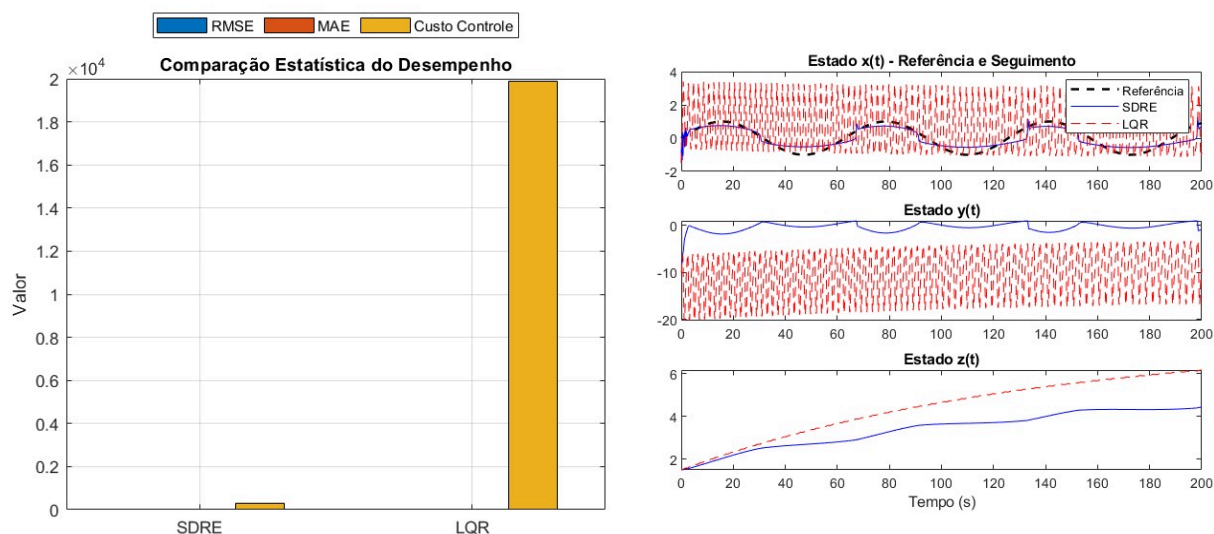


Figura 03: Comparação SDRE e LQR

A Figura 03 apresenta uma comparação entre os controladores SDRE e LQR, considerando métricas estatísticas e a evolução dos estados do sistema. Observa-se que o SDRE apresenta menores valores de RMSE, MAE e custo de controle, evidenciando maior precisão no seguimento da referência e menor esforço de atuação — fator relevante em aplicações com restrições energéticas. Nos gráficos temporais, o SDRE segue a trajetória de referência com maior fidelidade, enquanto o LQR exibe oscilações de alta frequência e maior desvio. Esse padrão se repete nos estados $y(t)$ e $z(t)$, nos quais o SDRE mantém uma resposta mais suave e estável. Os resultados destacam a superioridade do SDRE em sistemas não lineares, devido à sua capacidade de adaptação dinâmica do ganho de controle em função do estado.

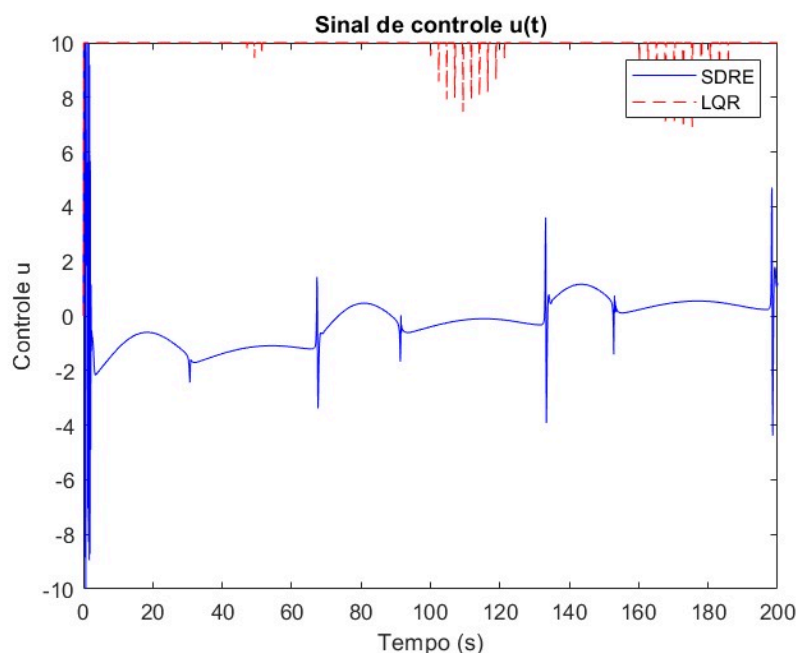


Figura 04: Sinal de controle

A Figura 04 mostra a evolução do sinal de controle $u(t)$ para os controladores SDRE e LQR. Nota-se que o LQR mantém o sinal saturado ao longo do tempo, indicando uma atuação excessivamente agressiva e potencialmente prejudicial aos atuadores. Em contraste, o SDRE apresenta um controle mais moderado e adaptativo, com variações suaves e picos pontuais, resultado da sua natureza não linear e ajuste dinâmico dos ganhos. Esse comportamento reforça a superioridade do SDRE, tanto em eficiência de controle quanto na preservação dos recursos do sistema, sendo mais adequado para aplicações com restrições físicas ou energéticas.

Tabela 2. MÉTRICAS DE DESEMPENHO. Fonte: Próprio Autor

Critério	Valor
RMSE (SDRE):	0.31743
RMSE (LQR)	1.65052
MAE (SDRE):	0.26488
MAE (LQR):	1.30906
Custo Controle (SDRE):	295.23341
Custo Controle (LQR):	19878.57464

A Tabela de métricas apresentada compara o desempenho de dois controladores amplamente utilizados em sistemas de controle: o State-Dependent Riccati Equation (SDRE) e o Linear Quadratic Regulator (LQR). A análise baseia-se em três critérios principais: erro quadrático médio (RMSE), erro absoluto médio (MAE) e custo de controle. O RMSE (Root Mean Square Error) representa o erro quadrático médio entre a saída do sistema e a referência desejada, sendo uma métrica sensível a grandes desvios. Já o MAE (Mean Absolute Error) expressa o erro absoluto médio, sendo menos influenciado por valores extremos. Em ambos os casos, valores menores indicam maior precisão do controlador.

Os resultados obtidos mostram que o controlador SDRE apresentou valores significativamente menores de RMSE (0,31743) e MAE (0,26488) em comparação ao LQR, que obteve 1,65052 e 1,30906, respectivamente. Esses dados evidenciam que o SDRE proporciona uma resposta mais precisa e estável, com menor desvio em relação à trajetória de referência. Além disso, o custo de controle, que representa o esforço total do atuador ao longo do tempo (geralmente calculado como a integral da função de custo $\int (x^T Q x + u^T R u) dt$), foi consideravelmente menor no caso do SDRE (295,23) em comparação ao LQR (19878,57). Esse resultado indica que o SDRE é não apenas mais preciso, mas também mais eficiente do ponto de vista energético, exigindo menos esforço de controle para alcançar os objetivos desejados.

Em síntese, os dados demonstram de forma clara que o controlador SDRE supera o LQR em todas as métricas analisadas. Essa superioridade é particularmente relevante em sistemas não lineares, nos quais o LQR, por ser baseado em uma linearização fixa, não consegue capturar adequadamente as dinâmicas variáveis do sistema.

O SDRE, por sua vez, resolve a equação de Riccati em função do estado atual, adaptando-se continuamente às não linearidades e resultando em um desempenho mais robusto e eficiente.

4. CONCLUSÃO

Dessa forma, ao longo deste trabalho, analisou-se a dinâmica do modelo neuronal de Hindmarsh-Rose, os resultados apresentados evidenciam, de forma inequívoca, a superioridade do controlador baseado na técnica SDRE (State-Dependent Riccati Equation) em comparação ao clássico LQR (Linear Quadratic Regulator), sobretudo na aplicação a sistemas dinâmicos com características não lineares. As métricas estatísticas de desempenho (RMSE e MAE) demonstraram que o SDRE proporciona erros de seguimento substancialmente menores, o que se traduz em maior precisão no rastreamento da referência desejada. Ademais, o custo de controle associado ao SDRE foi drasticamente inferior, indicando um uso mais eficiente dos recursos de atuação e menor demanda energética ao longo do tempo. A análise das respostas temporais dos estados revelou trajetórias mais suaves e estáveis sob a ação do SDRE, ao passo que o LQR apresentou oscilações intensas e comportamento mais agressivo. Essa diferença também se reflete no perfil do sinal de controle: enquanto o LQR opera frequentemente em regime de saturação, o SDRE adapta seu esforço de forma dinâmica, respeitando limites físicos e promovendo maior robustez e segurança operacional. Assim, conclui-se que o SDRE configura-se como uma solução de controle altamente eficaz para sistemas não lineares, conciliando desempenho, estabilidade e eficiência energética, características essenciais em aplicações reais e de alta criticidade.

5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Laboratório SISPLEXOS, onde foi desenvolvido o projeto, bem como à UNESP pelo suporte técnico e acadêmico. Os autores também agradecem a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), Processo No 2022/13867-1 pelo apoio moral e financeiro.

6. REFERÊNCIAS

- Butera, R, Rinzel J, Smith J.; Models of respiratory rhythm generation in the pre-Botzinger Complex. I. Bursting Pacemaker Neurons. *Journal of Neurophysiology*; v. 82, p. 382-397, 1999.
- Hodgkin, A. L., Huxley, A. F.; A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J Physiol.* 1952 Aug 28; 117(4): 500-544.
- Hindmarsh, J. L., Rose, R. M.; A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. *Proceedings of the Royal Society B*; v. 221, n. 1222, p. 87-102, 1984.
- Hodgkin, A. L., Huxley, A. F.; A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J Physiol.* 1952
- Hindmarsh, J. L., Rose, R. M.; A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations. *Proceedings of the Royal Society B*, 1984.
- Jun, Ma et al. Control Chaos in Hindmarsh—Rose Neuron by Using Intermittent Feedback with One Variable. *Chinese Physics Letters*, 25.10 (2008): 3582.
- Kepecs, A, Lisman, J.; Information encoding and computation with spikes and bursts. *Network: Computation in Neural Systems*, 2003.
- Koch, C.; Biophysics of Computation: Information Processing in Single Neurons. *Oxford University Press*; 2004.
- Koroishi, E.H., Cavalini Jr, A.A., de Lima, A.M.G. & Steffen Jr, V., Stochastic modeling of excitable rotors. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2012.
- Lopes, Vera Lucia da Rocha, and Marcia A. Gomes Ruggiero. Cálculo numérico-Aspectos teóricos e computacionais. (1996).
- Meirovitch, L. Methods of analytical dynamics. New York: MacGraw-Hill Book Company, 1970.
- Monteiro, Luiz Henrique Alves. Sistemas dinâmicos. Editora Livraria da Física, 2006.
- Mracek, Curtis P., and James R. Cloutier. Control designs for the nonlinear benchmark problem via the state-dependent Riccati equation method. *International Journal of robust and nonlinear control* 8.4-5 (1998): 401-433.
- Savi, Marcelo Amorin. Dinâmica não-linear e caos. Editora E-papers, 2006. 18. Wolf, Alan, et al. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 16.3 (1985): 285-317. 19. Zoski, Cynthia G., ed. Handbook of electrochemistry. Elsevier, 2006

7. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.