

TEORIA DE FILME FINO APLICADA À MODELAGEM MATEMÁTICA DE MANCAIS FLUIDODINÂMICOS

Thiago Assis da Silva

thiagoassidasilva@ufu.br

Aristeu da Silveira Neto

aristeus@ufu.br

Laboratório de Mecânica dos Fluidos Computacional, Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, Brazil.

Aldemir Ap. Cavallini Jr.

aacjunior@ufu.br

Laboratório de Mecânica de Estruturas "Prof. José Eduardo Tannús Reis", Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, Brazil.

Resumo. A modelagem de mancais fluidodinâmicos tem sido desenvolvida e utilizada com base no modelo clássico de Reynolds, com o qual é possível calcular a carga que pode ser sustentada e a posição do eixo em relação a uma carga específica. Esta teoria se presta à simulação em regime permanente ou mesmo em um pseudotransiente, no sentido de que a carga é fornecida e a posição que é determinada para obter equilíbrio. No presente trabalho, é apresentada uma nova proposta para a modelagem desse sistema dinâmico, baseada na teoria de filmes finos. O modelo proposto é unidimensional para velocidade, pressão e temperatura. O que é obtido é a informação média na direção radial, mas como uma função da coordenada tangencial e do tempo. O movimento do eixo é transmitido ao fluido através da modelagem da tensão entre o fluido e o eixo e entre o fluido e o mancal. No presente trabalho, os detalhes da modelagem serão apresentados, mas os resultados ainda estão relacionados aos fluxos tangenciais. Comparações com os resultados de outros métodos são apresentadas. A promessa dessa proposta é a modelagem e simulação da dinâmica de sistemas de eixo-mancal em regime transiente. Também se espera baixo custo computacional, já que o modelo é unidimensional. Os resultados a serem apresentados são promissores.

Palavras-chave: Filme Fino, Simulação Numérica, Teoria da Lubrificação, Mancais Fluidodinâmicos, Maquinas Rotativas

Abstract. The modeling of hydrodynamic bearings has been developed and utilized based on the classic Reynolds model, which allows for the calculation of the load that can be sustained and the position of the shaft relative to a specific load. This theory lends itself to simulation in steady-state or even in a pseudo-transient manner, in the sense that the load is supplied and the position is determined to achieve equilibrium. In this paper, a new proposal for modeling this dynamic system is presented, based on thin film theory. The proposed model is one-dimensional for velocity, pressure, and temperature. What is obtained is the average information in the radial direction, but as a function of the tangential coordinate and time. The motion of the shaft is transmitted to the fluid through modeling the stress between the fluid and the shaft, and between the fluid and the bearing. In this paper, the modeling details will be presented, but the results are still related to tangential flows. Comparisons with the results of other methods are provided. The promise of this proposal is the modeling and simulation of the dynamics of shaft-bearing systems in a transient regime. Low computational cost is also expected, as the model is one-dimensional. The results to be presented are promising.

Keywords: Thin Film, Numerical Simulation, Lubrication Theory, Hydrodynamics Bearings, Rotordynamics

1. INTRODUÇÃO

Segundo White (2022), a lubrificação desempenha um papel crucial na redução do atrito entre corpos em contato próximo. O uso de um fluido viscoso em uma folga estreita e variável entre os corpos permite um deslizamento suave, minimizando o atrito e o desgaste.

Newton (1687) formulou as leis do movimento e da gravidade, estabelecendo os fundamentos da física clássica. Embora ele não tenha abordado diretamente a mecânica dos fluidos, suas leis são aplicadas no estudo do comportamento dos fluidos.

Contribuições significativas para a matemática aplicada em física e engenharia foram feitas por Euler (1755). Euler formulou a equação de conservação de massa e aplicou equações diferenciais para analisar o fluxo de fluidos.

Expandindo o trabalho de Euler, Navier (1822) considerou a viscosidade dos fluidos e formulou as equações de Navier-Stokes, que descrevem o movimento de fluidos viscosos, levando em conta a tensão viscosa entre as camadas de fluido. Além disso, Stokes (1845) reformulou as equações de Navier-Stokes para fluidos com baixos números de Reynolds. Ele

desenvolveu as Equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis, que simplificam as equações para fluxos laminar e incompressível de fluidos com baixas velocidades ou viscosidades.

A base teórica para os mancais fluidodinâmicos foi estabelecida por Reynolds (1886), que derivou a equação de Reynolds para descrever o perfil de pressão entre superfícies móveis lubrificadas. Reynolds também explorou a aproximação para mancais infinitamente longos. Este trabalho foi fundamental para os avanços na teoria dos mancais fluidodinâmicos e influenciou o desenvolvimento de técnicas de modelagem e simulação.

Embora Sommerfeld (1904) tenha obtido uma expressão analítica explícita para mancais infinitamente longos, suas condições de contorno não consideraram a ruptura do filme e exibiram uma distribuição de pressão negativa na zona divergente da cunha. Swift (1932) e Stieber (1933) introduziram novas condições de contorno que representam a saída de lubrificante, que ainda são usadas hoje para cálculos de mancais com carga constante. Ocvirk (1952) desenvolveu uma solução detalhada para mancais infinitamente curtos, que ainda é amplamente utilizada. Pinkus (2022) foi o primeiro a usar computadores para cálculos numéricos de pressão em mancais circulares, elípticos e lobados.

Os conceitos básicos dos mancais fluidodinâmicos são abordados nos trabalhos de Hamrock (1994), J Frene (1997) e, mais recentemente, Ishida and Yamamoto (2013). Esses trabalhos utilizam equações aproximadas tanto para mancais curtos quanto infinitamente longos.

Uma modelagem mais precisa da geometria dos mancais é proposta por Mota *et al.* (2022).

Este artigo apresenta uma proposta nova e mais eficaz para resolver os campos de pressão e velocidade nos mancais. O método de diferenças finitas, proposto por Cauchy (1829)¹, será usado para discretizar as equações de conservação de massa e momento linear, permitindo uma descrição mais detalhada e transiente do problema. A solução obtida será comparada com o modelo clássico de Reynolds. O modelo computacional proposto será analisado para mancais cilíndricos com ângulo de atitude predeterminado e excentricidade do eixo.

Da Silva *et al.* (2023) foi o pioneiro na aplicação do método apresentado aqui. No entanto, este estudo propõe uma melhoria significativa em relação a ele.

O trabalho atual está dividido em diferentes seções. A Seção 2 apresenta as suposições (simplificações) do problema, bem como a modelagem matemática diferencial, incluindo a equação de continuidade e a equação de balanço de momento linear. A Seção 3 realiza a discretização para obter o campo de pressão e o campo de velocidade usando o método de diferenças finitas. Os resultados e as respectivas comparações de métodos são apresentados na Seção 4. Finalmente, as conclusões são apresentadas na Seção 5.

2. MODELO MATEMÁTICO DIFERENCIAL

Este artigo fornece uma análise da dinâmica do fluxo de fluidos no espaço anular entre dois cilindros. Embora o foco principal seja nos mancais fluidodinâmicos, as ideias discutidas aqui podem ser extrapoladas para outras aplicações, como selos. A Figura 1 ilustra esquematicamente as geometrias e configuração de um mancal excêntrico.

Reynolds descreve a distribuição de pressão angular entre dois corpos cilíndricos como uma função da variação da folga $h(\theta)$, do raio do eixo R_i , da viscosidade do fluido μ e da velocidade de rotação do eixo ω . A Equação 1 mostra como esses termos estão relacionados:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(h(\theta)^3 \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) = 6\mu\omega R_i^2 \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta}. \quad (1)$$

O artigo de Mota *et al.* (2022) também descreve uma equação para a variação da velocidade angular ao longo do raio do mancal. O modelo de Reynolds tem uma limitação significativa imposta pelo número de Reynolds do sistema em operação, que deve ser tal que o número de Reynolds modificado (White, 2022) seja $Re^* \ll 1$. Embora não tenha sido avaliado, estima-se que a nova proposta apresentada neste artigo também supere essa limitação.

2.1 Suposições

A modelagem convencional de Reynolds descreve a velocidade angular como uma componente bidimensional ($v_\theta(r, \theta)$). Ao se fazer essa consideração reduz-se o custo computacional de forma significativa, visto que o sistema linear a ser resolvido pelo acoplamento pressão-velocidade se torna muito menor. Este estudo propõe que este perfil de velocidade possa ser calculado como uma média ao longo do raio do mancal, uma vez que a folga entre o eixo e o mancal é muito pequena. Assim, a velocidade angular se torna uma média ao longo de r e se torna unidimensional, variando apenas em θ ($\bar{v}_\theta(\theta)$).

Este estudo não considera a força peso exercida pelo eixo sobre o filme de óleo, o que significa que o gradiente de pressão calculado é causado exclusivamente pelo estreitamento da folga. Essa pressão, similar ao que Reynolds calculou, não varia ao longo do componente radial do mancal. A folga h varia ao longo do componente angular; no entanto, a variação é zero ao longo do tempo.

¹Embora seja creditado como o criador do método, trabalhos anteriores como Takakazu (1674) utilizaram métodos semelhantes.

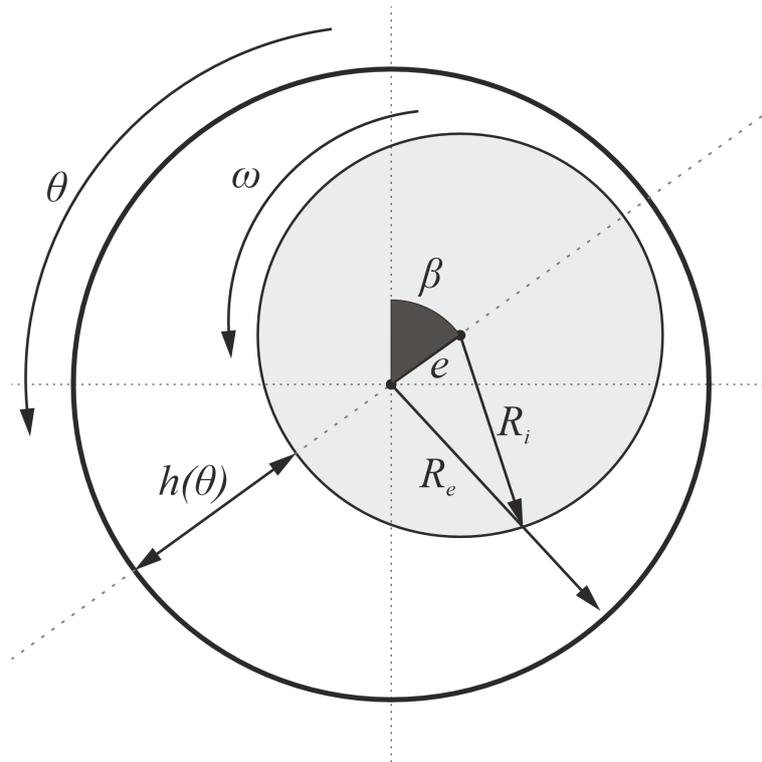


Figura 1. Diagrama esquemático de um mancal com um eixo excêntrico em relação ao mancal.

2.2 Equações de Balanço

A abordagem de modelagem proposta baseia-se em duas equações de balanço: a equação de conservação de massa e a equação de balanço de momento linear. Ambas as equações são derivadas usando o conceito de expansão em série introduzido por Taylor (1715).

Com base nas suposições e conceitos estabelecidos pelas figuras proeminentes mencionadas na Seção 2, pode-se escrever as equações simplificadas para conservação de massa e balanço de momento linear para um fluido incompressível com uma massa específica ρ . Essas equações são apresentadas como Eq. 2 e Eq. 3, respectivamente:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (h\bar{v}_\theta) = 0, \quad (2)$$

e

$$\frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial t} + \frac{2}{2R_e - h} \bar{v}_\theta \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial \theta} = \frac{2h}{\rho(2R_e - h)} \left(-\frac{\partial hP}{\partial \theta} + \frac{\partial h\tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} \right) + \frac{F_{ext}}{\rho}. \quad (3)$$

As equações de Navier-Stokes incluem termos para tensões viscosas. O termo $\tau_{\theta\theta}$ representa as tensões normais, também conhecidas como "tensões de Stokes". Ele é calculado como a variação pontual da velocidade multiplicada pela viscosidade do fluido μ e dividida pelo valor avaliado de r , conforme mostrado na Eq. 4:

$$\tau_{\theta\theta} = \frac{2\mu}{R_e - h/2} \frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial \theta}. \quad (4)$$

As equações de Navier-Stokes também incluem um termo para tensão tangencial $\tau_{r\theta}$, que depende da variação da velocidade angular ao longo de r . Conhecendo as velocidades do eixo e da parede do mancal, temos as condições de contorno para determinar a velocidade. O presente trabalho não utiliza discretização na direção r , então essas tensões devem ser modeladas de uma forma não convencional para impor as condições de não deslizamento no sistema. O termo F_{ext} na Eq. 3 modela essas tensões para satisfazer as mesmas condições. A Equação 5 utiliza uma analogia à modelagem convencional usada para determinar tensões nas paredes do mancal. Ela representa a diferença nas tensões aplicadas em ambas as paredes.

$$F_{ext} = \left(\tau_{r\theta} \Big|_{r=R_e} - \tau_{r\theta} \Big|_{r=R_e-h} \right) = \mu \left(\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{\bar{v}_\theta}{r} \right) \Big|_{r=R_e} - \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{\bar{v}_\theta}{r} \right) \Big|_{r=R_e-h} \right). \quad (5)$$

A Equação 6 fornece uma visualização clara do fator ϵ , que é a razão entre a excentricidade e e a folga radial:

$$\epsilon = \frac{e}{R_e - R_i}. \quad (6)$$

Finalmente, a função $h(\theta)$ representa a distância entre qualquer ponto R_θ (Mota *et al.*, 2022) na superfície do eixo e a superfície do mancal fixo. Portanto, a função da folga pode ser calculada usando a Eq. 7:

$$h(\theta) = R_e - \left(e(\theta + \beta) + \sqrt{R_i^2 - e^2 + e^{22}(\theta + \beta)} \right). \quad (7)$$

3. MODELO MATEMÁTICO DISCRETO

Uma vez que as equações diferenciais governantes são definidas, as discretizamos para resolvê-las computacionalmente usando a linguagem de programação Fortran. Como mencionado anteriormente, este trabalho difere dos outros por tratar duas dimensões como uma, o que reduz o custo computacional. Assim, a malha computacional é dividida apenas ao longo do componente θ . A Figura 2 fornece uma ilustração detalhada da diferença significativa entre os dois métodos.

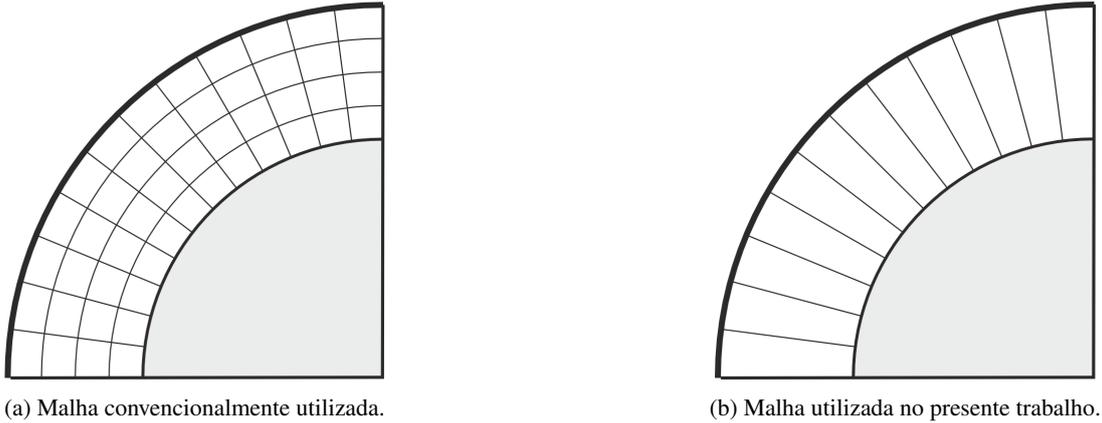


Figura 2. Diferença nas malhas utilizadas.

Portanto, aplicando o método de diferenças finitas, juntamente com o conceito de malhas deslocadas (Harlow and Welch, 1965), para discretização espacial e o método de Euler (1768) para discretização temporal, reescrevemos a Eq. 3 de forma discretizada:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{v}_{\theta_j}^n - \bar{v}_{\theta_j}^{n-1}}{\Delta t} + \frac{2\bar{v}_{\theta_j}^{n-1}}{2R_e - h_j} \frac{\bar{v}_{\theta_{j+1}}^{n-1} - \bar{v}_{\theta_{j-1}}^{n-1}}{2\Delta\theta} \\ = \frac{2h_j}{\rho(2R_e - h_j)} \left(- \left(\frac{h_i P_i^n - h_{i-1} P_{i-1}^n}{\Delta\theta} \right) + \left(\frac{h_i \tau_{\theta\theta i}^{n-1} - h_{i-1} \tau_{\theta\theta i-1}^{n-1}}{\Delta\theta} \right) \right) + \frac{F_{ext}^{n-1}}{\rho}, \end{aligned} \quad (8)$$

onde, de acordo com a Eq. 4, temos:

$$\tau_{\theta\theta i}^{n-1} = \frac{2\mu}{R_e - h_i/2} \frac{\bar{v}_{\theta_{j+1}}^{n-1} - \bar{v}_{\theta_j}^{n-1}}{\Delta\theta}, \quad (9)$$

e o termo F_{ext} após algumas simplificações se torna:

$$F_{ext}^{n-1} = 3\mu \left(\frac{2(\omega R_i - 2\bar{v}_{\theta_j}^{n-1})}{h_j} - \frac{\bar{v}_{\theta_j}^{n-1}}{R_e - h_j/4} + \frac{\bar{v}_{\theta_j}^{n-1}}{R_e - 3h_j/4} \right), \quad (10)$$

onde os subscritos i e j representam a posição do nó na malha (exceto para R_i), onde i representa a posição de um ponto

onde a pressão é calculada e j representa um ponto onde a velocidade é calculada, e $\Delta\theta$ é o tamanho da divisão espacial. A Figura 3 representa o esquema das malhas deslocadas. Os sobrescritos n e $n - 1$ representam a iteração de tempo, onde n é a iteração no passo de tempo atual quando as variáveis estão sendo calculadas, e $n - 1$ é a iteração anterior onde os valores das variáveis já são conhecidos. Outro ponto importante a destacar é a natureza periódica do sistema. Ou seja, para a malha mostrada na Figura 3, a velocidade em $j - 1$ é igual à velocidade calculada em $j + 2$.

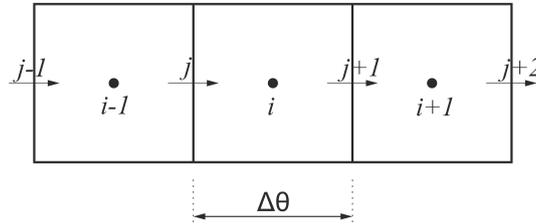
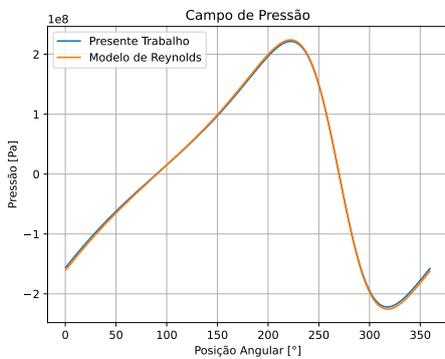


Figura 3. Esquema nodal da malha.

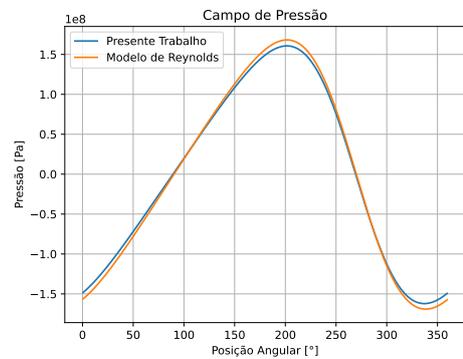
A equação envolve duas variáveis a serem resolvidas no passo de tempo n , que são interdependentes. O método dos passos fracionados proposto por Chorin (1968) foi empregado para obter os campos de velocidade e de pressão. Para a solução eficiente do sistema linear, o método Bi-CGSTAB (Van der Vorst, 1992) foi implementado.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

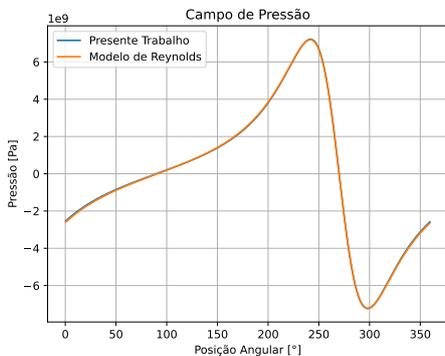
O método proposto neste estudo mostrou-se convergente e estável. Dentro das limitações impostas pelo modelo de Reynolds ($Re^* \ll 1$), o potencial completo do novo modelo ainda não foi totalmente explorado. Foram simuladas várias configurações de mancais, incluindo diferentes velocidades, excentricidades, folgas e dimensões do eixo, e comparadas ao modelo convencional. A Figura 4 apresenta algumas comparações entre os resultados do campo de pressão obtidos usando o modelo proposto. A Tabela 1 apresenta as configurações utilizadas para cada um dos casos mostrados na Figura 4.



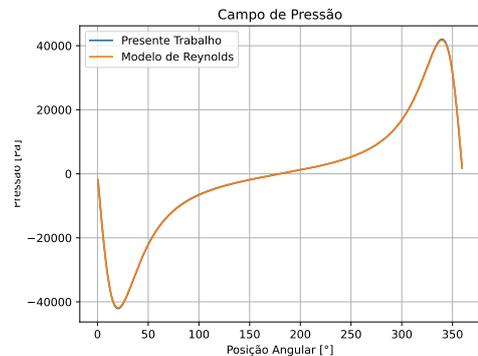
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4. Distribuição de pressão para diferentes configurações.

Tabela 1. Configurations of the presented bearings.

Caso	R_e [m]	R_i [m]	ϵ	ω [RPM]	β [°]	μ [Pa.s]	ρ [kg/m ³]	Re^*
Figura 4a	50.00E-3	48.00E-3	0.50	10000	180	1.0E2	1000.0	1.47E-2
Figura 4b	60.00E-3	55.00E-3	0.25	50000	180	1.7E2	500.0	9.16E-2
Figura 4c	60.00E-3	58.00E-3	0.75	50000	180	1.7E2	776.0	4.58E-2
Figura 4d	52.00E-3	51.00E-3	0.85	100	90	8.1E-2	914.0	6.37E-2

A Figura 5 mostra os perfis de velocidade média (\bar{v}_θ) resultantes. A sequência de imagens é a mesma apresentada na Figura 4. As velocidades são um tanto contraditórias quando avaliadas em relação ao princípio de Bernoulli (Bernoulli, 1738), mas é importante notar que o princípio de Bernoulli é válido apenas para fluxos invíscidos, ao contrário do caso avaliado aqui, que possui $Re^* \ll 1$. Em outras palavras, as forças viscosas predominam sobre as forças inerciais.

Os resultados mostram que os dois métodos diferem ligeiramente, como esperado, uma vez que o método proposto inclui forças inerciais em suas equações. Novas propostas para modelar as tensões tangenciais serão discutidas no futuro para melhorar a convergência do modelo.

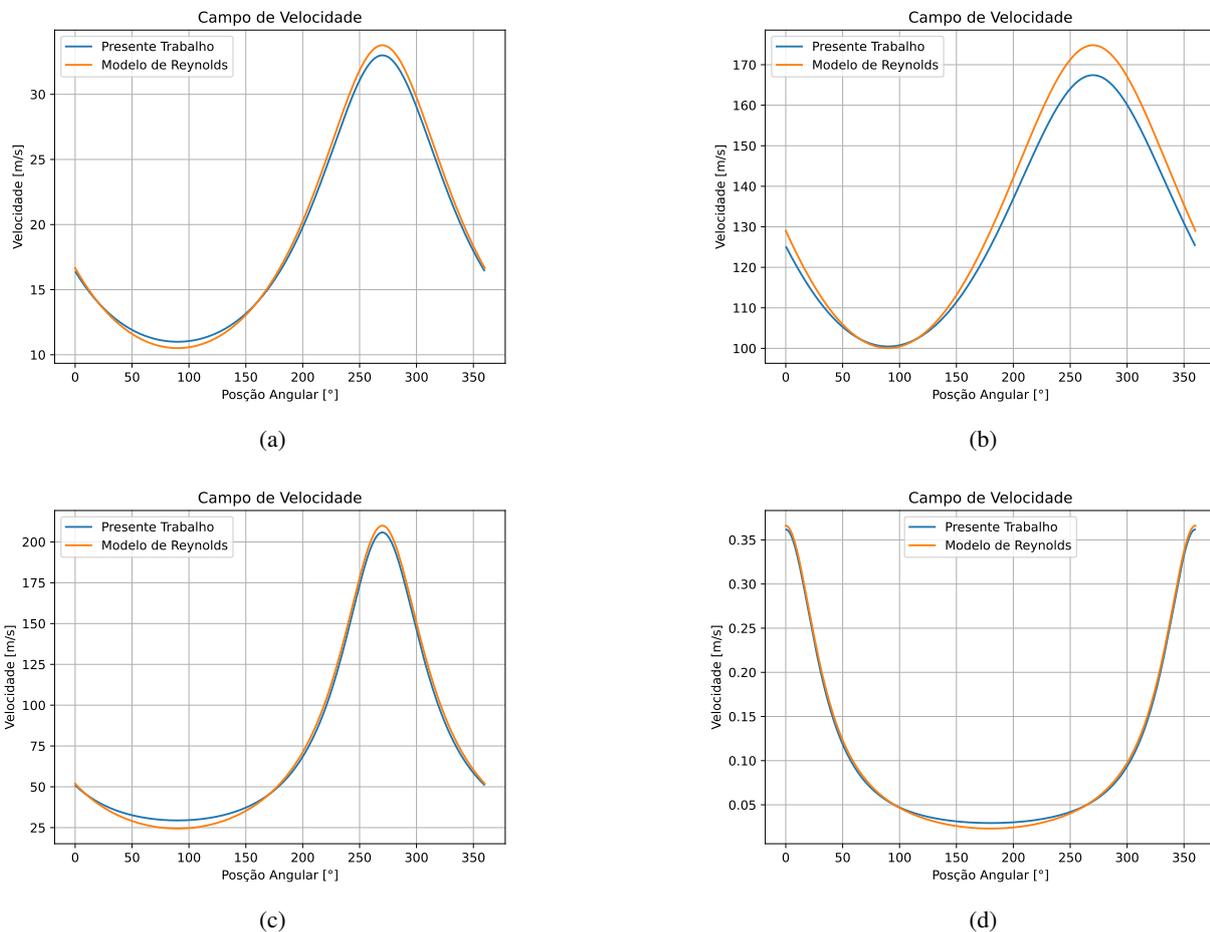


Figura 5. Distribuição de Velocidade para diferentes configurações.

5. CONCLUSÃO

O método proposto para modelagem e resolução dos campos de pressão e velocidade em mancais fluidodinâmicos produziu resultados satisfatórios, considerando as simplificações e abordagens de modelagem adotadas. O uso do método de diferenças finitas, em conjunto com o conceito de malhas deslocadas, mostrou-se eficiente e rapidamente convergente.

Os resultados da simulação mostraram boa concordância com o modelo convencional de Reynolds, destacando a validade e o potencial do novo método. Análises comparativas entre os dois modelos revelaram diferenças sutis, especialmente devido à inclusão de forças inerciais nas equações.

Além disso, recomenda-se explorar alternativas mais estáveis e eficientes computacionalmente para resolver as equa-

ções, como o método de Runge-Kutta (Runge and Kutta, 1901). Isso poderia aumentar ainda mais a precisão e a eficácia do método proposto.

Este trabalho pioneiro abre caminho para aplicar o método a problemas mais complexos, como fluxos bifásicos e modelagem completa de mancais, considerando a força peso do eixo e o movimento transitório em direção à posição de equilíbrio. Essas extensões potenciais prometem avançar o campo e justificam investigações adicionais.

Em resumo, os resultados obtidos até agora indicam que o método proposto é uma abordagem promissora para a análise de mancais fluidodinâmicos. No entanto, pesquisas adicionais são necessárias para refinar e validar ainda mais o modelo, visando sua aplicação em cenários de engenharia mais desafiadores.

6. AGRADECIMENTOS

Os autores desejam expressar sua profunda gratidão à notável Universidade Federal de Uberlândia, cujo apoio inestimável e excelente infraestrutura desempenharam um papel fundamental na execução deste estudo científico. A dedicação e o ambiente acadêmico desta instituição foram cruciais para viabilizar a realização desta pesquisa. Além disso, estendemos nossa sincera apreciação à Petrobras pelo seu apoio financeiro, que tornou a execução deste projeto possível. Sua contribuição financeira foi essencial para o progresso da pesquisa e o aprimoramento dos resultados. Ambas as instituições desempenharam um papel fundamental em nossa jornada, e somos profundamente gratos por sua colaboração, que facilitou avanços significativos no campo da ciência e aprofundou nossa compreensão em nosso campo de pesquisa.

7. REFERÊNCIAS

- Bernoulli, D., 1738. “Hydrodynamica”. *Commentarii academiae scientiarum imperialis petropolitanae*, Vol. 5, pp. 128–168.
- Cauchy, A.L., 1829. “Méthode générale pour la résolution des systèmes d’équations simultanées”. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences*, Vol. 1, No. 1, pp. 536–538.
- Chorin, A.J., 1968. “Numerical solution of the navier-stokes equations”. *Mathematics of Computation*, Vol. 22, No. 104, pp. 745–762. ISSN 00255718, 10886842. URL <http://www.jstor.org/stable/2004575>.
- Da Silva, T.A., Cavalini, A.A. and Neto, A.S., 2023. “Thin film theory applied to mathematical modeling of fluidynamic bearings”. *COBEM 2023*. doi:10.26678/abcm.cobem2023.cob2023-0603. URL <https://doi.org/10.26678/abcm.cobem2023.cob2023-0603>.
- Euler, L., 1755. “Principia pro motu fluidorum”. *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, Vol. 9, pp. 195–240.
- Euler, L., 1768. “Methodus inveniendi lineas curvas”. *Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, Vol. 10, No. 1, pp. 29–79.
- Hamrock, B., 1994. *Fundamentals of Fluid Film Lubrication*. McGraw-Hill series in mechanical engineering. McGraw-Hill. ISBN 9780070259560. URL <https://books.google.com.br/books?id=7dpSAAAAMAAJ>.
- Harlow, F.H. and Welch, J.E., 1965. “Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface”. *Physics of Fluids*, Vol. 8, No. 12, pp. 2182–2189.
- Ishida, Y. and Yamamoto, T., 2013. *Linear And Nonlinear Rotordynamics: a modern treatment with applications*, John Wiley & Sons, chapter 10.
- J Frene, D Nicolas, B.D.D.B.M.G., 1997. *Hydrodynamic lubrication: bearings and thrust bearings.*, ELSEVIER, chapter 5.
- Mota, J.A., Maldonado, D.J.G., Valério, J.V. and Ritto, T.G., 2022. “Modeling of hydrodynamic bearings with a novel boundary parameterization approach”. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol. 44, No. 5, p. 171. ISSN 1806-3691. doi:10.1007/s40430-022-03474-2. URL <https://doi.org/10.1007/s40430-022-03474-2>.
- Navier, C.L., 1822. “Mémoire sur les lois du mouvement des fluides”. *Mémoires de l’Académie Royale des Sciences de l’Institut de France*, Vol. 6, pp. 389–440.
- Newton, I., 1687. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. University of Cambridge.
- Ocvirk, F.W., 1952. “Short-bearing approximation for full journal bearings”.
- Pinkus, O., 2022. “Closure to “Discussion of ‘Analysis of Elliptical Bearings’” (1956, Trans. ASME, 78, pp. 972–973)”. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, Vol. 78, No. 5, pp. 973–973. ISSN 0097-6822. doi:10.1115/1.4013890. URL <https://doi.org/10.1115/1.4013890>.
- Reynolds, O., 1886. “Iv. on the theory of lubrication and its application to mr. beauchamp tower’s experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil.” *Phil. Trans. R. Soc.*, Vol. 177, pp. 157–234.
- Runge, C. and Kutta, M.W., 1901. “Über numerische auflösung von differentialgleichungen”. *Mathematische Annalen*, Vol. 46, No. 2, pp. 167–178. doi:10.1007/BF01457604.
- Sommerfeld, A., 1904. “Zur theorie der schmiermittelreibung.” *Z Math Phys*, Vol. 50, pp. 97–155.
- Stieber, W., 1933. *Das Schwimmlager: Hydrodynamische Theorie des Gleitlagers*. VDI-Verlag. URL

<https://books.google.com.br/books?id=V5H-GwAACAAJ>.

Stokes, G.G., 1845. “On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids”. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 8, pp. 287–305.

Swift, H., 1932. “The stability of lubricating films in journal bearings.” *Journal of the Institution of Civil Engineers*, Vol. 233, p. 289:322.

Takakazu, S., 1674. “Method for obtaining roots of polynomial equations”. *Wazan Kaden*, Vol. 3, No. 1, pp. 102–113.

Taylor, B., 1715. “Methodus incrementorum directa et inversa”. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, Vol. 29, No. 347–359. URL <https://doi.org/10.1098/rstl.1715.0002>.

Van der Vorst, W., 1992. “Bi-cgstab: A fast and smoothly converging variant of bi-cg for the solution of nonsymmetric linear systems”. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, Vol. 13, No. 2, pp. 631–644. doi: 10.1137/0913035.

White, F.M., 2022. *VISCOUS FLUID FLOW*. McGraw Hill LLC.

8. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.