

## DEFINIÇÃO DE CAOS, UM IMPORTANTE CONCEITO PARA A TURBULÊNCIA

Vitor Eduardo Pereira, [vitor.eduardo@ufu.br](mailto:vitor.eduardo@ufu.br)<sup>1</sup>  
Aristeu da Silveira Neto, [aristeus@ufu.br](mailto:aristeus@ufu.br)<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal de Uberlândia, Av. João Naves de Ávila, 2121,

**Resumo.** A turbulência pode ser entendida como um fenômeno caótico, tendo em vista sua imprevisibilidade, na qual a sutil variação de um parâmetro pode gerar grandes diferenças em relação a parâmetro iniciais. Dessa forma é importante o entendimento de sistemas caóticos para melhor compreensão do fenômeno, e para isso tomou-se um conjunto de equação e foi feita a sua resolução utilizando diferentes métodos de cálculo numérico, de mesma ordem, e comparações para resoluções com sutis variações de parâmetros iniciais de modo a verificar a caoticidade. E com o intuito de verificar as convergências dos métodos, foi feita a comparação entre eles, e também em relação a uma solução contínua para uma função não caótica e cujo resultado contínuo fosse conhecido e calculou-se a norma L2, assim obtendo resultados para essas comparações.

**Palavras chave:** turbulência, caos, imprevisibilidade, Lorenz.

**Abstract.** Turbulence can be understood as a chaotic phenomenon, given its unpredictability, where subtle parameter variations can lead to significant differences compared to initial parameters. Therefore, understanding chaotic systems is important for a better comprehension of the phenomenon. To achieve this, a set of equations was taken and solved using different numerical calculation methods of the same order. Comparisons were made for resolutions with slight variations in initial parameters to verify chaos. To assess method convergences, comparisons were made among them and also in relation to a continuous solution for a non-chaotic function, whose continuous result was known. The L2 norm was calculated, obtaining results for these comparisons.

**Keywords:** turbulence, chaos, unpredictability, Lorenz.

### 1. INTRODUÇÃO

A turbulência é um campo amplamente utilizado no estudo de mecânica dos fluidos. Seu entendimento possibilita a compreensão do problema e por vezes evitá-lo. Afinal, em certas ocasiões como no voo de uma aeronave, têm-se que a turbulência é indesejada uma vez que poderia acarretar em acidentes e instabilidades envolvendo a aeronave. Contudo para sua compreensão, faz-se necessário o entendimento do conceito de caos, e como identificar sua ocorrência e sua influência nos mais diversos tipos de equação.

No estudo das equações caóticas pode ser destacada principalmente a imprevisibilidade, que pode ser identificada quando na sutil mudança de parâmetro iniciais, resultados completamente diferentes são encontrados, e ao utilizar métodos numéricos de mesma ordem são encontrados resultados com significantes diferenças, após determinadas quantidades de iterações. Nesse sentido diversos autores publicaram sobre o tema, como (Devaney, 2003) que define um sistema como caótico se nele ocorrer três critérios, a densidade de pontos periódicos, a transitividade e sensibilidade às condições iniciais. O presente texto será voltado principalmente ao último, que diz que dado um  $x_0$  qualquer no domínio de uma função, e um  $\beta > 0$ , existirá um  $\varepsilon > 0$  tão pequeno quanto queira, tal que após um número suficiente de iterações será obtido  $|f^n_{(x_0)} - f^n_{(x_0+\varepsilon)}| > \beta$ , e é essa condição que possibilita a visualização de um sistema caótico. Ou seja, quando a sutil variação de um parâmetro inicial gera resultados diferentes após uma quantidade suficiente de iterações.

Essa discrepância de resultados também é esperada para os casos em que se utiliza integradores diferentes, ainda que de mesma ordem. Afinal após a primeira iteração, as condições para a segunda iteração vão estar com uma diferença, ainda que infinitesimal, e do enunciado de (Devaney, 2003), pode-se obter números, tão próximos quanto se queira, que após certa quantidades de iteração irão destoar os resultados. Dessa forma, ao resolver um sistema, e esse for caótico, os resultados destoarão para métodos de integração de mesma ordem.

### 2. METODOLOGIA

Nesse sentido, a fim de verificar essas condições e obter melhor compreensão desse fenômeno, foi estudado o sistema de Lorenz para diferentes métodos de Runge-Kutta de mesma ordem, e para um mesmo problema com uma sensível

variação em uma parâmetro inicial, a fim de verificar a caoticidade desse sistema. Foi feito, também, a validação para verificar a acurácia de cada método.

## 2.1 Sistema de Lorenz

### 2.1.1 Modelo Matemático

Para estudar sobre sistemas caóticos foi escolhido o Sistema de Lorenz que descreve um fenômeno matemático, sem significado físico mas por meio da sua resolução pode-se facilmente evidenciar a sua caoticidade em um sistema de EDO. As Equações de Lorenz são dadas pelas Eq. (1), Eq.(2) e Eq.(3).

$$\dot{x} = \sigma(y - x) \quad (1)$$

$$\dot{y} = x(r - z) - y \quad (2)$$

$$\dot{z} = xy - \beta z \quad (3)$$

Nessas equações  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  e  $\dot{z}$ , são as derivadas parciais em relação ao tempo para cada variável dependente, e  $\sigma$ ,  $r$ , e  $\beta$  são constantes.

Para o presente texto, adota-se  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$  e  $\beta = 8$ , como constantes para as equações, e como condições iniciais  $x(t_0) = y(t_0) = z(t_0) = 0, 1$ .

### 2.1.2 Modelo Numérico

Assim, partindo do modelo matemático diferencial foi utilizado dois integradores de Runge-Kutta para a resolução do problema, sendo um com quatro estágios e outro com cinco estágios, com o intuito de comparar as soluções de cada um dos métodos, e poder evidenciar as discrepâncias que os resultados podem apresentar entre si.

Calculou-se também, utilizando o integrador de Runge-Kutta com cinco estágios duas solução sendo uma com as mesmas condições que o teste anterior, e para a outra foram utilizados como condições iniciais  $x(t_0) = 0, 100001$  e  $y(t_0) = z(t_0) = 0, 1$ , visando verificar que uma mínima variação nos parâmetros de entrada irão causar grandes diferenças nos resultados. É válido ressaltar que em ambos os testes,  $t_0 = 0$ .

## 2.2 Equação Contínua

Foram, também, realizados procedimentos similares, usando os mesmos integradores, para verificar a precisão deles e analisar a sua validade. Para isso foi utilizada um problema, para o qual se conhece a solução contínua, e comparou a solução desse mesmo problema aos métodos de Runge-Kutta, que foram utilizados pra resolver o Sistema de Lorenz.

### 2.2.1 Modelo matemático

Assim foi selecionada uma EDO, cuja solução contínua e conhecida para os valores iniciais escolhidos. Esses sistema está disposto na Eq. (4).

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{t} + \cos(\pi \times t) \\ x(1) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Cuja solução analítica é dada pela Eq. (5):

$$x = \log(|t|) + \frac{\sin(\pi \times t)}{\pi} \quad (5)$$

### 2.2.2 Modelo numérico

Foi, portanto, resolvido o sistema pelos métodos de Runge-Kutta citados anteriormente, e foi feita a comparação de cada método com a solução contínua e entre eles, mas, também, foi feita uma comparação para uma pequena variação no parâmetro inicial. Além disso foi calculada a norma  $L_2$  para cada comparação. A norma  $L_2$  é dada pela Eq. (6).

$$L_2 = \frac{\sqrt{(\sum x_{1i}^2 + x_{2i}^2)}}{n} \quad (6)$$

## 3. RESULTADOS

Assim, foi criado uma rotina no Software MATLAB, para que se fosse possível resolver numericamente todos os problemas usando-se diferentes tipos de integradores, e também as diversas condições.

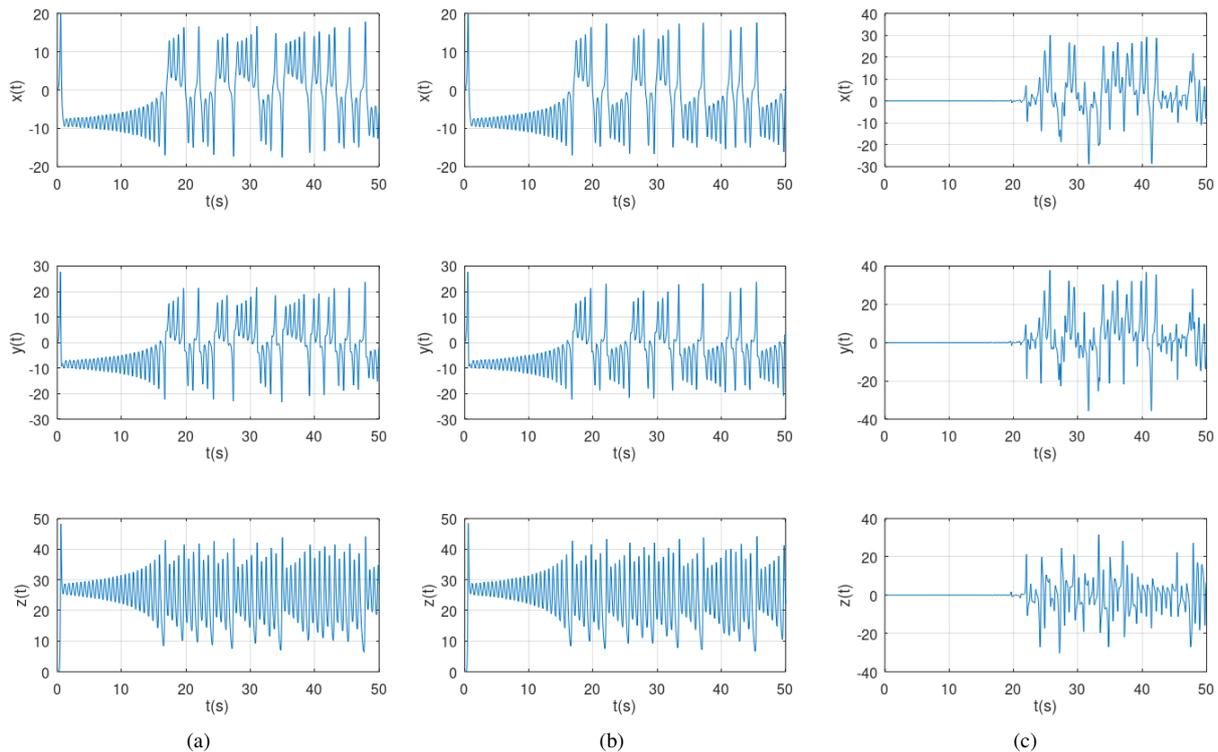


Figura 1: Diferenças entre os métodos de integração usados para resolver os Sistema de Lorenz; Resultado da solução de cada método: (a) utilizando o integrador de Runge-Kutta de 4ª ordem e quatro estágios; (b) utilizando o integrador de Runge-Kutta de 4ª ordem e cinco estágios; e (c) a diferença dos resultados de cada método.

### 3.1 Sistema de Lorenz

#### 3.1.1 Modelo Numérico

A Fig. 1 mostra as soluções de cada um dos métodos de integração numérica, além da comparação entre eles.

Portanto, é notório que por mais que sejam utilizados integradores de mesma ordem, ou seja, que possuem mesma acurácia, o fato de uma diferença infinitesimal entre uma iteração e outra, geraram resultados com grandes diferenças após uma certa quantidade de iterações.

A Fig. 2 mostra os resultados em que se utiliza diferentes condições iniciais, e a comparação entre eles, pela qual se percebe que, mesmo uma mínima mudança nos parâmetros iniciais, pode causar uma grande discrepância de resultados após uma quantidade suficiente de iterações.

Nesse gráfico observou-se que qualquer mudança, ainda que muito sensível, nas condições iniciais se propaga e gera um fenômeno completamente imprevisível, e assim verificando-se o que enunciou (Devaney, 2003) a respeito da sensibilidade às condições iniciais.

#### 3.2 Equação Contínua

Assim, para a equação contínua, a qual é possível obter a exata solução, foi possível a comparação deste resultado com as soluções numéricas para ambos os métodos de Runge-Kutta, a comparação entre eles, além da comparação de um mesmo método com variação no parâmetro inicial.

##### 3.2.1 Modelo numérico

Na Fig. 3, pode-se ver a comparação feita entre os métodos de Runge-Kutta de quarta ordem, para a qual resultou em um norma L2  $1,1881 \times 10^{-12}$ .

Para o segundo caso foi utilizado o Runge-Kutta de quatro estágios em comparação a solução contínua, e dessa forma foram novamente comparados os resultados e calculou-se a norma L2, para a qual resultou em  $1,1228 \times 10^{-12}$ . Essa comparação pode ser vista na Fig. 4.

Foi feita a mesma comparação para o Runge-Kutta de cinco estágios e a solução contínua, conforme mostra a Fig. 5, para a qual foi obtida uma norma L2 de  $6,5419 \times 10^{-14}$ .

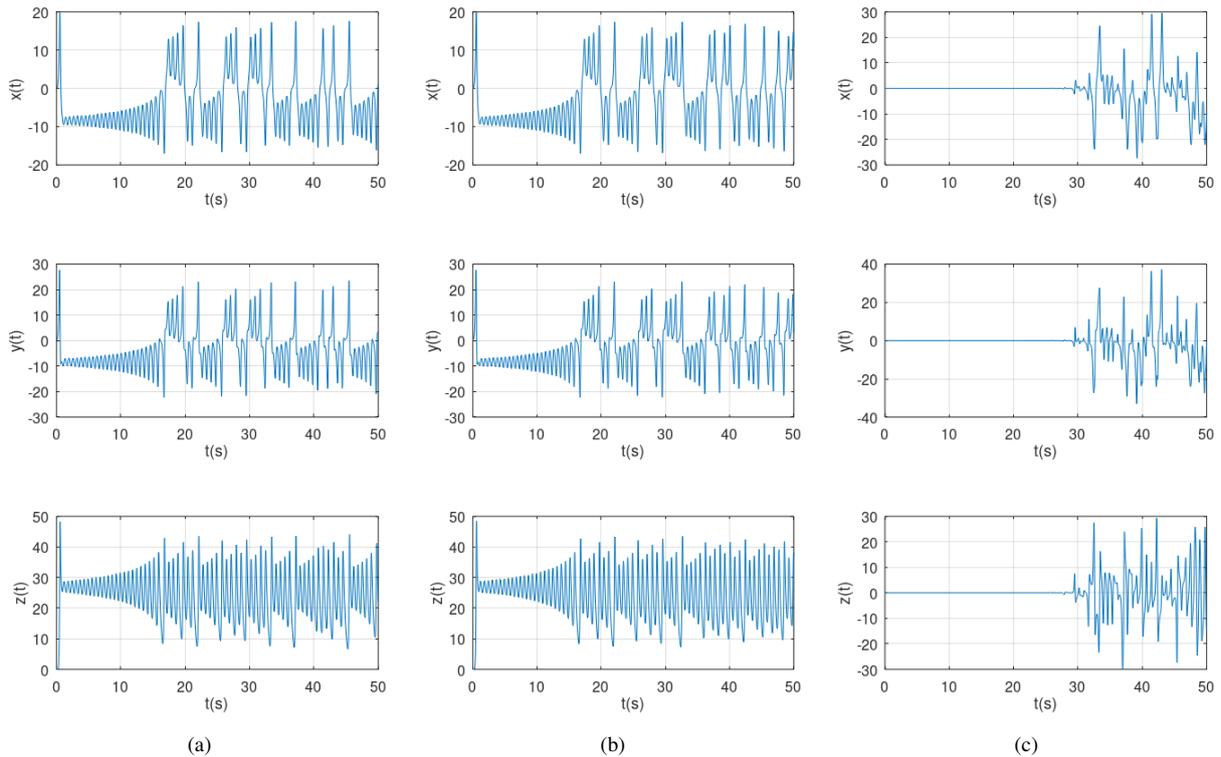


Figura 2: Diferenças quando se utiliza parâmetros iniciais com uma sensível diferença para um mesmo método de integração: (a) utilizando  $x_{(t_0)} = 0, 1$ ; (b) utilizando  $x_{(t_0)} = 0, 100001$ ; e (c) a diferença dos resultados para cada condição.

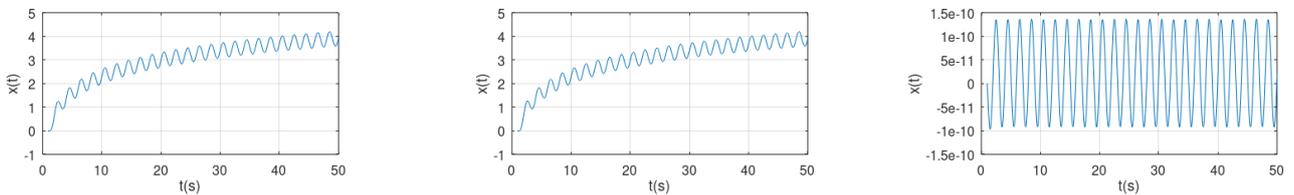


Figura 3: O primeiro gráfico mostra o resultado obtido por meio do Runge-Kutta com quatro estágios, o segundo com cinco estágios, e por fim a diferença entre eles.

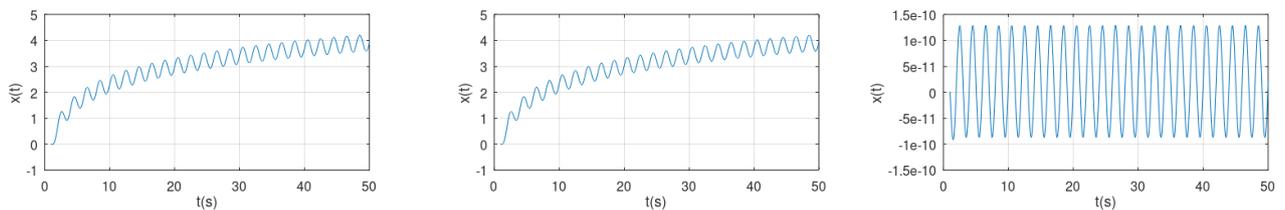


Figura 4: O primeiro gráfico mostra o resultado obtido por meio do Runge-Kutta com quatro estágios, o segundo a solução contínua, e por fim a diferença entre eles.

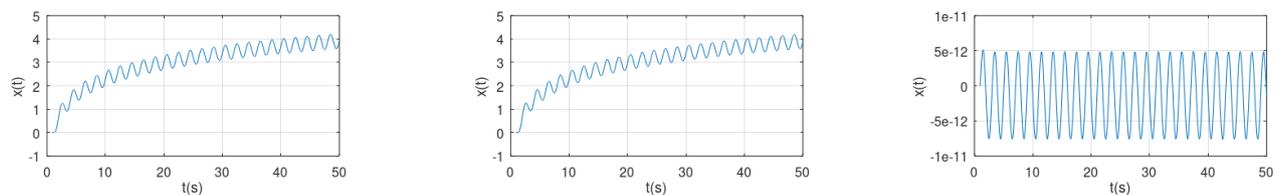


Figura 5: O primeiro gráfico mostra o resultado obtido por meio do Runge-Kutta com cinco estágios, o segundo a solução contínua, e por fim a diferença entre eles.

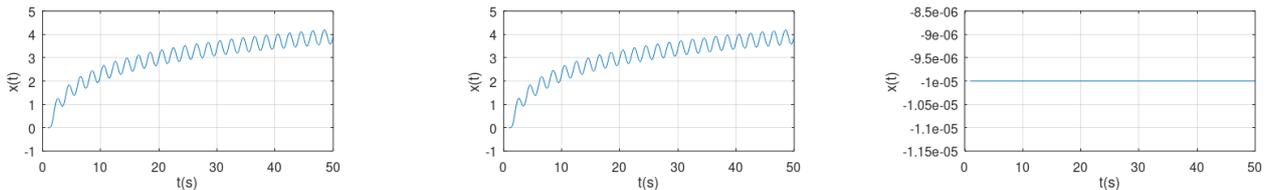


Figura 6: O primeiro gráfico mostra o resultado obtido por meio do Runge-Kutta com cinco estágios, utilizando  $x_{(1)} = 0$ , o segundo utilizando  $x_{(1)} = 0,000001$ , e por fim a diferença entre eles.

Por fim, realizou-se uma comparação usando o Runge-Kutta de cinco estágios, sendo uma solução com  $x_{(1)} = 0$ , e a outra com  $x_{(1)} = 0,000001$ , esse resultado pode ser visualizado na Fig. 6.

Nota-se que os resultados permaneceram similares e com diferença constante após as iterações, apesar da diferença das condições iniciais, o oposto do que ocorreria em um sistema caótico.

Dessa forma, evidencia-se que os resultados se aproximam bastante do contínuo, independente da escolha do método, e, inclusive, quando comparado os dois métodos os resultados de ambos são bem próximos, e o erro obtido está na ordem de  $10^{-12}$ . Além disso, verificou-se que para sistemas que não são caóticos, a mínima variação de um parâmetro não reflete em um resultado distoante.

#### 4. CONCLUSÃO

Portanto, por meio do Sistema de Lorenz, é possível observar o fenômeno da caoticidade e ter melhor visão sobre como mínimas variações de parâmetro podem afetar um resultado após quantidades suficientes de iterações, e que até mesmo diferentes métodos de integração proporcionam grandes diferenças nas soluções de sistemas caóticos. Apesar dos métodos de integração serem diferentes, foi feito uma análise sobre uma EDO cuja solução contínua era conhecida, e comprovou-se a acurácia dos métodos, além de comprovar que em sistemas em que não se ocorre caos a sensibilidade às condições pode não ser observada.

#### 5. AGRADECIMENTOS

P. Vitor é grato ao professor Aristeu pela oportunidade de desenvolver esse trabalho.

#### 6. REFERÊNCIAS

Devaney, R.L., 2003. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. CRC Press, 2nd edition.

#### 7. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.