

Análise de Pórticos de Euler-Bernoulli através do Método dos Elementos Finitos

Vitor Ramos Vasques, v206294@dac.unicamp.br¹
Prof. Dr. Carlos H. Daros, chdaros@unicamp.br²

^{1,2}Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) Faculdade de engenharia Mecânica (FEM), R. Mendeleiev, 200 - Cidade Universitária Campinas - SP, 13083-860.

Resumo. O presente artigo apresenta uma revisão didática do método dos elementos finitos. O objetivo é mostrar a introdução do MEF através do cálculo variacional. Como aplicação simples propõe-se o cálculo de pórticos compostos pela associação de elementos através de barras e vigas de Euler-Bernoulli. Um programa em Matlab foi elaborado para a ilustração do cálculo de pórticos. Resultados numéricos são validados através de soluções analíticas obtidas pelo princípio do trabalho virtual.

Palavras chave: Elementos Finitos. Pórticos. MEF

Abstract. This article presents a didactic review of the finite element method. The objective is to introduce FEM through variational calculus. As a simple application, the calculation of frames composed of the association of elements through bars and Euler-Bernoulli beams is proposed. A Matlab program was developed to illustrate the calculation of frames. Numerical results are validated through analytical solutions obtained using the principle of virtual work.

Keywords: Finite Elements Frames. FEM

1. INTRODUÇÃO SOBRE O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

É comum e necessário, na engenharia, o uso de aproximações para a resolução de problemas complexos. O Método dos Elementos Finitos (MEF) consiste, justamente, em representar uma geometria ou um carregamento de força difícil ou mesmo impossível de ser analisado analiticamente, por meio de sua subdivisão em partes menores, tratáveis com as ferramentas matemáticas disponíveis.

Diversas formas de discretização foram desenvolvidas, como o método da treliça, introduzido por Hrenikoff (1941), que representa um meio elástico plano como uma coleção de barras e vigas, ou o trabalho de Courant (1943), que utilizou elementos triangulares e o princípio da energia potencial total mínima (brevemente discutido neste artigo) para resolver problemas de torção.

O termo “elemento finito” foi utilizado pela primeira vez por Clough (1960). Desde então, o método de análise tem sido amplamente difundido, com vastas literaturas e periódicos dedicados à sua teoria e aplicação. Referências importantes sobre a história do método e seu princípio são apresentadas por autores como Zienkiewicz e Cheung (1967) e Oden e Reddy (1976).

Atualmente, setores industriais, como o aeronáutico, se beneficiam amplamente do método, aplicando-o, por exemplo, na análise de asas e fuselagens.

2. CÁLCULO VARIACIONAL

2.1 Valores Extremos

O cálculo variacional lida com funcionais, que são entidades dependentes de funções, ou seja, funções de funções. Ele estuda métodos para determinar seus valores extremos. Neste caso, será utilizado o método do princípio da mínima energia potencial.

2.2 Operador Variacional

Seja uma função F dependente de y e de sua derivada y' , dada por $F(x, y, y')$, sua solução exata seria uma função $y(x)$, porém, podemos aproximá-la por uma função admissível $\tilde{y}(x)$, de modo que essa nova função satisfaça as condições de contorno.

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \lambda \cdot \eta(x) \quad (1)$$

O termo $\eta(x)$ é uma função arbitrária, que satisfaz as condições de contorno, somada à função exata, enquanto λ é um valor pequeno o suficiente para minimizar o erro. O termo $\lambda \cdot \eta(x)$ é chamado de variação da função exata, e pode ser expresso como: $\delta y = \lambda \cdot \eta(x)$

A função admissível $\tilde{y}(x)$, pode ser derivada como qualquer outra função, e a derivada da sua variação pode ser representada por $\delta y'$. Com isso, é possível escrever a função F em termos da função admissível e encontrar a variação da função, ou seja, a F aplicada a $\tilde{y}(x)$ e $\tilde{y}'(x)$, subtraída da F aplicada a $y(x)$ e $y'(x)$. Fazendo, portanto, a variação de F , expandindo em série de Taylor a $F(x, \tilde{y}, \tilde{y}')$ e simplificando os termos, obtém-se a relação mostrada na Equação 2:

$$\Delta F = F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y') = \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \delta y' + \dots \quad (2)$$

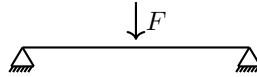
Observa-se na Equação 2 o operador variacional. Essa ferramenta matemática possui as mesmas propriedades do operador diferencial e, de forma análoga às funções diferenciais, a variação de $F(x, y, y')$ indica seus extremos quando igualada a zero.

3. MÉTODO APROXIMADO DE RAYLEIGHT-RITZ

Com a ferramenta do cálculo variacional apresentada na Seção 2, é possível, agora, encontrar funções aproximadas para funcionais. O método de Rayleigh-Ritz utiliza essa ferramenta para obter soluções aproximadas para flechas em vigas, como será apresentado a seguir.

De início, deve-se encontrar o funcional. Tratando-se de vigas ou colunas sujeitas a cargas, é possível afirmar que a energia potencial aplicada é armazenada como energia interna, desde que não se ultrapasse o regime elástico. Este é o princípio da energia potencial estacionária, onde não há dissipação de energia ou essa dissipação pode ser desprezada.

Como exemplificação, considera-se a viga biapoada apresentada a seguir:



As parcelas energéticas atuando na viga serão:

$$E_{potencial} = F \cdot y \longrightarrow \text{com } y \text{ o deslocamento devido a força}$$

$$E_{interna} = \frac{1}{2 \cdot E \cdot I} \int_0^L M^2(x) dx \longrightarrow \text{Energia sendo armazenada} \quad (3)$$

$$E_{potencial} = E_{interna} \longrightarrow \text{Energia potencial é armazenada em energia interna}$$

$$\Pi = E_{interna} - E_{potencial} \longrightarrow \text{Isolando os termos obtém-se o princípio da energia potencial estacionária}$$

Onde E é o módulo de elasticidade do material, I é o momento de inércia da seção transversal, $M(x)$ é o momento atuante ao longo da viga e L é seu comprimento total. A modelagem da viga é feita como uma linha, assumindo que seu comprimento é muito maior que sua área de seção transversal. Também, para esse caso, a parcela de energia interna de cisalhamento pode ser descartada, por representar um valor muito menor que a energia interna devido ao momento. Assim, aplicando o princípio da energia potencial estacionária e expressando o momento em função da flecha, obtém-se:

$$\Pi = \frac{E \cdot I}{2} \cdot \int_0^L (v''(x))^2 dx - F \cdot v(x) \quad (4)$$

Neste momento, assume-se uma função aproximadora para a função exata da flecha $y(x)$, sendo conveniente uma aproximação polinomial. Quanto maior a ordem do polinômio, melhor será a aproximação.

$$y(x) \approx v(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i \quad (5)$$

Aplicam-se as condições de contorno conhecidas a essa função aproximadora. Neste exemplo, as condições cinemáticas são $v(x = 0) = v(x = L) = 0$. Com as condições de contorno aplicadas, introduz-se a função aproximadora no funcional e, em seguida, realiza-se a variação desse funcional, conforme deduzido na Equação 2, por fim iguala essa variação a zero para garantir a estacionariedade, conforme mostrado a seguir.

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial a_0} \cdot \delta a_0 + \frac{\partial\Pi}{\partial a_1} \cdot \delta a_1 + \dots + \frac{\partial\Pi}{\partial a_n} \cdot \delta a_n = 0 \quad (6)$$

Como δa_n são arbitrárias e diferentes de zero, a única conclusão é que $\partial\Pi/\partial a_i = 0$

Isso permite encontrar um conjunto de n equações linearmente independentes que, quando resolvidas, fornecem as constantes a_i , possibilitando determinar a função aproximadora $v(x)$.

4. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Observando o método de Rayleigh-Ritz apresentado na Seção 3, é possível perceber que, se uma geometria ou carregamento complexo for discretizado em partes menores, tornam-se viáveis soluções antes desconhecidas ou muito difíceis de serem feitas analiticamente. Ao resolver a geometria original em domínios discretos simplificados, chega-se à proposta fundamental do Método dos Elementos Finitos.

4.1 Discretização

De início, deve-se observar o domínio do problema e discretizá-lo em elementos menores. A atenção nessa etapa facilita a resolução. Deixar forças ou momentos concentrados entre elementos simplifica o cálculo e a análise. Em casos de carregamentos distribuídos, onde se deseja obter, além da flecha, o esforço cortante, rotação e momento fletor, convém inserir mais elementos na região carregada para melhorar a resolução, conforme ilustrado abaixo.



4.2 Funções de forma

Seguindo a ideia apresentada na Seção 3, agora, para cada elemento criado, será feita uma aproximação polinomial. Para a aproximação de vigas, será utilizado um polinômio de ordem três. Para a aproximação de barras, será utilizado um polinômio de ordem dois.

Devem-se aplicar as condições de contorno para cada uma dessas equações. As junções dos elementos são chamadas de nós, e em cada nó assume-se (u_1, u_2) , (v_1, v_2) , (θ_1, θ_2) como os deslocamentos longitudinais, transversais e rotações do primeiro e segundo nó do respectivo elemento. Dessa forma, devem ser aplicadas essas condições de contorno arbitrárias a cada uma das equações dos n elementos.

Como resultado final, haverá n equações denominadas funções de forma, uma para cada elemento, com a seguinte estrutura de maneira mais geral para barra e viga, respectivamente:

$$\begin{aligned} u_n &= u_1(1 - \xi) + u_2\xi \\ v_n &= (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)v_1 + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)l\theta_1 + (3\xi^2 - 2\xi^3)v_2 + (\xi^3 - 2\xi^2)l\theta_2 \end{aligned} \quad (7)$$

Onde $\xi = x/L_n$, com L_n o tamanho do respectivo elemento.

Essas equações fornecem a flecha e o deslocamento longitudinal ao longo do comprimento de cada elemento e, como temos n equações, é possível obter o comportamento de todo o domínio do problema. Observe que a flecha pode ser derivada para obter a rotação, o momento fletor e o esforço cortante ao longo do comprimento. Porém, por ser uma função de ordem três, o momento (segunda derivada da flecha) e o esforço cortante (terceira derivada da flecha) perdem qualidade na aproximação. Isso justifica a necessidade de utilizar uma quantidade maior de elementos nas regiões onde há variações dessas forças, como em carregamentos distribuídos. Da mesma forma, a primeira derivada do deslocamento longitudinal fornecerá o esforço normal ao longo de x , porém com perda de qualidade na aproximação.

4.3 A matriz de rigidez

Para cada elemento, será montado o seu respectivo funcional, similar ao apresentado na Equação 4. Quando se trata apenas de vigas, sem forças longitudinais, a energia interna de todos os funcionais será igual à apresentada na Equação 4,

mutando apenas a expressão da energia potencial, a depender da característica da força, que será tratada na Subseção 4.4

Quando a função de forma v_n da Equação 7 for substituída na expressão da energia interna do funcional e for realizada a minimização desse funcional, como já ilustrado, obtêm-se quatro equações com valores que multiplicam os termos $v_1, \theta_1, v_2, \theta_2$. Esses termos, organizados em forma matricial, dão origem à matriz de rigidez local, que representa a quantidade de energia necessária para deformar o elemento. Ela apresentará o seguinte formato:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L_n^3} & \frac{6EI}{L_n^2} & -\frac{12EI}{L_n^3} & \frac{6EI}{L_n^2} \\ \frac{6EI}{L_n^2} & \frac{4EI}{L_n} & -\frac{6EI}{L_n^2} & \frac{2EI}{L_n} \\ -\frac{12EI}{L_n^3} & -\frac{6EI}{L_n^2} & \frac{12EI}{L_n^3} & -\frac{6EI}{L_n^2} \\ \frac{6EI}{L_n^2} & \frac{2EI}{L_n} & -\frac{6EI}{L_n^2} & \frac{4EI}{L_n} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Quando se trata de pórticos, nos quais há a contribuição de vigas e barras, haverá, além da energia interna devida ao momento fletor, a energia interna associada à força normal. Aplicando-se v_n para a energia devida ao momento fletor, como já citado, e u_n da Equação 7 para a energia devida à força normal, de maneira análoga, será obtida uma matriz multiplicando os termos $u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2$ conforme mostrado abaixo.

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L_n} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L_n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L_n^3} & \frac{6EI}{L_n^2} & 0 & -\frac{12EI}{L_n^3} & \frac{6EI}{L_n^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L_n^2} & \frac{4EI}{L_n} & 0 & -\frac{6EI}{L_n^2} & \frac{2EI}{L_n} \\ -\frac{EA}{L_n} & 0 & 0 & \frac{EA}{L_n} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L_n^3} & -\frac{6EI}{L_n^2} & 0 & \frac{12EI}{L_n^3} & -\frac{6EI}{L_n^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L_n^2} & \frac{2EI}{L_n} & 0 & -\frac{6EI}{L_n^2} & \frac{4EI}{L_n} \end{bmatrix} \quad (9)$$

4.4 A matriz de cargas nodais equivalentes

A energia potencial aplicada sobre o elemento resultará na matriz de cargas nodais equivalentes. Essa matriz indica as forças de translação e rotação aplicadas em cada nó do elemento.

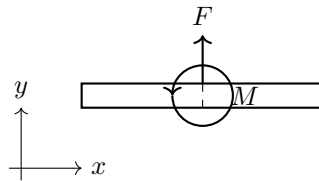
A posição e a natureza da força aplicada no elemento influenciarão diretamente nos esforços nodais. Como exemplo, considere uma viga biapoiada, conforme mostrado anteriormente na Seção 3. Ela está discretizada por um único elemento de comprimento L , que corresponde ao comprimento total da viga. Agora, a viga está submetida a um carregamento distribuído uniforme q , atuando para baixo ao longo de todo o seu comprimento. A energia potencial associada a esse sistema será dada por:

$$E_{\text{potencial}} = - \int_0^L q(x) \cdot v(x) dx \quad (10)$$

Ao minimizar o funcional, essa parcela de energia trará uma constante em cada uma das quatro equações do tipo:

$$r = \left[\frac{L_n \cdot q}{2} \quad \frac{L_n^2 \cdot q}{12} \quad \frac{L_n \cdot q}{2} \quad -\frac{L_n^2 \cdot q}{12} \right]^T \quad (11)$$

Será observado que aquelas forças ou momentos aplicados diretamente aos nós, ou seja, no início ou no fim dos elementos, serão posicionados na matriz de cargas nodais equivalentes, com seu valor na respectiva posição de atuação u, v, θ . Por exemplo, para a viga apresentada a seguir, com dois elementos e três nós sua matriz de rigidez será do tipo:

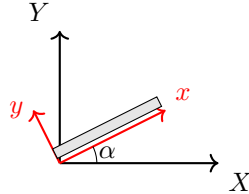


$$r = [0 \quad 0 \quad F \quad M \quad 0 \quad 0]^T = [v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2 \quad v_3 \quad \theta_3]^T \quad (12)$$

4.5 Os eixos de referência

Todas essas matrizes são válidas para os eixos locais de cada elemento. Quando resolvemos os n elementos do sistema, e esses elementos são rotacionados entre si, é necessário adotar um sistema global e utilizar a matriz de mudança de variáveis que relaciona os ângulos dos eixos locais aos eixos globais. Para isso, utilizamos a álgebra linear e determinamos a matriz de transformação, conforme mostrado a seguir.

Seja um elemento qualquer do sistema, com seus eixos locais formando um ângulo α em relação aos eixos globais, conforme ilustrado na figura:



A sua translação de eixos será:

$$\begin{aligned} x &= X \cdot \cos(\alpha) + Y \cdot \sin(\alpha) \\ v &= -X \cdot \sin(\alpha) + Y \cdot \cos(\alpha) \\ \theta &= \Theta \end{aligned} \quad (13)$$

A matriz de transformação dos eixos locais para os globais será, portanto:

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Tem-se, assim, que as matrizes de rigidez, de cargas nodais equivalentes e de resultados devem ser transformadas para o sistema global conforme:

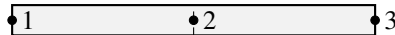
$$\begin{aligned} K_{\text{global}} &= T^T \cdot k_{\text{local}} \cdot T \\ R_{\text{global}} &= T^T \cdot r_{\text{local}} \\ V_{\text{global}} &= T^{-1} \cdot v_{\text{local}} \end{aligned} \quad (15)$$

4.6 Os resultados do sistema

É montado assim o sistema de equações nos eixos globais. Com a matriz de rigidez e o vetor de cargas nodais transladados, é possível montar a matriz de rigidez global final, que será quadrada, de tamanho $i \cdot d$, sendo i o número de nós do sistema e d a quantidade de graus de liberdade por nó, sendo dois para vigas (v, θ) e três para pórticos (u, v, θ). O vetor de cargas nodais finais será, portanto, um vetor coluna também de dimensão $i \cdot d$.

Haverá uma sobreposição das matrizes de rigidez locais na matriz global final, bem como o vetor de cargas nodais equivalentes final. Essa sobreposição considera os graus de liberdade que são comuns entre os elementos.

Como exemplo, observe a viga com dois elementos: ela terá duas matrizes de rigidez locais de tamanho 4×4 . Porém, com 3 nós e 2 graus de liberdade por nó, sua matriz de rigidez global final será do tipo 6×6 . Observa-se que o nó 2 apresenta deslocamentos e rotação em comum com o elemento 1 e 2.



$$K_{\text{global}} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L_1^3} & \frac{6EI}{L_1^2} & -\frac{12EI}{L_1^3} & \frac{6EI}{L_1^2} & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{L_1^2} & \frac{4EI}{L_1} & -\frac{6EI}{L_1^2} & \frac{2EI}{L_1} & 0 & 0 \\ -\frac{12EI}{L_1^3} & -\frac{6EI}{L_1^2} & \frac{12EI}{L_1^3} + \frac{12EI}{L_2^3} & -\frac{6EI}{L_1^2} + \frac{6EI}{L_2^2} & -\frac{12EI}{L_2^3} & \frac{6EI}{L_2^2} \\ \frac{6EI}{L_1^2} & \frac{2EI}{L_1} & -\frac{6EI}{L_1^2} + \frac{6EI}{L_2^2} & \frac{4EI}{L_1} + \frac{4EI}{L_2} & -\frac{6EI}{L_2^2} & \frac{2EI}{L_2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI}{L_2^3} & -\frac{6EI}{L_2^2} & \frac{12EI}{L_2^3} & -\frac{6EI}{L_2^2} \\ 0 & 0 & \frac{6EI}{L_2^2} & \frac{2EI}{L_2} & -\frac{6EI}{L_2^2} & \frac{4EI}{L_2} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Ao final, monta-se o sistema

$$[K] \cdot [V] = [R] \quad (17)$$

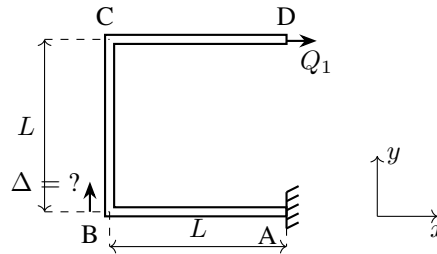
que quando solucionado, trará os valores

$$V = [u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2 \quad \dots]^T \quad (18)$$

que são os deslocamentos longitudinais, transversais e rotações em cada ponto no sistema global. Retornando esses resultados aos seus respectivos eixos locais, é possível aplicá-los às funções de forma v_n e u_n da Equação 7, obtendo, assim, além dos deslocamentos e rotações nos nós, os deslocamentos ao longo do elemento. Com suas derivadas, também se obtêm a rotação, o momento fletor, o esforço cortante e a força normal de todo o sistema.

5. APLICAÇÃO

Deseja-se obter os deslocamentos e rotações dos quatro pontos A, B, C, D da seguinte peça, sujeita a uma força Q_1 . Sabe-se que sua área é constante, da mesma forma que seu momento de inércia e módulo de elasticidade:



Os dados são:

- $I = 8 \cdot 10^{-5} [m^4] \rightarrow$ Momento de inércia da seção transversal | $A = 0.0645 [m^2] \rightarrow$ Área da seção transversal
- $E = 2.07 \cdot 10^{11} [Pa] \rightarrow$ Módulo de elasticidade | $Q_1 = 44500 [N] \rightarrow$ Força atuante
- $L = 3 [m] \rightarrow$ Comprimento

5.1 Métodos de validação

5.1.1 Estática

De início, observa-se que se trata de um problema isostático. Pela estática, obtêm-se as reações no engastamento em A , servindo como uma das bases para validar o método numérico que será construído:

$$\begin{aligned} F_e &= -Q_1 = -44500 [N] \rightarrow \text{No sentido oposto ao positivo de } x \\ M_e &= Q_1 \cdot L = 133500 [N \cdot m] \rightarrow \text{No sentido anti horário} \end{aligned} \quad (19)$$

5.1.2 Trabalho virtual

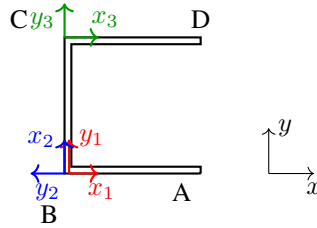
Aplicando o princípio do trabalho virtual no ponto B , obtêm-se o deslocamento Δ no sentido de y , de forma a obter mais uma validação do método numérico:

$$\Delta = \frac{L^3 \cdot Q_1}{2 \cdot E \cdot I} = 0.036277 [m] \quad (20)$$

5.2 Elementos finitos

5.2.1 Malha

Na peça em questão, observa-se que as forças atuantes são simples, não havendo nenhum tipo de carregamento distribuído, e também não é necessário o diagrama de esforço cortante ou momento fletor, apenas os deslocamentos e rotações nos pontos desejados. Logo, três elementos são suficientes, sendo o elemento 1 entre B e A com nó 1 em A e nó 2 em B , o elemento 2 entre B e C com nó 3 em C e o elemento 3 entre C e D com nó 4 em C . As suas coordenadas locais ficarão conforme a figura:



Essa malha, portanto, terá:

- 3 elementos
- 4 nós
- 12 graus de liberdade $\rightarrow 12 = n_{elementos} \cdot n_{ns}$, onde n = número

5.2.2 Matriz de rigidez

Como os elementos têm a mesma área, módulo de elasticidade e momento de inércia, a matriz de rigidez de cada um deles, apresentada na Equação 9, nos respectivos sistemas locais, será numericamente igual:

$$k_1 = k_2 = k_3 = \begin{bmatrix} 4.4505 & 0 & 0 & -4.4505 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0074 & 0.0110 & 0 & -0.0074 & 0.0110 \\ 0 & 0.0110 & 0.0221 & 0 & -0.0110 & 0.0110 \\ -4.4505 & 0 & 0 & 4.4505 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0074 & -0.0110 & 0 & 0.0074 & -0.0110 \\ 0 & 0.0110 & 0.0110 & 0 & -0.0110 & 0.0221 \end{bmatrix} \cdot 10^9 \quad (21)$$

Deve-se atentar que cada uma dessas matrizes deve ser multiplicada pela matriz de rotação mostrada na Equação 14 com seu tamanho ajustado para 6×6 , com os respectivos ângulos α entre os eixos global e local, para que o sistema esteja representado em um mesmo referencial.

Observa-se que cada matriz de rigidez local é do tamanho 6×6 e, como existem 4 nós, com cada nó apresentando 3 graus de liberdade u, v, θ , a matriz de rigidez global final deve ser do tamanho 12×12 , portanto haverá a sobreposição dos graus de liberdade em comum entre os elementos, conforme exemplificado na Subseção 4.6

5.2.3 Matriz de cargas nodais equivalentes

No problema em questão, observando no eixo global, existe apenas uma força aplicada na direção u no último nó. Portanto, forças concentradas em nós são diretamente aplicadas ao vetor de cargas nodais.

$$R = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ Q1 \ 0 \ 0]^T_{(1 \times 12)} \quad (22)$$

5.2.4 Resolução

Deve-se aplicar as condições de contorno para que o sistema seja possível e determinado. Observa-se que o nó 1, no engaste em A, não apresenta nenhum movimento. Dessa forma, são removidas as três primeiras linhas da matriz K global e anuladas suas três primeiras colunas. Da mesma forma, as três primeiras linhas da matriz R são anuladas.

6. Resultados

Resolvendo o sistema, obtém-se, portanto:

$$V = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.0363 \ -0.0242 \ 0.0967 \ 0.0363 \ -0.0363 \ 0.0968 \ -0.0726 \ -0.0363] \ m \quad (23)$$

Observa-se que a posição correspondente a y no nó 2 coincidiu com os valores obtidos pelo trabalho virtual. E, se for realizado o cálculo.

$$[K_{global}] \cdot [V_{global}] = [R_{global}] \quad (24)$$

com o resultado V_{global} obtido, serão retomados os valores nas reações de engaste na matriz de cargas nodais equivalentes, que haviam sido zeradas para a solução do sistema. Obtendo os mesmos valores calculados pela estática.

$$R = 1,0 \times 10^5 \cdot \begin{bmatrix} -0.4450 & 0 & 1.3350 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4450 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ N} \quad (25)$$

Graficamente, pode-se plotar a posição dos nós da estrutura e observar suas deformações como apresentado na Figura 1. Neste caso, não utilizaram-se as funções de forma — os nós foram apenas unidos por retas.

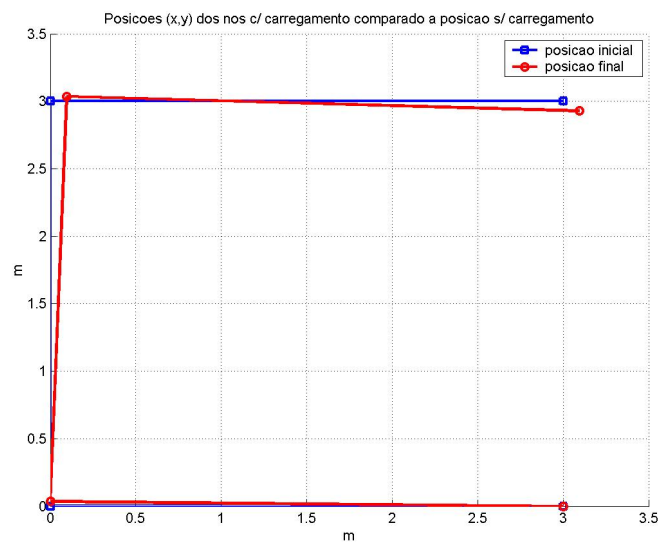


Figura 1. Deslocamento dos nós após aplicação da força

7. AGRADECIMENTOS

Este trabalho contou com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), por meio da concessão de bolsa do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC).

8. REFERÊNCIAS

Clough, R. W., *The Finite Element Method in Plane Stress Analysis*, Journal of Structures Division, ASCE. Proceedings of 2nd Conference on Electronic Computation, 345–378, 1960.

Courant, R., *Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations*, Bulletin of the American Mathematical Society, **49**, 1–23, 1943.

Hrenikoff, A., *Solution of Problems in Elasticity by the Frame Work Method*, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, **8**, 169–175, 1941.

Oden, J. T. and Reddy, J. N., *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*, John Wiley, New York, 1976.

SAVASSI, W. *Introdução ao Método dos Elementos Finitos em Análise Linear de Estruturas*, Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Carlos, 1996 *Livro base utilizado para aprender o Método*

Zienkiewicz, O. C., and Cheung, Y. K., *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, McGraw-Hill, London, 1967.

9. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.