

OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS PLANAS COMPOSTAS POR MATERIAIS QUE POSSUEM RESISTÊNCIAS DISTINTAS À TRAÇÃO E À COMPRESSÃO

Gabriel Neves Queiroz, gabrielnvsqueiroz@usp.br¹
Edson Denner Leonel, edleonel@sc.usp.br¹

¹Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, Av. Trabalhador São Carlense, 400, São Carlos, São Paulo, 13566-590, Brasil

Resumo. A otimização topológica (OT) é uma abordagem de otimização estrutural que visa determinar a distribuição ótima de material em um domínio de projeto. Assim, a OT possibilita a redução do consumo de material sem comprometer a segurança, contribuindo para o desenvolvimento de soluções mais eficientes e sustentáveis. Neste trabalho, busca-se realizar a OT de estruturas bidimensionais compostas por materiais com diferentes resistências à tração e à compressão. O problema mecânico é modelado por meio de uma formulação geometricamente não linear baseada em posições do Método dos Elementos Finitos. Para o processo de otimização, são empregados os métodos Evolutionary Structural Optimization (ESO) e Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP). Propõe-se uma forma de incorporar a esses métodos o critério de resistência de Tsai-Wu, o qual permite a consideração de um comportamento mecânico assimétrico a solicitações de tração e de compressão. Os resultados obtidos demonstram a viabilidade da estratégia proposta, evidenciando seu potencial de aplicação em diferentes cenários da engenharia de estruturas.

Palavras-chave: Otimização topológica. ESO. SIMP. Critério de Tsai-Wu.

Abstract. Topology optimization (TO) is a structural optimization approach aimed at determining the optimal distribution of material within a design domain. Thus, TO enables the reduction of material consumption without compromising safety, contributing to the development of more efficient and sustainable solutions. This work aims to perform TO of two-dimensional structures composed of materials with different strengths in tension and compression. The mechanical problem is modeled using a position-based geometrically nonlinear formulation of the Finite Element Method. For the optimization process, the Evolutionary Structural Optimization (ESO) and Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP) methods are employed. A way to incorporate the Tsai-Wu failure criterion into these methods is proposed, allowing the consideration of asymmetric mechanical behavior under tensile and compressive loads. The results obtained demonstrate the feasibility of the proposed strategy, highlighting its potential for application in various structural engineering scenarios.

Keywords: Topology optimization. ESO. SIMP. Tsai-Wu criterion.

1. INTRODUÇÃO

No cenário atual da engenharia de estruturas, a busca por soluções mais eficientes do ponto de vista econômico e ambiental tem recebido crescente importância em função das demandas pela redução de custos e pelas preocupações com a sustentabilidade. Além disso, problemas cada vez mais complexos exigem dos projetistas a concepção de soluções criativas, que frequentemente não são previstas pelas normas vigentes. Sendo assim, a otimização estrutural surge como uma ferramenta para auxiliar os engenheiros na obtenção de projetos mais eficientes, mas sem comprometer a segurança. Mais especificamente, a otimização topológica (OT) busca a melhor distribuição de material no domínio de projeto, prevendo quais regiões devem ou não conter material. A aplicação da OT é fértil na engenharia mecânica, permitindo a redução do peso de componentes e dos custos de fabricação, além de ser compatível com processos de manufatura aditiva, o que expande os limites dos métodos produtivos tradicionais (Kim e Kim, 2024). Aliada ao uso de métodos numéricos, como o Método dos Elementos Finitos (MEF), a OT é capaz de produzir estruturas complexas e de alto desempenho, o que é essencial nos diversos setores da engenharia, como aeroespacial, automobilístico, biomédico, civil e naval.

Nas últimas décadas, diversos métodos de OT foram desenvolvidos para domínios contínuos. Inicialmente, Bendsoe e Kikuchi (1988) desenvolveram o método de homogeneização, considerando um material compósito formado por células unitárias distribuídas periodicamente no domínio e contendo microfuros de dimensão variável. Em seguida, Bendsoe (1989) introduziu o Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP), associando a cada elemento finito uma grandeza

adimensional denominada densidade, com valores entre 0 e 1. Elementos com densidade nula e unitária representam vazios e material sólido, respectivamente, sendo as regiões de densidade intermediária interpretadas como um material poroso, por exemplo. Do ponto de vista da fabricação de um componente, a existência de valores intermediários dificulta a definição do contorno do domínio otimizado. Logo, o método SIMP realiza uma penalização das densidades, a fim de que a configuração final seja bem definida. Outra abordagem consolidada é o *Evolutionary Structural Optimization* (ESO), proposto por Xie e Steven (1993). O método ESO é baseado na remoção progressiva de elementos do domínio a partir de um critério como a tensão de von Mises, sendo removidos os elementos com menores valores de tensão em cada iteração. Uma variação do ESO foi desenvolvida por Querin *et al.* (1998) e é denominada *Bidirectional Evolutionary Structural Optimization* (BESO), a qual permite a reinserção de elementos no domínio em regiões submetidas a altos valores de tensão. Há diversos outros métodos difundidos na literatura de OT, tais como o Método *Level Set* (MLS) (Osher e Santosa, 2001; Sethian e Wiegmann, 2000), no qual o contorno da estrutura é representado por uma curva de nível de uma função *level set*, e o método das barras morfáveis móveis (Hoang e Jang, 2017), com o uso de elementos padronizados cujos parâmetros geométricos são as variáveis de projeto.

Embora os métodos tradicionais de OT sejam eficientes, é necessário incorporar alguns aspectos em suas formulações para torná-los mais adequados para aplicações práticas em engenharia. Para o método SIMP, as abordagens inicialmente propostas minimizam apenas a flexibilidade, sem avaliar as tensões na estrutura. Assim, alguns autores introduziram estratégias de OT com restrição ou minimização de tensão, a exemplo de Duysinx e Bendsøe (1998), Duysinx e Sigmund (1998) e Yang e Chen (1996). Entretanto, a maior parte dos trabalhos nessa área empregam materiais isotrópicos, havendo poucos estudos envolvendo materiais anisotrópicos ou com diferentes resistências à tração e à compressão. Cabe destacar que estas últimas características são fundamentais para a análise de diferentes tipos de materiais no contexto da engenharia de estruturas, especialmente para materiais compósitos, que apresentam comportamento mecânico complexo. Nesse sentido, Bruggi e Taliercio (2013) empregaram o critério de resistência de Tsai-Wu para encontrar o posicionamento ótimo de reforço de estruturas por fibras. Tal critério também foi utilizado no estudo de materiais reforçados por fibras por Kundu e Zhang (2023), Li *et al.* (2024), Ma *et al.* (2022), Silva *et al.* (2024) e Zhang *et al.* (2025). Assim, neste trabalho propõe-se uma forma de incorporar o critério anisotrópico de Tsai-Wu às formulações dos métodos ESO e SIMP, estendendo sua aplicação para a consideração de materiais com resistências distintas à tração e à compressão.

2. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Apresenta-se nesta seção a formulação do MEF empregada neste trabalho, correspondendo a uma abordagem posicional desenvolvida por Coda (2003) e Coda e Greco (2004). Nessa formulação, utilizam-se como parâmetros as posições nodais atuais da estrutura, incorporando naturalmente a não linearidade geométrica, isto é, a realização do equilíbrio na configuração deformada da estrutura. Embora os resultados aqui apresentados compreendam apenas regime de pequenos deslocamentos, a consideração da não linearidade geométrica é importante para a verificação da estabilidade das soluções obtidas, como destacado na Seção 4, devido à formação de barras esbeltas que podem sofrer instabilidade.

A ideia principal do MEF posicional é escrever a primeira variação da energia mecânica total apenas em função das posições nodais atuais ou finais $\vec{Y}$. Para problemas estáticos, o equilíbrio na forma fraca é escrito conforme a Eq. (1), sendo classificado como lagrangiano pelo fato de a configuração inicial, com área A_0 e volume V_0 , ser tomada como referência. As forças externas de volume, de superfície e concentradas são representadas por $\vec{b}^0$, $\vec{p}^0$ e $\vec{F}^0$. Além disso, $\mathbf{S}$ e $\mathbf{E}$ denotam o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e o tensor de deformações de Green-Lagrange.

$$\int_{V_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dV_0 - \int_{V_0} \vec{b}^0 \cdot \delta \vec{Y} dV_0 - \int_{A_0} \vec{p}^0 \cdot \delta \vec{Y} dA_0 - \vec{F}^0 \cdot \delta \vec{Y} = 0 \quad (1)$$

Neste trabalho, emprega-se a lei constitutiva hiperelástica de Saint-Venant-Kirchhoff (SVK), cuja energia específica de deformação é dada pela Eq. (2), na qual $\mathbb{C}$ é o tensor constitutivo elástico de quarta ordem. No modelo SVK, a relação entre os tensores $\mathbf{S}$ e $\mathbf{E}$ é linear, como mostra a Eq. (3). Pode-se escrever $\mathbf{E}$ em função do gradiente da função mudança de configuração, ou $\mathbf{A} = \nabla \vec{y}$, e do tensor identidade $\mathbf{I}$, conforme a Eq. (4). É importante destacar que as coordenadas nodais são indicadas por $\vec{X}$ e $\vec{Y}$, enquanto as coordenadas de um ponto qualquer do domínio são dadas por $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

$$u_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbf{E} \quad (2)$$

$$\mathbf{S} = \frac{\partial u_e}{\partial \mathbf{E}} = \mathbb{C} : \mathbf{E} \quad (3)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} - \mathbf{I}) \quad (4)$$

O processo de deformação do corpo pode ser descrito a partir da função mudança de configuração $\vec{f} = \vec{y}(\vec{x})$. Por sua vez, $\vec{f}$ pode ser decomposta nas funções $\vec{f}^0$ e $\vec{f}^1$, as quais representam mapeamentos realizados a partir de um sistema de

coordenadas adimensionais $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ para as configurações inicial (Ω_0) e final (Ω), conforme a Fig. 1. Então, sendo $\mathbf{A}^0 = \nabla \vec{f}^0$ e $\mathbf{A}^1 = \nabla \vec{f}^1$, o tensor $\mathbf{A}$ pode ser escrito como mostrado na Eq. (5).

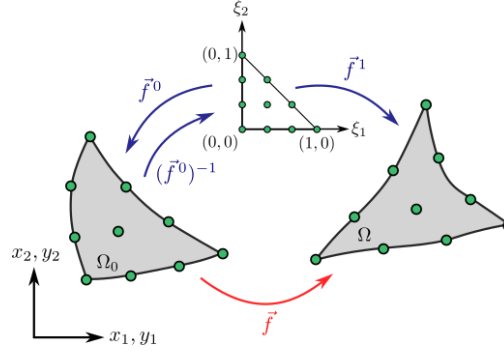


Figura 1. Mapeamento posicional das configurações inicial e atual de um elemento finito

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \quad (5)$$

As expressões da força interna $\vec{F}^{int}$ e da matriz hessiana $\mathbf{H}$ são apresentadas na Eq. (6) e na Eq. (7), nas quais as integrais podem ser aproximadas pela quadratura de Hammer sobre o domínio triangular de referência. Nas equações citadas, t e $J_0 = \det(\mathbf{A}^0)$ indicam a espessura do corpo e o jacobiano da transformação de coordenadas. Por fim, define-se um vetor de desbalanceamento mecânico $\vec{g}$ como a diferença entre as forças internas $\vec{F}^{int}(\vec{Y})$ e as forças externas $\vec{F}^{ext}$ (Eq. (8)), apresentando valor nulo na configuração de equilíbrio. Para resolver o problema mecânico, arbitra-se uma posição tentativa $\vec{Y}^0 = \vec{X}$, que é corrigida iterativamente por uma técnica de Newton-Raphson até que $\vec{g} \approx \vec{0}$.

$$\vec{F}^{int} = \int_{V_0} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} dV_0 = t \int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} J_0(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (6)$$

$$\mathbf{H} = \int_{V_0} \frac{\partial^2 u_e}{\partial \vec{Y} \otimes \partial \vec{Y}} dV_0 = t \int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} \frac{\partial^2 u_e}{\partial \vec{Y} \otimes \partial \vec{Y}} J_0(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (7)$$

$$\vec{g} = \vec{F}^{int} - \vec{F}^{ext} \quad (8)$$

3. OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Inicialmente, apresenta-se nesta seção a formulação do critério de resistência de Tsai-Wu, com vistas a considerar materiais com diferentes resistências à tração e à compressão. Em seguida, mostra-se a estratégia proposta para incorporar esse critério aos métodos ESO e SIMP de otimização topológica.

3.1. Critério de Tsai-Wu

O critério de Tsai-Wu foi proposto por Tsai e Wu (1971) para avaliar a segurança do estado de tensões em um ponto de materiais anisotrópicos em relação à ruptura. No caso mais específico de um material isotrópico com resistência à tração $\bar{\sigma}_t$ e resistência à compressão $\bar{\sigma}_c$, a expressão do critério é mostrada na Eq. (9) (Bruggi e Taliércio, 2013). Na expressão apresentada, σ_{eq}^{TW} é uma grandeza adimensional denominada tensão equivalente, a qual não deve superar o valor unitário. Além disso, I_1 e J_2 são invariantes de tensão dados pela Eq. (10) e pela Eq. (11) em função das componentes do tensor de tensões de Cauchy σ_{ij} , com $i, j = 1, 2$, assumindo estado plano de tensão.

$$\sigma_{eq}^{TW} = \frac{3}{\bar{\sigma}_c \bar{\sigma}_t} J_2 + \frac{\bar{\sigma}_c - \bar{\sigma}_t}{\bar{\sigma}_c \bar{\sigma}_t} I_1 \leq 1 \quad (9)$$

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} \quad (10)$$

$$J_2 = \frac{1}{3}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}) + \sigma_{12}^2 \quad (11)$$

O presente trabalho baseia-se em uma abordagem proposta por Groenwold e Haftka (2006), que empregaram uma medida denominada fator de segurança, λ^{TW} , para a otimização de compósitos laminados. Esta grandeza relaciona o estado de tensões de ruptura, σ_R , e o estado de tensões em determinado ponto, σ , como mostra a Eq. (12). Considerando

a condição de ruptura, tem-se $\sigma_{eq}^{TW}(\sigma_R) = 1$ na Eq. (9) e, substituindo as componentes de tensão em função de λ^{TW} , resulta uma equação quadrática cuja solução é dada pela Eq. (13), com $\hat{a}$ e $\hat{b}$ calculados conforme a Eq. (14) e a Eq. (15).

$$\sigma_R = \lambda^{TW} \sigma \quad (12)$$

$$\lambda^{TW} = \frac{-\hat{b} + \sqrt{\hat{b}^2 + 4\hat{a}}}{2\hat{a}} \quad (13)$$

$$\hat{a} = \frac{3}{\bar{\sigma}_c \bar{\sigma}_t} J_2 = \frac{1}{\bar{\sigma}_c \bar{\sigma}_t} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11} \sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2) \quad (14)$$

$$\hat{b} = \frac{\bar{\sigma}_c - \bar{\sigma}_t}{\bar{\sigma}_c \bar{\sigma}_t} I_1 = \frac{\bar{\sigma}_c - \bar{\sigma}_t}{\bar{\sigma}_c \bar{\sigma}_t} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (15)$$

Para a incorporação do critério de Tsai-Wu à OT, define-se o índice de falha ψ^{TW} como o inverso do fator de segurança, conforme a Eq. (16). Assim, quanto mais distante um ponto estiver da condição de ruptura, maior será o valor de λ^{TW} , mas menor será ψ^{TW} .

$$\psi^{TW} = \frac{1}{\lambda^{TW}} \quad (16)$$

3.2. Método ESO

O método *Evolutionary Structural Optimization* (ESO) baseia-se na remoção progressiva dos elementos menos solicitados do domínio, o que tradicionalmente é feito a partir dos valores da tensão de von Mises. Contudo, utiliza-se aqui o valor de ψ^{TW} em vez dessa tensão, sendo removidos os elementos cujo índice de falha ψ_e^{TW} é igual ou inferior a determinada razão do máximo índice de falha da estrutura, ψ_{max}^{TW} , como mostra a Eq. (17). Essa razão é denominada razão de rejeição, que é representada por RR . Ao longo das iterações, quando nenhum elemento é removido, a razão de rejeição é incrementada por uma razão de evolução ER . O processo é repetido até que o volume da estrutura seja igual ou inferior a uma porcentagem do volume inicial preestabelecida.

$$\frac{\psi_e^{TW}}{\psi_{max}^{TW}} \leq RR \quad (17)$$

3.3. Método SIMP

No método *Solid Isotropic Material with Penalization* (SIMP), define-se para cada elemento finito um valor de densidade $\rho \in [0, 1]$, que corresponde à variável de projeto da otimização. Todavia, para evitar a singularidade da matriz de rigidez, adota-se um valor mínimo $\rho_{min} = 10^{-3}$. Assim, o tensor constitutivo elástico efetivo pode ser escrito a partir do tensor original $\mathbb{C}^0$ conforme a Eq. (18), sendo $p = 3$ o fator de penalização adotado. Na formulação clássica do método SIMP, a função objetivo é a flexibilidade c , correspondente ao trabalho das forças externas.

$$\mathbb{C}(\vec{x}) = \rho^p(\vec{x})\mathbb{C}^0 \quad (18)$$

A incorporação do critério de Tsai-Wu ao método SIMP não é tão direta quanto para o método ESO, uma vez que deve ser definido formalmente um problema de otimização. Neste trabalho, optou-se por realizar uma OT multiobjetivo a partir da flexibilidade da estrutura e do desvio padrão dos índices de falha, denotado por σ_ψ . Logo, tem-se uma função objetivo modificada dada por $\hat{c}$, como mostra a Eq. (19), sendo w_1 e w_2 os pesos das funções objetivo, com $w_1 + w_2 = 1$, e μ um parâmetro de correção dimensional. Nesta expressão, as restrições são o equilíbrio da estrutura, a restrição do volume final a uma porcentagem prescrita do volume inicial ($\bar{V}_f$) e o intervalo admissível para as variáveis de projeto ρ . O problema de otimização é classificado como multidimensional (com o número de variáveis de projeto igual ao número de elementos da malha), restrito, não linear e com valores reais. As expressões do desvio padrão e da média dos índices de falha são apresentadas na Eq. (20) e na Eq. (21), nesta ordem, sendo N_σ o número de pontos nos quais as tensões são avaliadas. Adotando 7 pontos de integração por elemento finito, N_σ é igual a 7 vezes o número de elementos da malha.

$$\begin{aligned} \text{minimizar } \hat{c} &= w_1 c + w_2 \mu \sigma_\psi \\ \text{sujeito a: } \vec{g} &= \vec{0} \\ \int_V \rho(\vec{x}) dV - \bar{V}_f &\leq 0 \\ 0 < \rho_{min} &\leq \rho(\vec{x}) \leq 1 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\sigma_\psi = \sqrt{\frac{1}{N_\sigma} \sum_{i=1}^{N_\sigma} (\psi_i^{TW} - \bar{\psi})^2} \quad (20)$$

$$\bar{\psi} = \frac{1}{N_\sigma} \sum_{i=1}^{N_\sigma} \psi_i^{TW} \quad (21)$$

O cálculo da derivada da função objetivo modificada em relação às variáveis de projeto é feito a partir da Eq. (22), na qual os multiplicadores de Lagrange $\vec{\lambda}_1$ e $\vec{\lambda}_2$ são as soluções dos problemas adjuntos dados pela Eq. (23) e pela Eq. (24).

$$\frac{d\hat{c}}{d\rho} = -w_1 \vec{\lambda}_1 \cdot \frac{\partial \bar{g}}{\partial \rho} - w_2 \vec{\lambda}_2 \cdot \frac{\partial \bar{g}}{\partial \rho} + w_2 \mu \frac{\partial \sigma_\psi}{\partial \rho} \quad (22)$$

$$\mathbf{H} \cdot \vec{\lambda}_1 = \vec{F}^{ext} \quad (23)$$

$$\mathbf{H} \cdot \vec{\lambda}_2 = \mu \frac{\partial \sigma_\psi}{\partial \bar{Y}} \quad (24)$$

As derivadas necessárias para a Eq. (22) e a Eq. (24) são apresentadas na Eq. (25), na Eq. (26) e na Eq. (27). Nas duas últimas expressões, $\psi^{TW,0}$ é o índice de falha relativo ao estado de tensões do material sólido ($\rho = 1$), sendo válida a relação $\psi^{TW} = f_\sigma \psi^{TW,0}$. O fator f_σ , dado pela Eq. (28) em função de um parâmetro ϵ tal que $\epsilon^2 = \rho_{min}$, realiza uma relaxação para atenuar o problema de singularidade das tensões (Duysinx e Sigmund, 1998; Silva *et al.*, 2020).

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial \rho} = \frac{\partial \bar{F}^{int}}{\partial \rho} = \int_{V_0} p \rho^{p-1} \mathbb{C}^0 : \mathbf{E} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{Y}} dV_0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial \sigma_\psi}{\partial \rho} = \sigma_\psi^{-1} \frac{1}{N_\sigma} \sum_{i=1}^{N_\sigma} (\psi_i^{TW} - \bar{\psi}) \left[\frac{df_\sigma}{d\rho} \psi_i^{TW,0} - \frac{1}{N_\sigma} \sum_{k=1}^{N_\sigma} \frac{df_\sigma}{d\rho} \psi_k^{TW,0} \right] \quad (26)$$

$$\frac{\partial \sigma_\psi}{\partial \bar{Y}} = \sigma_\psi^{-1} \frac{1}{N_\sigma} \sum_{i=1}^{N_\sigma} (\psi_i^{TW} - \bar{\psi}) \left[f_\sigma \frac{\partial \psi_i^{TW,0}}{\partial \bar{Y}} - \frac{1}{N_\sigma} \sum_{k=1}^{N_\sigma} f_\sigma \frac{\partial \psi_k^{TW,0}}{\partial \bar{Y}} \right] \quad (27)$$

$$f_\sigma = \frac{\rho}{\epsilon(1-\rho) + \rho} \quad (28)$$

Resta calcular, então, a derivada de $\psi^{TW,0}$ em relação às posições nodais atuais $\bar{Y}$, o que é feito conforme a Eq. (29). A partir da Eq. (14) e da Eq. (15), são obtidas as derivadas dos parâmetros $\hat{a}_i^0$ e $\hat{b}_i^0$, mostradas na Eq. (30) e na Eq. (31). Nestas expressões, as grandezas com índice sobrescrito 0 referem-se ao material sólido.

$$\frac{\partial \psi_i^{TW,0}}{\partial \bar{Y}} = -(\psi_i^{TW,0})^2 \left(\frac{\partial \lambda_i^{TW,0}}{\partial \hat{a}_i^0} \frac{\partial \hat{a}_i^0}{\partial \bar{Y}} + \frac{\partial \lambda_i^{TW,0}}{\partial \hat{b}_i^0} \frac{\partial \hat{b}_i^0}{\partial \bar{Y}} \right) \quad (29)$$

$$\frac{\partial \hat{a}_i^0}{\partial \bar{Y}} = \frac{1}{\bar{\sigma}_c \bar{\sigma}_t} \left\{ [2(\sigma_{11}^0)_i - (\sigma_{22}^0)_i] \frac{\partial (\sigma_{11}^0)_i}{\partial \bar{Y}} + [2(\sigma_{22}^0)_i - (\sigma_{11}^0)_i] \frac{\partial (\sigma_{22}^0)_i}{\partial \bar{Y}} + 6(\sigma_{12}^0)_i \frac{\partial (\sigma_{12}^0)_i}{\partial \bar{Y}} \right\} \quad (30)$$

$$\frac{\partial \hat{b}_i^0}{\partial \bar{Y}} = \frac{(\bar{\sigma}_c - \bar{\sigma}_t)}{\bar{\sigma}_c \bar{\sigma}_t} \left[\frac{\partial (\sigma_{11}^0)_i}{\partial \bar{Y}} + \frac{\partial (\sigma_{22}^0)_i}{\partial \bar{Y}} \right] \quad (31)$$

Por fim, é necessário determinar a derivada das componentes de tensão em relação às posições. Como o MEF posicional fornece as tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, as tensões de Cauchy podem ser obtidas por meio da Eq. (32), com $J = \det(\mathbf{A})$. A derivada buscada é, então, calculada conforme a Eq. (33), sendo $\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A}$.

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{A}^t \quad (32)$$

$$\frac{\partial \sigma_i^0}{\partial \bar{Y}} = -J^{-1} \mathbf{C}^{-1} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{Y}} \otimes \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}_i^0 \cdot \mathbf{A}^t + J^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial \bar{Y}} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \cdot \mathbf{S}_i^0 \cdot \mathbf{A}^t + J^{-1} \mathbf{A} \cdot \mathbb{C}_i^0 : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{Y}} \cdot \mathbf{A}^t + J^{-1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}_i^0 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^1)^t}{\partial \bar{Y}} \quad (33)$$

Assim, para atualizar as densidades em cada iteração da OT, define-se um parâmetro $B_{(it)}^{el}$ dado pela Eq. (34), sendo it a iteração atual e $\langle \cdot \rangle = \max(\cdot, 0)$. Por meio de um critério de otimalidade, as densidades são atualizadas conforme a Eq. (35), na qual $\zeta = 0.05$ e $\eta = 0.5$ são parâmetros de controle. Além disso, o multiplicador de Lagrange $\Lambda_{(it)}$ pode ser calculado por um método de bissecção. O processo é repetido até que a máxima diferença entre as densidades de duas iterações consecutivas seja suficientemente pequena (Sigmund, 2001).

$$B_{(it)}^{el} = \frac{\langle w_1 \bar{\lambda}_1 \frac{\partial \bar{g}}{\partial \rho^{el}} \rangle + \langle w_2 \bar{\lambda}_2 \frac{\partial \bar{g}}{\partial \rho^{el}} - w_2 \mu \frac{\partial \sigma_\psi}{\partial \rho^{el}} \rangle}{\Lambda_{(it)} V^{el}} \quad (34)$$

$$\rho_{(it+1)}^{el} = \begin{cases} \max\{\rho_{(it)}^{el} - \zeta; \rho_{min}\}, & \text{se } \rho_{(it)}^{el} (B_{(it)}^{el})^\eta \leq \max\{\rho_{(it)}^{el} - \zeta; \rho_{min}\} \\ \min\{\rho_{(it)}^{el} + \zeta; 1\}, & \text{se } \rho_{(it)}^{el} (B_{(it)}^{el})^\eta \geq \min\{\rho_{(it)}^{el} + \zeta; 1\} \\ \rho_{(it)}^{el} (B_{(it)}^{el})^\eta, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (35)$$

4. RESULTADOS

O exemplo estudado foi adaptado de Pereira *et al.* (2004), que realizaram a OT com restrição de tensão pelo método SIMP usando o critério de resistência de Raghava *et al.* (1973), que também permite a consideração de materiais com resistências distintas à tração e à compressão. Apesar das diferenças na formulação e no critério de resistência, é possível comparar os resultados para analisar as variações produzidas por abordagens distintas. O problema é ilustrado na Fig. 2, consistindo em uma chapa de dimensões $L = 2 \text{ m}$ e $h = 1 \text{ m}$ vinculada na borda superior e solicitada por uma força horizontal de intensidade $F = 1 \text{ N}$ distribuída ao longo de uma distância $d = 0.4 \text{ m}$. Considera-se estado plano de tensão com espessura unitária, carregamento aplicado em 10 passos, módulo de elasticidade 1 MPa, coeficiente de Poisson 0.3 e volume final prescrito como 25% do inicial. Com relação à malha do MEF, empregam-se elementos finitos planos triangulares de aproximação cúbica, contendo 10 nós, sendo utilizados no total 6400 elementos e 29161 nós. Além disso, adotam-se as tensões admissíveis de tração e de compressão como 250 e 750 Pa, respectivamente. Estes dois valores, bem como o módulo de elasticidade, foram aumentados em relação ao trabalho de Pereira *et al.* (2004), visto que a estrutura sofria instabilidade quando simulada com os parâmetros originais, mostrando a importância da realização de uma análise não linear geométrica. Para o método ESO, utilizou-se um valor inicial de RR igual a 1%, ER igual a 2.5%, bem como uma taxa de remoção máxima de 1% do volume inicial por iteração. Já para o SIMP, empregou-se um filtro de sensibilidades (Sigmund, 2001) com raio igual a 1.2 vezes o comprimento característico da malha, além de $\mu = 0.0015 \text{ J}$.

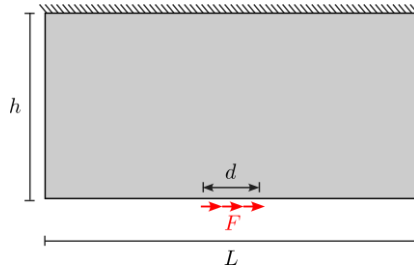


Figura 2. Geometria e condições de contorno e de carregamento do problema analisado

Como a formulação proposta para o método SIMP corresponde a uma otimização multiobjetivo, existem inúmeras soluções ótimas de acordo com a importância atribuída a cada função objetivo. Assim, variaram-se os pesos w_1 e w_2 para verificar a influência sobre a flexibilidade e o desvio padrão dos índices de falha, sendo os resultados apresentados na Tab. 1 para sete combinações dos pesos. Observa-se que, no geral, o aumento do peso w_1 gera uma redução da flexibilidade, enquanto uma redução desse peso proporciona uma redução do desvio padrão σ_ψ , o que está de acordo com a formulação proposta. Também há uma tendência de redução do máximo índice de falha da estrutura conforme w_1 diminui. Entretanto, a solução indicada por G apresentou um valor incompatível com o esperado, pois essa configuração deveria resultar no menor valor de σ_ψ . Isso se deve, provavelmente, à falta de convergência do algoritmo de otimização, havendo oscilações nas densidades de um conjunto de elementos. Mesmo assim, é possível construir uma fronteira de Pareto simplificada com as demais configurações, conforme a Fig. 3, que contém as soluções não dominadas. Logo, a escolha da estrutura ótima depende do critério adotado pelo projetista. Ainda da Fig. 3, observa-se uma assimetria crescente entre as partes tracionada (à esquerda) e comprimida (à direita) da estrutura com o aumento de w_2 , de acordo com a assimetria das resistências. Como $\bar{\sigma}_c > \bar{\sigma}_t$ e a minimização do desvio padrão tende a uniformizar os valores de ψ^{TW} , o algoritmo de OT tende a manter mais material na região tracionada.

Já para o método ESO, a solução obtida é única, sendo ilustrada na Fig. 4, juntamente com a solução F do SIMP e o resultado encontrado por Pereira *et al.* (2004). Notam-se diferenças significativas entre as soluções dos dois métodos simulados, especialmente na largura e na inclinação das duas “barras” formadas. No entanto, ambas as configurações foram capazes de captar a diferença entre as tensões admissíveis de tração e de compressão, resultando em estruturas assimétricas, com maior quantidade de material na região tracionada. Para o ESO, a flexibilidade e o máximo índice de falha foram de $1.6882 \times 10^{-5} \text{ kJ}$ e 0.1944, superiores aos valores de todas as soluções da Tab. 1. Logo, o método SIMP foi mais eficiente na minimização das duas grandezas, além de produzir uma configuração mais próxima da solução obtida por Pereira *et al.* (2004), mesmo considerando as diferenças entre as abordagens dos autores e do presente trabalho.

Tabela 1. Comparação entre as soluções para o método SIMP usando diferentes combinações dos pesos da otimização

Solução	w_1	w_2	Flexibilidade [10^{-5} kJ]	Desvio padrão dos índices de falha [10^{-3}]	Índice de falha máximo [10^{-1}]	Função objetivo [10^{-5} kJ]
A	1.0	0.0	0.8534	5.9922	0.8045	0.8534
B	0.9	0.1	0.8642	5.9448	0.5175	0.8669
C	0.7	0.3	0.8841	5.5777	0.4935	0.8698
D	0.5	0.5	0.9132	5.2665	0.4730	0.8516
E	0.3	0.7	0.9683	5.2315	0.4698	0.8398
F	0.1	0.9	1.0314	5.1087	0.4713	0.7928
G	0.0	1.0	1.4096	8.3509	0.9990	1.2526

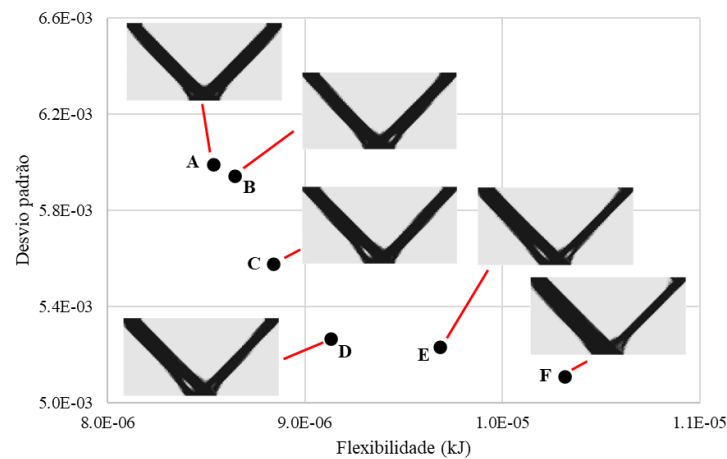


Figura 3. Fronteira de Pareto para o método SIMP contendo as soluções A a F da Tab. 1

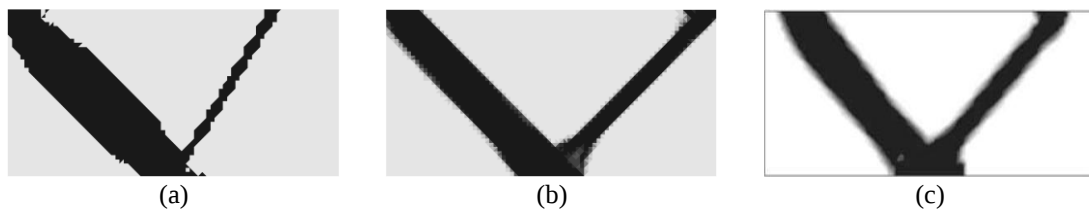


Figura 4. Comparação entre os resultados do ESO (a), da configuração F do SIMP (b) e de Pereira *et al.* (2004) (c)

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho, propôs-se uma estratégia para a incorporação do critério de resistência de Tsai-Wu aos métodos de otimização topológica ESO e SIMP, a fim de considerar materiais com diferentes resistências à tração e à compressão. A incorporação ao ESO foi mais direta, enquanto para o SIMP foi proposta uma OT multiobjetivo, com a adoção da flexibilidade e do desvio padrão dos índices de falha como funções objetivo. Ao simular um exemplo com condições simétricas de contorno e de carregamento, ambas as abordagens resultaram em estruturas assimétricas devido aos diferentes valores assumidos para as tensões admissíveis de tração e de compressão. Contudo, o método SIMP produziu menores valores da flexibilidade e do máximo índice de falha, sendo mais eficiente na minimização destas grandezas. Ao comparar os resultados com um exemplo da literatura, observaram-se similaridades entre as configurações ótimas, apesar das diferenças decorrentes das distintas abordagens utilizadas. Logo, a estratégia proposta mostrou-se viável e pode ser aplicada em diferentes contextos da engenharia de estruturas.

6. AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001 (processo 88887.823909/2023-00).

7. REFERÊNCIAS

- Bendsøe, M.P., 1989. "Optimal shape design as a material distribution problem." *Structural Optimization*, Vol. 1, pp. 193-202.
- Bendsøe, M.P. e Kikuchi, N., 1988. "Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71, pp. 197-224.
- Bruggi, M. e Taliercio, A., 2013. "Topology optimization of the fiber-reinforcement retrofitting existing structures." *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 50, pp. 121-136.
- Coda, H.B., 2003. "An exact FEM geometric non-linear analysis of frames based on position description." In *Proceedings of the 17th International Congress of Mechanical Engineering*. São Paulo, Brazil.
- Coda, H.B. e Greco, M., 2004. "A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 193, pp. 3541-3557.
- Duysinx, P. e Bendsøe, M.P., 1998. "Topology optimization of continuum structures with local stress constraints." *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 43, pp. 1453-1478.
- Duysinx, P. e Sigmund, O., 1998. "New developments in handling stress constraints in optimal material distribution." In *Proceedings of the 7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*. Saint Louis, USA.
- Groenwold, A.A. e Haftka, R.T., 2006. "Optimization with non-homogeneous failure criteria like Tsai-Wu for composite laminates." *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 32, pp. 183-190.
- Hoang, V.N. e Jang, G.W., 2017. "Topology optimization using moving morphable bars for versatile thickness control." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 317, pp. 153-173.
- Kim, H. e Kim, I.Y., 2024. "3D decomposition optimization of topology-optimized structures considering a build volume constraint for additive manufacturing." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 432.
- Kundu, R.D. e Zhang, X.S., 2023. "Stress-based topology optimization for fiber composites with improved stiffness and strength: Integrating anisotropic and isotropic materials." *Composite Structures*, Vol. 320.
- Li, G., Chen, Y. e Li, Q., 2024. "Strength-based collaborative topology optimization for continuous fiber reinforced composites." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 430.
- Ma, G., Yang, W. e Wang, L., 2022. "Strength-constrained simultaneous optimization of topology and fiber orientation of fiber-reinforced composite structures for additive manufacturing." *Advances in Structural Engineering*, Vol. 25, No. 7, pp. 1636-1651.
- Osher, S.J. e Santosa, F., 2001. "Level Set Methods for Optimization Problems Involving Geometry and Constraints: I. Frequencies of a Two-Density Inhomogeneous Drum." *Journal of Computational Physics*, Vol. 171, pp. 272-288.
- Pereira, J.T., Fancello, E.A. e Barcellos, C.S., 2004. "Topology optimization of continuum structures with material failure constraints." *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 26, pp. 50-66.
- Querin, O.M., Steven, G.P. e Xie, Y.M., 1998. "Evolutionary structural optimisation (ESO) using a bidirectional algorithm." *Engineering Computations*, Vol. 15, No. 8, pp. 1031-1048.
- Raghava, R., Caddell, R.M. e Yeh, G.S.Y., 1973. "The macroscopic behaviour of polymers." *Journal of Materials Science*, Vol. 8, pp. 225-232.
- Sethian, J.A. e Wiegmann, A., 2000. "Structural Boundary Design via Level Set and Immersed Interface Methods." *Journal of Computational Physics*, Vol. 163, pp. 489-528.
- Sigmund, O., 2001. "A 99 line topology optimization code written in Matlab." *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 21, pp. 120-127.
- Silva, A.L.F., Salas, R.A. e Silva, E.C.N., 2024. "Topology optimization considering Tsai-Wu yield criterion for composite materials." *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 94, pp. 2719-2744.
- Silva, G.A., Beck, A.T. e Sigmund, O., 2020. "Topology optimization of compliant mechanisms considering stress constraints, manufacturing uncertainty and geometric nonlinearity." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 365.
- Tsai, S.W. e Wu, E.M., 1971. "A general theory of strength for anisotropic materials." *Journal of Composite Materials*, Vol. 5, pp. 58-80.
- Xie, Y.M. e Steven, G.P., 1993. "A simple evolutionary procedure for structural optimization." *Computers & Structures*, Vol. 49, No. 5, pp. 885-896.
- Yang, R.J. e Chen, C.J., 1996. "Stress-Based Topology Optimization." *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 12, No. 2, pp. 98-105.
- Zhang, X., Zhou, Y., Xia, L., Xie, Y.M., Wu, M. e Li, Y., 2025. "Evolutionary topology optimization with stress control for composite laminates using Tsai-Wu criterion." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 434.

8. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.