

O MÉTODO SIMPLIFICADO E ALTAMENTE ESTÁVEL DE BOLTZMANN EM REDE EM ESCOAMENTOS TURBULENTOS

Alexandre Nunes Reinaldi, ale.reinaldi@usp.br¹
Luben Cabezas-Gómez, lubencg@sc.usp.br¹

¹Departamento de Engenharia Mecânica, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo (USP), Avenida Trabalhador São Carlense, 400, 13566-970, São Carlos-SP, Brasil.

Resumo. O Método de Boltzmann em Rede (MBR) apresenta vantagens em simulações do comportamento físico de escoamentos quando comparado com metodologias tradicionais devido a sua simplicidade de programação e facilidade de simular de diferentes fenômenos. O Método Simplificado e Altamente Estável de Boltzmann em Rede (MSAEBR) é uma variante dessa metodologia e surge para contornar limitações usuais do método convencional, como estabilidade numérica e aplicação de condições de contorno. Tais vantagens são obtidas devido à adaptação numérica das funções de distribuição, causadoras principais dessas limitações, para evoluir diretamente as propriedades macroscópicas do fluido, garantindo um melhor desempenho na análise de escoamentos turbulentos, usuais da engenharia. Desse modo, a vigente pesquisa empregou simulações com o MBR e o MSAEBR para a resolução do clássico problema de Caixa de fluido a diferentes números de Reynolds para comparar essas metodologias em eficiência, custo de memória computacional, estabilidade numérica e acurácia de resultados. Conclui-se que, para escoamentos laminares, o baixo custo de memória computacional do MSAEBR não se sobrepõe contra sua baixa eficiência, preferindo-se o MBR. Todavia, para escoamentos turbulentos, o MSAEBR apresenta um desempenho melhor que o MBR em todos os aspectos citados, sendo preferível o emprego dessa nova vertente.

Palavras chave: Método Simplificado e Altamente Estável de Boltzmann em Rede. Método de Boltzmann em Rede. Turbulência. Fenômenos de Transporte. Escoamentos Monofásicos.

Abstract. The Lattice Boltzmann Method (LBM) has advantages in simulating the physical behavior of flows when compared to traditional methodologies due to its simplicity of programming and ease of simulating different phenomena. The Simplified and Highly Stable Lattice Boltzmann Method (SHSLBM) is a variant of this methodology and is designed to overcome the usual limitations of the conventional method, such as numerical stability and the application of boundary conditions. These advantages are obtained due to the numerical adaptation of the distribution functions to evolve directly the macroscopic properties of the fluid, guaranteeing better performance in the analysis of turbulent flows, which are common in engineering. In this way, the current research employed simulations with LBM and SHSLBM to solve the classic Lid-driven Cavity problem at different Reynolds numbers in order to compare these methodologies in terms of efficiency, computational memory, numerical stability and accuracy of results. It is concluded that, for laminar flows, the low computational memory cost of SHSLBM does not outweigh its low efficiency, and LBM is preferred. However, for turbulent flows, the SHSLBM performs better than the LBM in all of the above aspects, making the use of this new approach preferable.

Keywords: Simplified and Highly Stable Lattice Boltzmann Method. Lattice Boltzmann Method. Turbulent. Transport Phenomena. Single-phase Flows.

1. INTRODUÇÃO

Estudos de simulação numérica do comportamento físico de fluidos é crucial para a engenharia. Essas simulações baseiam-se, na maioria dos casos, na resolução das equações macroscópicas de transporte, como as de conservação da massa, momento e energia, podendo serem realizadas nessa mesma escala através da solução das equações de balanço, e em escala microscópica através da análise de cada partícula individualmente, ponderando suas velocidades e energias e como elas afetam a vizinhança. Por sua vez, o Método de Boltzmann em Rede (MBR) se baseia em simulações na escala mesoscópica que não tratam o comportamento de cada partícula individualmente, mas sim considerando o comportamento de um aglomerado de partículas através das funções de distribuição, resultando na simulação de equações lineares que modelam o comportamento do fluido. O MBR tem tido uma crescente aplicação em simulações de comportamentos de fluidos devido a diversas vantagens quando comparado com métodos tradicionais, como CFD. De fato, devido à sua

natureza explícita, é um método que apresenta um bom desempenho quando paralelizado e que permite incluir a simulação de diversos fenômenos físicos através da manipulação de termos fontes, além de ser mais fácil de programar do que os códigos que resolvem as equações de Navier-Stokes por métodos tradicionais como as diferenças finitas.

Uma versão recente do MBR é o Método Simplificado e Altamente Estável de Boltzmann em Rede (MSAEBR), primeiramente proposto por Chen, et al., 2017. Desenvolvido inicialmente para contornar as limitações usuais do MBR, como custo de memória computacional, estabilidade numérica e o tratamento das condições de contorno, o MSAEBR propõe a aproximação das funções de distribuição, identificadas como causadoras principais das limitações citadas, a partir das propriedades macroscópicas do fluido estudado. O método calcula as variáveis macroscópicas diretamente na rede sem excluir a natureza explícita da solução original. Em simulações de escoamentos caracterizados por elevados números de Reynolds ou Rayleigh, o MSAEBR apresenta uma estabilidade muito maior quando comparada com a do MBR, o que contribui para a sua aplicabilidade em problemas de engenharia (Chen e Shu, 2020).

Deste modo, o presente artigo tem como objetivo o estudo e o emprego do MBR e do MSAEBR na resolução do clássico problema da Caixa de fluido (*Lid-driven cavity*) para diferentes números de Reynolds, de modo a comparar essas duas metodologias em eficiência, custo de memória computacional, estabilidade numérica e acurácia nas condições de turbulência, usando referências da literatura para análise da convergência dos resultados.

2. METODOLOGIA

2.1. O Método de Boltzmann em Rede

O MBR consiste na análise das funções de distribuição de velocidade de cada ponto de sua rede, semelhante aos nós do método de diferenças finitas, que são transmitidas e influenciadas pela sua vizinhança a partir dos processos de transmissão e colisão (*streaming* e *collision*). A Eq. (1) apresenta a fórmula principal para a obtenção dessas funções de distribuição em uma nova direção e instante de tempo, chamada de Equação de Boltzmann em Rede, enquanto a Fig. 1 apresenta, de maneira resumida, a conformação visual desses dois processos para a configuração de rede D2Q9 (nomenclatura empregada no MBR), isto é, para um problema de duas dimensões e nove direções. Nessa equação, f_i se refere à função de distribuição na direção i , f_i^{eq} refere-se à função de distribuição em equilíbrio na direção i , t o tempo, r a posição espacial, c_i a velocidade microscópica na direção i e τ o tempo de relaxação. Por sua vez, a Eq. (2) apresenta uma das formas discretizada da função de distribuição em equilíbrio, em que w_i refere-se ao peso ponderado da função de distribuição na direção i e c_s^2 refere-se à velocidade do som do modelo ao quadrado, ambos tabelados em função da configuração de rede, e ρ e u são, respectivamente, a densidade e a velocidade macroscópica do fluido. Note-se que esse termo é, primordialmente, uma função de propriedades macroscópicas.

$$f_i(r + c_i t, t + t) = f_i(r, t) + \frac{\Delta t}{\tau} [f_i^{eq}(r, t) - f_i(r, t)] \quad (1)$$

$$f_i^{eq} = w_i \rho \left(1 + \frac{c_i u}{c_s^2} + \frac{(c_i u)^2}{2c_s^4} - \frac{u \cdot u}{2c_s^2} \right) \quad (2)$$

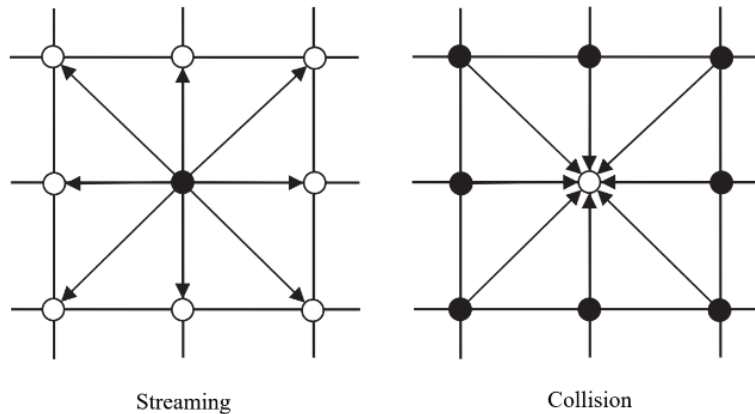


Figura 1. *Streaming* e *collision* para D2Q9 (Chen e Shu, 2020).

A Eq. (1) pode ser empregada diretamente para estudar o comportamento de um fluido, substituindo as equações de Navier-Stokes. A consistência entre ambas equações foi desenvolvida pela chamada análise de Chapman-Enskog (Benzi, et al., 1992; Frisch, et al., 1987), em que as Eq. (3) e (4) foram obtidas e categorizadas como as equações macroscópicas da Eq. (1) para escoamentos, chamadas de, respectivamente, a equação de contínuo e de momento para o MBR. Nelas,

f_i^{neq} é a função de distribuição de não-equilíbrio, termo importante para a teoria do MSAEBR, cuja equação é evidenciada na Eq. (5), em que δ_t é o incremento temporal.

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \nabla \cdot (\sum_i c_i f_i^{eq}) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\delta \rho u}{\delta t} + \nabla \cdot \sum_i (c_i)_\alpha (c_i)_\beta [f_i^{eq} + (1 - \frac{1}{2\tau} f_i^{neq})] = 0 \quad (4)$$

$$f_i^{neq} = -\tau \delta_t (\frac{\partial}{\partial t} + c_i \cdot \nabla) f_i^{eq} \quad (5)$$

Entretanto, as Eq. (3), (4) e (5) não são utilizadas na teoria original do MBR, sendo empregadas apenas para mostrar a consistência numérica entre esse método e as equações de Navier-Stokes, e que são substituídas pelas Eq. (6) e (7), respectivamente, para a obtenção das densidades e velocidades macroscópicas em cada ponto da rede. Essa modificação só é numericamente atendida se a Eq. (8) for respeitada, isto é, se a relação entre a propriedade da viscosidade cinemática macroscópica do fluido ν e o tempo de relaxação τ for atendida. Quando isso ocorre, a Eq. (1) pode ser empregada diretamente para o estudo do comportamento de um fluido a partir dos processos de transmissão (*streaming*) e de colisão (*collision*).

$$\rho = \sum_i f_i \quad (6)$$

$$\rho u = \sum_i f_i c_i \quad (7)$$

$$\nu = c_s^2 \delta_t (\tau - \frac{1}{2}) \quad (8)$$

Além desses dois processos, é necessário, em cada iteração do código, o emprego das condições de contorno do problema macroscópico para a resolução do problema, que devem ser tratadas e traduzidas em formato de funções de distribuição para cada circunstância física estudada, que é uma tarefa não trivial e que consome uma grande quantia de tempo de estudo. E, o espaço analisado deve ser, também, traduzido do real para o MBR, de modo que parâmetros adimensionais, como o Número de Reynolds, devem atender as relações entre as propriedades geométricas e físicas do fluido estudado no espaço macroscópico e respeitados na rede estabelecida. As propriedades adotadas do fluido no MBR para a obtenção desses parâmetros podem não apresentar nenhuma relação quantitativa com as originais, sendo que essa necessidade de relacionar as unidades físicas macroscópicas e as da rede é um passo a mais devido ao cuidado com a estabilidade numérica dessa metodologia. Com esses procedimentos, o MBR está totalmente consolidado.

2.2. O Método Simplificado e Altamente Estável de Boltzmann em Rede

Por sua vez, o MSAEBR consiste de uma aproximação numérica das funções de distribuição a partir das propriedades macroscópicas do fluido, sem precisar evoluir essas primeiras, que são denominadas como as causadoras do custo de memória computacional, além de que essa tarefa exclui a necessidade do tratamento das condições de contorno do MBR. Essa metodologia consiste em dividir as funções de distribuição em duas partes, como na Eq. (9): a de equilíbrio f_i^{eq} , quantificada pela Eq. (2), e a de não-equilíbrio f_i^{neq} , em amostra na Eq. (5).

$$f_i = f_i^{eq} + f_i^{neq} \quad (9)$$

Pelas Eq. (5) e (9), é notável que as funções de distribuição dependem, sobretudo, da sua parte em equilíbrio, e que podem ser escritas somente em função dela. Contudo, o desenvolvimento da função de não-equilíbrio a partir da de equilíbrio é uma tarefa mais complicada numericamente devido à existência da derivada espacial em sua equação. Desse modo, o MSAEBR traz como solução a aproximação numérica da Eq. (5) a partir da Eq. (10) (Chen e Shu, 2020), que consiste simplesmente da diferença entre duas funções de distribuição de equilíbrio em diferentes locais e tempos, mas que garante uma terceira ordem de acurácia espacial e é um esquema de diferença central que acarreta em uma segunda ordem de acurácia temporal.

$$f_i^{neq}(r - 0.5c_i\delta_t, t - 0.5\delta_t) = -\tau[f_i^{eq}(r, t) - f_i^{eq}(r - c_i\delta_t, t - \delta_t)] + O(\delta_t^3) \quad (10)$$

Com essa aproximação, é necessário, então, resolver as Eq. (3) e (4) para garantir a consistência numérica entre o MSAEBR e as equações de Navier-Stokes. Elas podem ser solucionadas diretamente a partir das funções de distribuição de equilíbrio discretizada pela Eq. (2), de modo que somente essa função de distribuição é guardada na rede, reduzindo o custo de memória computacional. As novas equações para essa solução estão apresentadas nas Eq. (11), (12), (13) e (14),

com as duas últimas sendo, de fato, a evolução da densidade e da velocidade macroscópica para cada nó da rede. Contudo, suas implementações diretas acarretariam na necessidade de armazenar, ainda, funções de distribuição e, posteriormente, traduzir as condições de contorno nessas variáveis. Assim, o MSAEBR propõe o uso das propriedades intermediárias da rede, identificadas com o sobrescrito *, para evitar esse passo, de maneira que elas são evoluídas no lugar da função de distribuição e se pode equacionar as condições de contorno diretamente nelas a partir das propriedades macroscópicas do fluido. Por fim, nesse esquema, a Eq. (8) ainda deve ser atendida para garantir a consistência numérica entre o MSAEBR e as equações de Navier-Stokes.

$$\rho^* = \sum_i f_i^{eq}(r - c_i \delta_t, t - \delta_t) \quad (11)$$

$$\rho^* u^* = \sum_i c_i f_i^{eq}(r - c_i \delta_t, t - \delta_t) \quad (12)$$

$$\rho(r, t) = \rho^* \quad (13)$$

$$\rho(r, t) u(r, t) = \rho^* u^* + (\tau - 1) \sum_i c_i f_i^{eq}(r + c_i \delta_t, t) - (\tau - 1) \rho(r, t - \delta_t) u(r, t - \delta_t) \quad (14)$$

Finalmente, o MSAEBR está consolidado. Apenas por essas modificações, esse procedimento garante algumas vantagens diretas: como as funções de distribuição não são armazenadas diretamente em cada ponto, menos variáveis dependentes são necessárias na rede, diminuindo o custo de memória computacional; e, exatamente por evoluir as propriedades macroscópicas, é possível aplicar diretamente as condições de contorno para elas, sem precisar de adaptá-las a funções de distribuição. Ademais, Chen e Shu (2020) afirmam que o MSAEBR tem maior acurácia e estabilidade numérica do que o MBR, apesar de ter uma eficiência menor, ou seja, necessita de mais iterações para convergir, e que essa metodologia apresenta um desempenho melhor nas condições de turbulência.

2.3. Caixa de Fluido (*Lid-driven Cavity*)

A caixa de fluido (*Lid-driven cavity*) foi escolhida para ser analisada por ser um problema tradicional da literatura, muito bem documentado. O problema consiste numa cavidade quadrada 2D, repleta de um líquido incompressível, cujas paredes laterais e a inferior são rígidas, isto é, a velocidade macroscópica dos pontos do fluido em contato com essas extremidades é zero (condição de contorno de não deslizamento). Por sua vez, a parede superior está em contato com uma tampa com velocidade horizontal u_o constante, influenciando a superfície do líquido. A Fig. (2) apresenta a configuração visual desse problema.

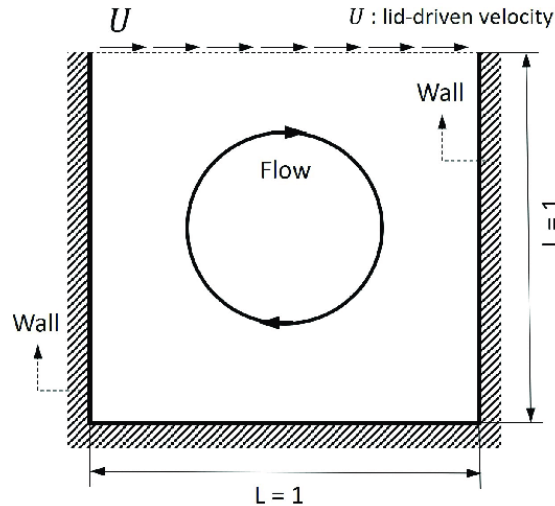


Figura 2. Caixa de fluido (Huang e Lim, 2020).

O escoamento é totalmente caracterizado pelo seu Número de Reynolds, apresentado na Eq. (15), em que L é a escala geométrica característica da cavidade. Para esse problema, Números de Reynolds menores que 3200 apresentam estado de escoamento laminar, enquanto que aqueles na faixa de 6000 a 10000 são caracterizados como turbulentos (Samantaray e Das, 2019).

$$Re = \frac{u_o L}{\nu} \quad (15)$$

Inicialmente, o Número de Reynolds seria obtido pela Eq. (15) a partir das propriedades macroscópicas reais do fluido analisado, e adaptado para o modelo o espaço do MBR, de forma a decidir L , u_o e ν que retornem o mesmo parâmetro. Contudo, como o estudo visa analisar diferentes valores desse adimensional, é possível partir de um número pré-estabelecido dele e coincidir os outros três. De maneira a discretizar o espaço em redes semelhantes para análise, o valor de L também é fixado como 1 metro, partindo, então, para apenas as variações das quantias de u_o e ν , com esse último retornando o parâmetro de relaxação τ . Por fim, o u_o deve estar em valores pequenos, de 0.1 a 0.3, para evitar a instabilidade numérica (Mohamad, 2019). Mesmo que esses parâmetros sejam diferentes nas simulações a serem comparadas, o resultado deve ser o mesmo, pois é só uma adaptação para o esquema de rede do MBR que interfere somente na estabilidade numérica. Se tratando de um problema D2Q9, os valores tabelados para os coeficientes c_i , w_i e c_s^2 estão presentes na Tab. 1.

Tabela 1. Coeficientes tabelados para o modelo D2Q9 (Mohamad, 2019).

c_i	w_i	c_s^2
(0,0)	4/9	1/3
($\pm 1,0$), (0, ± 1)	1/9	
($\pm 1, \pm 1$)	1/36	

Ao todo, cinco Números de Reynolds foram considerados: 400, 1000, 3200, 7500 e 10000, com os três primeiros sendo laminares e os dois últimos turbulentos. Devido a esperada menor eficiência do MSAEBR quando comparado com o MBR, foram propostas simulações com diferentes números de malhas para a metodologia nova, enquanto que o método convencional só foi empregado uma vez para cada Número de Reynolds, com os números de nós sendo aumentados na circunstância de turbulência. Esse aumento dos pontos da rede aconteceu devido a que o MBR não conseguiu simular os casos de turbulência com uma malha menor, divergindo nas primeiras inteirações, confirmando sua menor estabilidade numérica. Em contramão, o MSAEBR conseguiu simular esses casos mesmo para a menor rede, não divergindo até o fim das iterações. Por fim, para analisar o fato de menor eficiência, as redes com mesmo tamanho foram simuladas na mesma quantia de iterações, enquanto que as maiores foram com mais laços. Como os casos de turbulência são os principais alvos desse estudo, eles foram simulados com 450 mil iterações inicialmente e depois aumentados para 1 milhão no caso de Reynolds igual a 7500. A Tab. 2 apresenta as configurações utilizadas para o estudo.

Tabela 2. Resumo das configurações empregadas nas simulações.

Número de Reynolds	Condição	Número de nós	Número de iterações
400	Laminar	129 (MBR) 129 e 251 (MSAEBR)	75 mil para 129 nós e 150 mil para 251 nós
1000	Laminar	129 (MBR) 129 e 251 (MSAEBR)	75 mil para 129 nós e 150 mil para 251 nós
3200	Laminar	129 (MBR) 129 e 301 (MSAEBR)	150 mil para 129 nós e 300 mil para 301 nós
7500	Turbulento	251 (MBR) 129, 251 e 301 (MSAEBR)	450 mil na primeira simulação e 1 milhão na segunda
10000	Turbulento	301 (MBR) 129, 251 e 301 (MSAEBR)	450 mil

3. RESULTADOS

Para a análise de resultados, foram plotados a velocidade macroscópica horizontal u e a vertical v de cada ponto da rede ao longo dos eixos centrais x e y , respectivamente, normalizados pelos valores de entrada u_o e L , respectivamente, a fim de comparar esses resultados com os dados levantados por Ghia, et al., 1982. As Fig. (3), (4) e (5) apresentam os resultados para Números de Reynolds de 400, 1000 e 3200, respectivamente, sendo o caso laminar.

Para os três casos laminares, os resultados aproximaram-se bem com os da literatura, com exceção em duas regiões de cada gráfico para o MSAEBR. Isso decorre da menor eficiência prevista para o modelo, e que é visível nesses resultados devido à consistência do MBR, que convergiu com o mesmo número de iterações. O refinamento da malha de 129 nós para 251 e, eventualmente, 301 para a nova metodologia contribuiu para a diminuição desse erro identificado, mas que ainda existiu. Para a convergência correta dos dados, seria necessário o emprego desse refinamento somado a mais iterações. No quesito de memória computacional, para 251 nós e 150 mil iterações, o tempo de simulação do MSAEBR foi de 0.47 horas (28 minutos), enquanto que o MBR terminou de rodar após 2.72 horas, tempo muito mais excessivo.

Tal fato, somado à não necessidade de adaptação das condições de contorno para as funções de distribuição, contribuem para uma possível preferência de emprego do MSAEBR. Porém, isso não elimina a baixa eficiência dessa metodologia em relação ao MBR em escoamentos laminares.

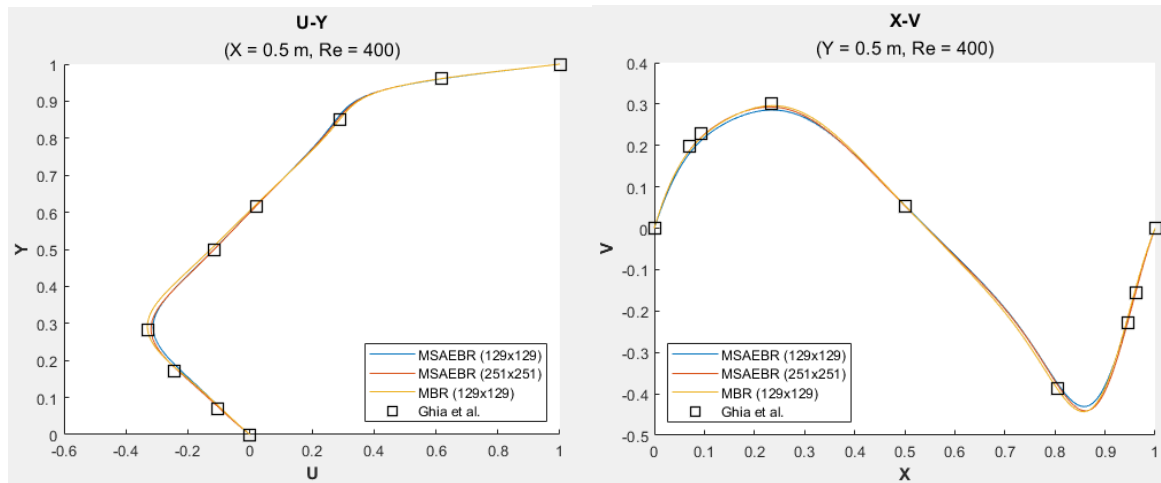


Figura 3. Resultados para Reynolds igual a 400.

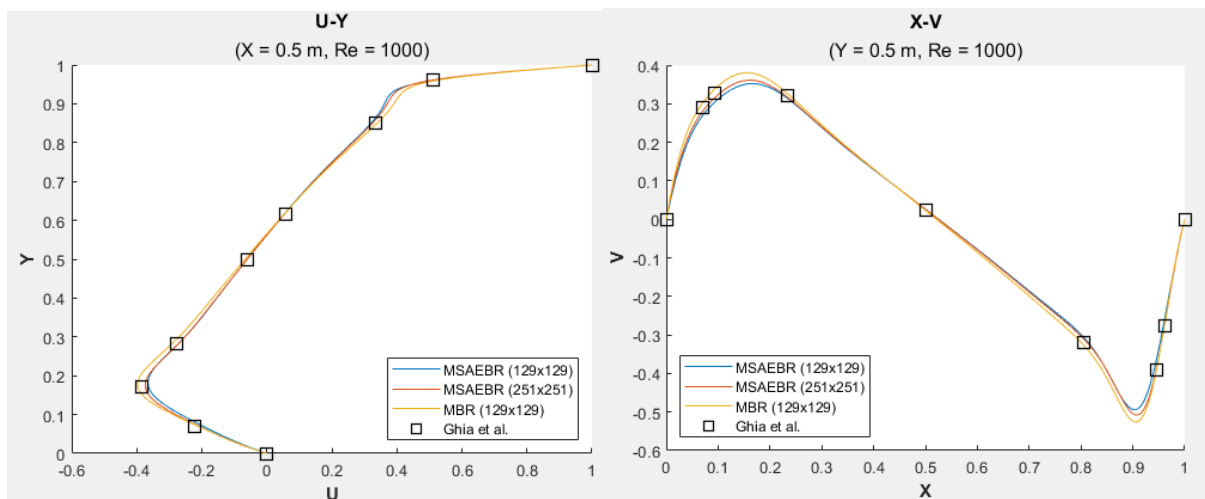


Figura 4. Resultados para Reynolds igual a 1000.

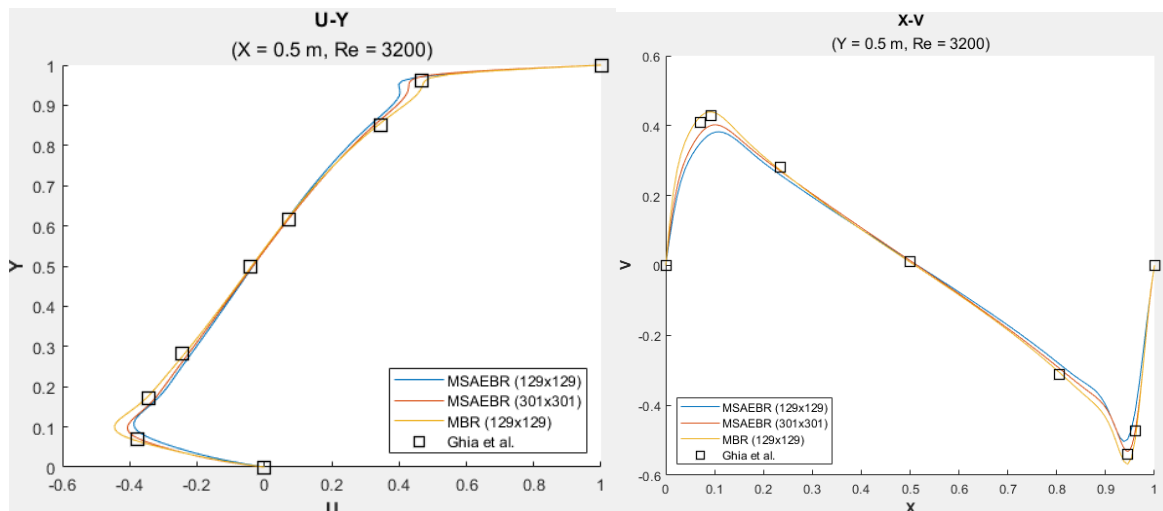


Figura 5. Resultados para Reynolds igual a 3200.

Por sua vez, as Fig. (6) e (7) apresentam os resultados para Números de Reynolds de 7500 e 10000 para 450 mil iterações, sendo o caso turbulento. É notório, em ambos os casos, a divergência dos resultados encontrados com os esperados pela literatura, inclusive no MBR. Isso se deve ao fato de que esse número de iterações empregado é baixo para escoamentos turbulentos, mesmo que ele ocasione a convergência nas simulações laminares. Por conta disso, as mesmas malhas foram mantidas e o número de iterações foi mudado para 1 milhão para Reynolds igual a 7500, com os resultados apresentados nas Fig. (8). Nessa figura, é perceptível a convergência do modelo MSAEBR para redes de 251 e 301 nós, enquanto que o modelo de 129 ainda apresenta erros nos valores finais e necessita de mais iterações, mas que não divergiu ao ser plotado, diferente do MBR. Por sua vez, mesmo com esse número de iterações, o MBR ainda contempla erros maiores no resultado final. Tal acontecimento é um fato esperado devido à premissa inicial de que o MSAEBR é mais estável em escoamentos turbulentos do que o MBR, mostrando vantagem de seu emprego nesse cenário. Ademais, essa nova simulação não foi empregada para Reynolds igual a 10000 devido ao custo de memória computacional: enquanto que a simulação para 251 e 301 nós no MSAEBR foi de, respectivamente, 5.33 e 15.82 horas para o caso turbulento de 1 milhão de iterações, o MBR, com apenas 251 nós, demorou 21.12 horas para rodar com esse mesmo número de iterações, e ainda apresentou erros ao final. Como o Reynolds de 10000 exige uma malha mais refinada de 301 nós para essa metodologia, tal simulação demoraria dias, sendo inviável.

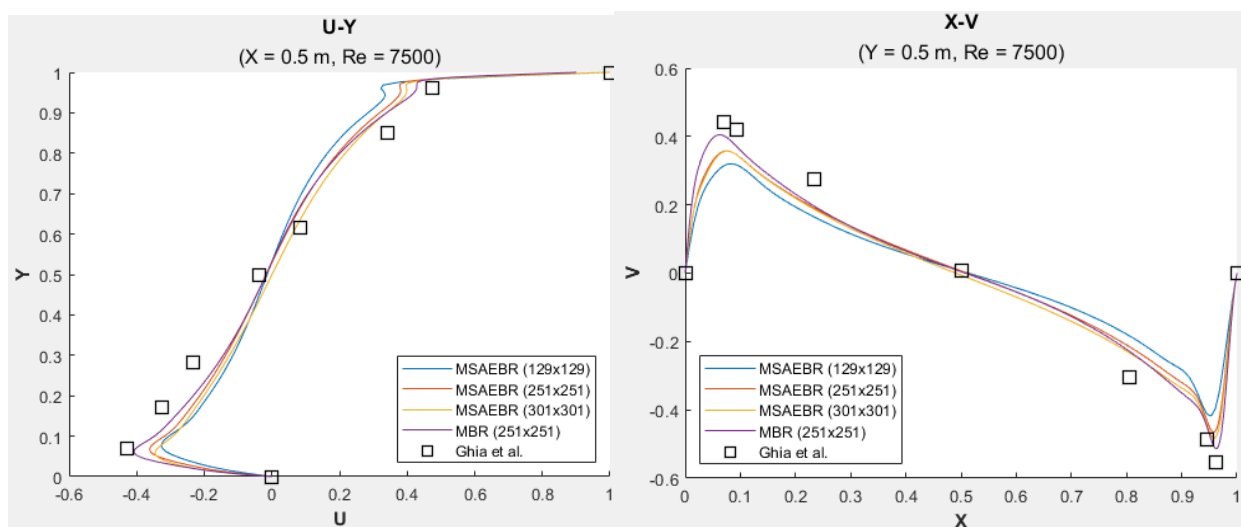


Figura 6. Resultados para Reynolds igual a 7500 com 450 mil iterações.

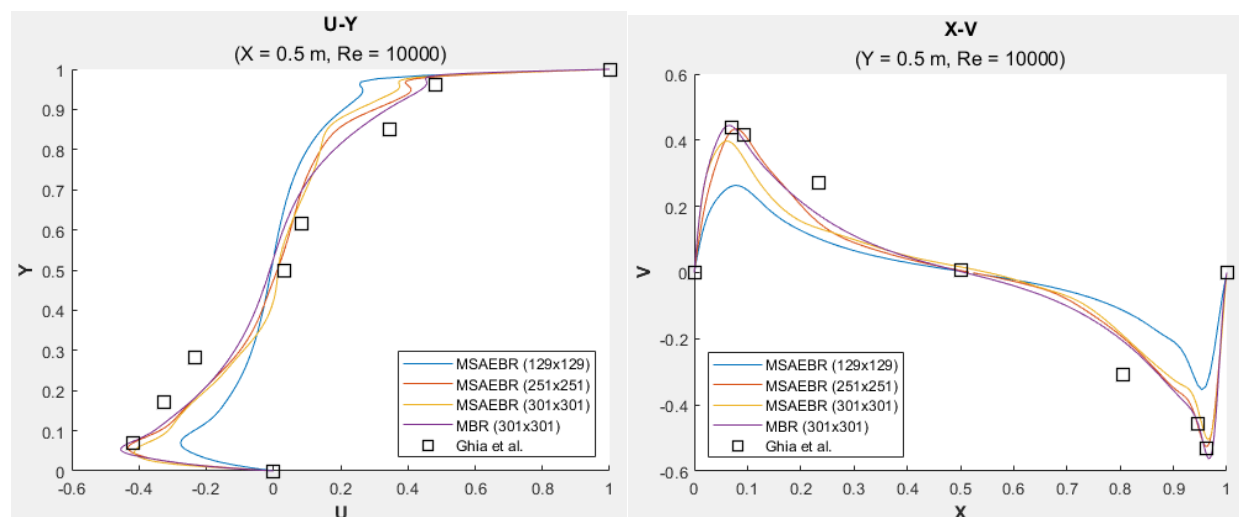


Figura 7. Resultados para Reynolds igual a 10000 com 450 mil iterações.

Esses resultados indicam, então, a preferência de aplicação do MSAEBR sobre o MBR nas situações de turbulência: o menor custo computacional e a maior estabilidade numérica do MSAEBR mostra que o método tem um melhor desempenho em relação ao MBR, além de apresentar maior acurácia nos resultados, fato contrário do observado nas situações de escoamentos laminares.

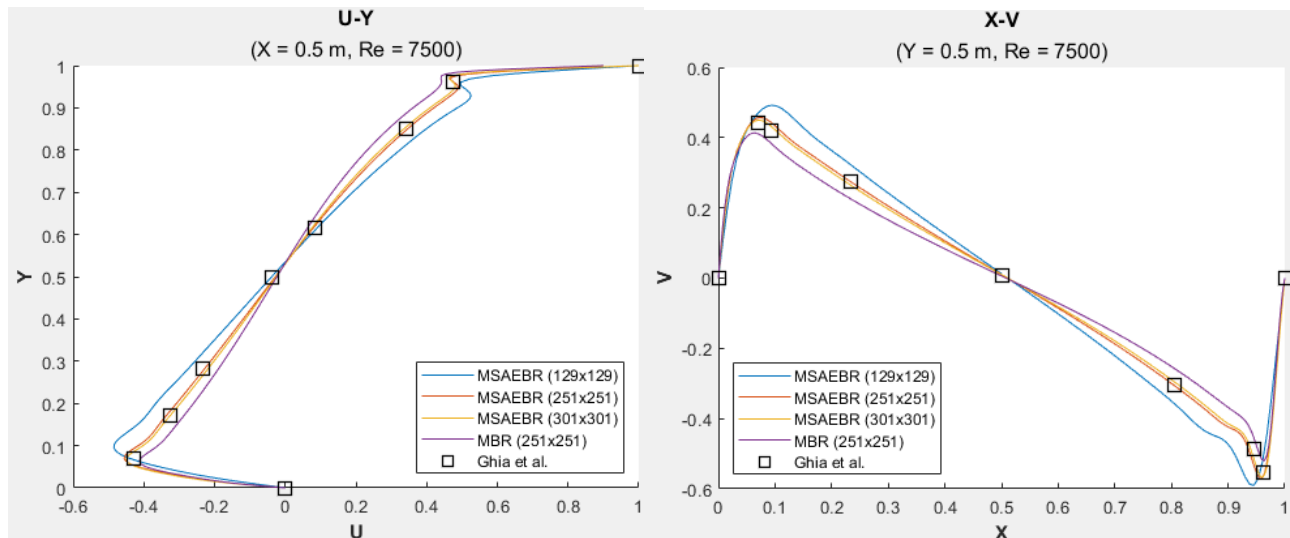


Figura 8. Resultados para Reynolds igual a 7500 e 1 milhão de iterações.

4. CONCLUSÕES

A vigente pesquisa empregou simulações utilizando-se do MBR e do MSAEBR para diferentes Números de Reynolds para compará-los em eficiência, custo de memória computacional, acurácia numérica dos resultados e estabilidade numérica, sobretudo nas situações de turbulência, presentes em maior quantia na engenharia.

Para escoamentos laminares, a menor eficiência do MSAEBR não é superada pelo seu menor custo de memória computacional, dando-se preferência para o emprego do MBR devido a acurácia e a estabilidade numérica de ambas metodologias, nessas circunstâncias, serem as mesmas. Contudo, uma possível preferência pelo MSAEBR pode surgir se somar o seu tempo rápido de simulação com a não necessidade de tratamento das condições de contorno em termos das funções de distribuição, tarefa esta complicada e demorada.

E, finalmente, para escoamentos turbulentos, o MSAEBR apresentou uma maior eficiência, estabilidade numérica e acurácia de resultados e menor custo de memória computacional do que o MBR, possibilitando simulações com malhas menores que não divergem mesmo para um elevado número de iterações. Tais vantagens contribuem para o emprego dessa nova vertente do MBR em simulações reais de engenharia, caracterizadas por altos números de Reynolds. O novo método também possui uma aplicação mais direta e prática do que o método convencional devido à não necessidade da tradução das condições de contorno, sendo mais fácil de ser assimilado por novos estudantes dessas metodologias.

5. REFERÊNCIAS

- Benzi, R., Succi, S. e Vergassola M., 1992. "The lattice Boltzmann equation: theory and applications". *Physics Reports*, Vol. 222, p.145-197.
- Ghia, U., Ghia, K.N. e Shin, C.T., 1982. "High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method". *Journal of Computational Physics*, Vol. 48, p.387-411.
- Chen, Z. e Shu, C., 2020. "Simplified and Highly Stable Lattice Boltzmann Method: Theory and Applications". *Advanced in Computational Fluid Dynamics*, Vol. 5.
- Chen, Z., Shu, C., Wang, Y., Yang, L. e Tan, D., 2017. "A simplified lattice Boltzmann method without evolution of distribution function". *Advanced in Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 9, p.1-22.
- Frisch, U., et al., 1987. "Lattice gas hydrodynamics in two and three dimensions". *Complex Systems*, Vol. 1, p.649-707.
- Huang, T. e Lim, H., 2020. "Simulation of Lid-Driven Cavity Flow with Internal Circular Obstacles". *Applied Sciences*, Vol. 10.
- Mohamad, A.A., 2019. *Lattice Boltzmann Method: Fundamentals and Engineering Applications with Computer Codes*. Springer London, 2ª edição.
- Samantary, D. E Das, M.K., 2019. "Nature of turbulence inside a cubical lid-driven cavity: Effect of Reynolds number". *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 80.

6. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.