

SOLUÇÃO NUMÉRICA DA TRANSFERÊNCIA TÉRMICA EM CAMADA-LIMITE TURBULENTA MODELADA SEGUNDO ONDAS QUADRADAS ALEATÓRIAS

João Marcos Agapito Moreira Fróes, joaoagapito@unipam.edu.br¹
Bruno Batista Gonçalves, brunobg@unipam.edu.br²

¹Centro Universitário de Patos de Minas, R. Major Gote, nº 808 - Caiçaras, Patos de Minas - MG - CEP: 38702-054

²Centro Universitário de Patos de Minas, R. Major Gote, nº 808 - Caiçaras, Patos de Minas - MG - CEP: 38702-054

Resumo. Este trabalho visa desenvolver e analisar detalhadamente uma solução numérica para a transferência de calor em turbulência na região de transferência de uma placa plana aquecida, a qual foi modelada bidimensionalmente segundo o método das ondas quadradas aleatórias. Para esse fim, foi utilizado o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Entretanto, para aplicá-lo em um problema bidimensional, foi necessário adaptá-lo através de um método de otimização por séries de Taylor de duas variáveis, cujo desenvolvimento e implementação demandou extensas análises e trabalhos algébricos. As condições de contorno previamente disponíveis do modelo físico não eram suficientes para a inicialização da solução, e, por isso, outros procedimentos algébricos e de cálculo foram realizados com vista em determinar as condições restantes. Para a solução numérica, as coordenadas espaciais foram normalizadas em relação a comprimentos fictícios constantes arbitrariamente escolhidos, os quais representam os limites do domínio de solução retangular. A solução numérica obteve perfis de temperatura fisicamente coerentes e a evolução da camada-limite térmica possui razoável concordância com o método da integral de Von Kármán, resguardadas as diferenças entre perfis fluidodinâmicos e térmicos. Foi observado um comportamento anômalo da solução na região fronteira da camada-limite, o qual provavelmente está relacionado com o fato de que a função coeficiente de redução, que determina as amplitudes das flutuações em torno da média, foi admitida constante.

Palavras chave: Método OQA. Solução numérica. Turbulência. Transferência de calor. Camada-limite.

Abstract. This work aims to develop and analyze thoroughly a numerical solution for heat transfer in turbulence in the transfer region of a heated flat plate, which was modeled two-dimensionally according to the method of random square waves. For this purpose, the fourth-order Runge-Kutta method was used. However, to apply it to a two-dimensional problem, it was necessary to adapt it through a two-variable Taylor series optimization method, whose development and implementation demanded extensive analysis and algebraic work. The previously available boundary conditions of the physical model were not sufficient for the initialization of the solution, and therefore other algebraic and calculation procedures were performed in order to determine the remaining conditions. For the numerical solution, the spatial coordinates were normalized with respect to arbitrarily chosen constant fictitious lengths, which represent the limits of the rectangular solution domain. The numerical solution obtained physically coherent temperature profiles and the evolution of the thermal boundary layer has reasonable agreement with the Von Kármán integral method, safeguarding the differences between fluid dynamic and thermal profiles. An anomalous behavior of the solution was observed in the border region of the boundary layer and it is probably related to the fact that the reduction coefficient function, which determines the amplitudes of fluctuations around the mean, was assumed to be constant.

Keywords: RSW method, Numerical solution, Turbulence, Heat transfer, Boundary-layer.

1. INTRODUÇÃO

A turbulência é um fenômeno complexo presente nos mais diversos escoamentos de fluidos observados na natureza. É caracterizado por variações bruscas, aleatórias e desordenadas do meio fluido, as quais impactam diretamente as grandezas de transporte nela ocorridas, como concentração de espécies químicas, quantidade de movimento e energia. Em razão desse aspecto, a quantificação teórica da turbulência e dos fenômenos de transporte nela associados são, ainda,

difíceis e desafiadores. Apesar da extensa quantidade de trabalhos já desenvolvidos pelos pesquisadores da área, Schulz (2003), Gonçalves (2014) e Çengel e Cimbala (2015) afirmam que ainda não há um equacionamento definitivo para os processos de transferência em meios turbulentos.

Observa-se nas mais diversas atividades humanas a presença e a importância dos fenômenos turbulentos. No âmbito da gestão ambiental, a análise da difusão de poluentes na atmosfera e o manejo e controle de recursos hídricos são alguns exemplos que reforçam essa tese. No contexto da engenharia mecânica, o estudo e dimensionamento da transferência térmica em processos industriais e da transferência mássica em interfaces líquido/gás, o aprimoramento da eficiência de máquinas e o atendimento à crescente demanda por energias renováveis são outras aplicações nas quais o desenvolvimento dos estudos sobre turbulência tem muito a contribuir, evidenciando ainda mais a relevância dessa área de pesquisa nos dias atuais.

Na busca por descrever as flutuações caóticas da turbulência, uma das formas utilizadas para o tratamento das variáveis consiste na aplicação de ferramentas da estatística nos equacionamentos governantes do fenômeno. Tal método consiste inicialmente na decomposição do valor instantâneo de cada variável em um componente médio acrescido de um componente flutuante, e, após isso, aplica-se a média temporal de toda a equação, conforme White (2018). Embora essa transformação de fato seja capaz de simplificar o estudo do fenômeno ao eliminar diversos termos contendo a média de uma flutuação, surgem novos termos contendo a média de um produto de flutuações, por exemplo, os quais não podem ser considerados nulos pelo argumento estatístico puro. A presença de tais termos provoca o chamado problema do não-fechamento do sistema de equações. A fim de contornar esse problema, foram propostos pelos pesquisadores da área diversos modelos empíricos. Para Gonçalves (2014), no entanto, tais modelos se restringem a casos muito específicos.

Nesse contexto, surge o método das ondas quadradas aleatórias, abreviado por método OQA, proposto por Schulz *et al* (2011a, 2011b). Schulz (1985) Schulz *et al* (2011a, 2011b) e Gonçalves (2014) elucidam que o método OQA viabiliza a parametrização de uma grandeza sob transporte turbulento, modelando-a segundo ondas quadradas bimodais aleatórias. A parametrização dos termos fornece um meio de determinar os termos contendo a média de um produto de flutuações *a priori*, não demandando a imposição de novas hipóteses posteriormente e solucionando o problema do não-fechamento. O método OQA apresentou resultados satisfatórios nos trabalhos de Gonçalves (2014), de Schulz *et al* (2011b) e de Schulz e Janzen (2009), referentes à transferência turbulenta unidimensional de massa, e também no caso das células convectivas Rayleigh-Bénard incluso no mesmo trabalho de Gonçalves (2014).

Os trabalhos mais recentes nessa área envolveram a aplicação do método OQA na transferência térmica turbulenta, a saber, Castro (2017) e Dairel e Gonçalves (2021). Gonçalves (2014) e Castro (2017) foram os primeiros a propor um equacionamento para a transferência térmica turbulenta unidimensional segundo o método OQA, considerando, no primeiro, turbulência estacionária e no segundo velocidade constante ao meio. Dairel e Gonçalves (2021), por sua vez, propuseram um equacionamento bidimensional associado à evolução da camada-limite, questionando a necessidade da demasiada complexidade da equação de Castro (2017) e argumentando que uma modelagem unidimensional não condiz satisfatoriamente com a realidade física do fenômeno analisado. Em ambos os trabalhos, a função coeficiente de redução, um dos parâmetros introduzidos pelo método OQA, foi considerado constante para fins de simplificação. Até o presente momento, a equação de Dairel e Gonçalves (2021) ainda não foi submetida a uma simulação numérica para verificação de sua validade, abrangência e sensibilidade.

Diante desse cenário, este trabalho teve como objetivo o desenvolvimento de uma solução numérica para a transferência térmica em camada-limite turbulenta a partir de uma nova análise e readequação algébrica do equacionamento de Dairel e Gonçalves (2021), com sentido físico, bem como o estudo e a análise da mesma a fim de se verificar a aplicabilidade do método OQA no caso bidimensional.

Os resultados desta pesquisa têm a contribuir no avanço das soluções numéricas e da análise do tratamento estatístico da turbulência considerando o método OQA, o qual ainda não está plenamente desenvolvida no âmbito da transferência de calor. Além disso, este trabalho dá continuidade à solução do primeiro problema bidimensional de transferência de calor modelado pelo método OQA, iniciado por Dairel e Gonçalves (2021).

2. METODOLOGIA

2.1. Considerações iniciais

O problema físico a ser resolvido consiste em uma placa plana direcionada no eixo x a uma temperatura T_s sobre a qual incide o escoamento turbulento para o sentido positivo de x de um fluido a uma temperatura ambiente T_∞ . A direção ortogonal à placa e ao escoamento é a direção z . Esse problema já foi modelado por Dairel e Gonçalves (2021), e o ponto de partida desta pesquisa é a Eq. (1) resultante dessa modelagem, que é uma equação diferencial parcial (EDP) não-linear de quarta ordem:

$$\begin{aligned} & \bar{u} \left[A(4 - 2A) - 2 \right] \frac{\partial n}{\partial x} \left[2 \left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{\partial n}{\partial x} \frac{\partial^3 n}{\partial x^3} \right] + 2(I - A) \left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \right)^2 \left[\frac{k_t}{\rho c_e} \left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \right) + \bar{u}(A - I) \frac{\partial n}{\partial x} \right] - 8A^2 \frac{k_t}{\rho c_e} \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \right. \\ & \left. \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \right) + 2 \frac{k_t}{\rho c_e} \left[A^2(2 - 4n) - I \right] \left[\left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial n}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \frac{\partial^3 n}{\partial x \partial z^2} - \frac{\partial^3 n}{\partial x^3} \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \right) \right] + \frac{k_t}{\rho c_e} A \left\{ [4A(I - 2n) - 2] \frac{\partial n}{\partial x} \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^3 n}{\partial x^3} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\partial^3 n}{\partial x \partial z^2} \right) + [4An(I - n) - (2n - I)] \left[\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^4 n}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 n}{\partial x^2 \partial z^2} \right) - \frac{\partial^3 n}{\partial x^3} \left(\frac{\partial^3 n}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 n}{\partial x \partial z^2} \right) \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Na Equação (1), n é a função de partição (ou, também, a temperatura normalizada em relação à diferença entre T_s e T_∞), adimensional, \bar{u} é a velocidade média do escoamento externo, em [m/s], e $k_t/\rho c_e$ é a difusividade térmica do meio fluido, em [m²/s]. O termo A , adimensional, é definido por $A = 1 - \alpha$, em que α representa a função coeficiente de redução. A função α representa a redução das amplitudes das flutuações turbulentas de temperatura na região de transferência em relação aos valores da superfície e do ambiente externo, e, conforme já mencionado, foi considerada constante.

A Equação (1) foi obtida a partir do sistema envolvendo as Eqs. (2) e (3):

$$\bar{u} \frac{\partial n}{\partial x} + A \frac{\partial I}{\partial x} = \frac{k_t}{\rho c_e} \left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \bar{u} (I - 2n) \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{BI}{2\beta - 1} - n(I - n) \sqrt{u'^2} \sqrt{\frac{I - B}{B}} \right] + \frac{I}{A} \frac{\partial n}{\partial x} = - \frac{2k_t}{\rho c_e} n(I - n) \left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \right) \quad (3)$$

Nas Equações (2) e (3), B é um termo de substituição cujo propósito é condensar os termos associados às flutuações turbulentas de velocidade. O termo B é definido por $B = \beta + n - 2\beta n$, em que β é a função de sobreposição, adimensional, que representa uma correlação entre os perfis das camadas-limite térmica e fluidodinâmica. O termo I , em [m/s], é outro termo de substituição que contém os parâmetros do método OQA dos quais pouco se pode supor a respeito do seu comportamento físico, a saber, a função β e o RMS da velocidade $\sqrt{u'^2}$, em [m/s]. O termo I foi definido em trabalhos anteriores como de Schulz e Janzen (2009), Gonçalves (2014) e Dairel e Gonçalves (2021) para explicitar e simplificar os termos associados ao transporte turbulento, o que facilitou, por exemplo, a resolução do sistema e a consequente obtenção da Eq. (1). A definição do termo I é dada pela Eq. (4):

$$I = \frac{n(1 - n)(2\beta - 1) \sqrt{u'^2}}{\sqrt{B(1 - B)}} \quad (4)$$

Para a execução da solução numérica, optou-se pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem, já amplamente utilizado em pesquisas anteriores na área e apropriado para problemas de valor inicial com erro e custo computacional relativamente pequenos. Decidiu-se ainda implementar um método de quasi-Newton para fins de otimização.

2.2. Condições de contorno

Para a inicialização dos cálculos da solução numérica, é necessário um número mínimo de condições de contorno do problema. No entanto, as condições definidas fisicamente na superfície da placa aquecida e na fronteira da camada-limite de transferência não eram suficientes, e, em vista disso, foram realizados diversos procedimentos matemáticos e algébricos a fim de se determinar as condições de contorno restantes.

Sendo $n(x, z)$ a função de partição, de duas variáveis, as condições definidas fisicamente na superfície são $n(x, 0) = I$ e todas as derivadas em relação a x são nulas. Na fronteira, a única condição considerada foi $n(x, \delta) = 0$, em que δ é a espessura da camada-limite. Inicialmente, foram testadas diretamente nas Eqs. (1), (2) e (3) essas condições de contorno. Poucos valores de interesse foram descobertos, e em quase todos os testes obteve-se a sentença $0 = 0$. Essa sentença confirma a validade matemática e dimensional das equações, mas não revela nenhuma nova condição de contorno.

Em seguida, foram consideradas duas hipóteses simplificadoras. A primeira hipótese foi a turbulência estacionária, na qual a camada-limite se estabiliza em um perfil constante ao longo de x , e, por isso, todas as derivadas da função n em relação a x são nulas em todo o domínio de solução. A segunda hipótese considerou os perfis de velocidade e temperatura justapostos, o que torna a função β igual a 1 pela sua definição básica. Essas hipóteses foram testadas nas Eqs. (2) e (3) simultaneamente, e após, cada uma separadamente. Ambas as hipóteses impostas simultaneamente exigiram que a função n fosse constante ao longo tanto de x como de z , o que não possui sentido físico. Descobriu-se posteriormente que a turbulência estacionária por si só era a responsável por tornar a função n constante ao anular todas as derivadas em relação a x . Quando foram considerados os perfis justapostos sem a turbulência estacionária, a simplificação desejada não foi obtida, pois ainda persistiram nas equações termos envolvendo a função $\sqrt{u'^2}$ e derivadas das funções β e $\sqrt{u'^2}$.

Visto esse cenário, novos rearranjos algébricos alternativos foram avaliados na Eq. (3) a fim de eliminar as funções β , B e $\sqrt{u'^2}$, que têm se mostrado um empecilho na busca por novas condições de contorno. De fato, um desses rearranjos

possibilitou que todo o termo entre colchetes que está sendo derivado em relação a x na Eq. (3) fosse reduzido a $I(1 - 2n)$ ao incluir no termo I as funções β , B e $\sqrt{u'^2}$ que ainda permaneciam. Isso representou um grande avanço na pesquisa, pois foi contornado o principal obstáculo já discutido relacionado a essas funções. A Equação (3) foi, então, reorganizada algebricamente, resultando na Eq. (5):

$$\left[\bar{u} + \frac{2(I-A)I}{A(1-2n)} \right] \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial I}{\partial x} = - \frac{4n(I-n)}{(1-2n)} \frac{k_t}{\rho c_e} \left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \right) \quad (5)$$

Na fronteira da camada-limite, ainda nada se supôs sobre as derivadas de primeira ordem da função n , e isso se deve à característica curva da fronteira, a qual gerou incerteza na suposição das derivadas. Para sanar tal incerteza, foi desenvolvida a derivada direcional (ver, por exemplo, Stewart *et al* (2022)) da função n na direção tangente à curva da fronteira, pois certamente a função n é nula em todos os pontos da curva. Também foi calculada a derivada direcional na direção ortogonal à curva da fronteira, que também deveria ser nula devido à estabilização da temperatura no meio externo. Esses procedimentos geraram relações entre derivadas parciais que, ao serem confrontadas, confirmaram que tanto $\partial n / \partial x$ quanto $\partial n / \partial z$ são nulos na fronteira.

Devido à presença de derivadas do termo I nas Eqs. (3) e (5), fez-se necessário conhecer seus valores, e, para isso, a Eq. (4) foi derivada em relação a x . No resultado dessa derivação, foram substituídas as condições de contorno já conhecidas, o que revelou que o valor de $\partial I / \partial x$ tanto na superfície quanto na fronteira é nulo. O mesmo procedimento foi feito em relação a z , desvendando que $\partial I / \partial z$ apenas na fronteira. Deste ponto em diante, várias outras condições de contorno das funções n e I foram desenvolvidas através de derivações das Eqs. (3) e (5) em relação a x e a z , em seguida, com a substituição das condições já conhecidas nas equações derivadas. Descobriu-se não somente valores de derivadas parciais de segunda e terceira ordem, mas também relações entre derivadas distintas desconhecidas que, quando confrontadas entre si, revelaram os valores desejados.

Por fim, a última metodologia utilizada com vista em encontrar novas condições de contorno residia no fato de que ocorrem trocas de calor entre a superfície da placa e o fluido imediatamente adjacente na direção z , o que garante que $\partial n / \partial z$ não é nulo na superfície. No entanto, o seu valor não era conhecido, e embora se tenha descoberto relações entre as derivadas, ainda não haviam equações suficientes para determiná-lo. Ademais, é fisicamente plausível supor que o seu valor varie ao longo de x devido à evolução da camada-limite. Frente a isso, admitiu-se como uma boa aproximação para $\partial n / \partial z$ a equação existente na literatura clássica da solução do mesmo problema físico em escoamento laminar, a saber, obtida da solução de Blasius (consultar, por exemplo, Çengel e Ghajar (2012)), uma vez que a região imediatamente acima da superfície da placa é uma subcamada viscosa laminar. A Equação (6) foi obtida da solução de Blasius após a normalização da temperatura, a explicitação do número de Prandtl e uma reorganização algébrica, e, conforme esperado, expressa $\partial n / \partial z$ na superfície como uma função de x :

$$\left. \frac{\partial n}{\partial z} \right|_{z=0} = - \frac{0,332 \bar{u}^2}{v^0 \left(\frac{k_t}{\rho c_e} \right)^{1/3}} \frac{I}{\sqrt{x}} \quad (6)$$

Na Equação (6), v é a viscosidade cinemática do fluido, em [m²/s]. Algumas outras derivadas parciais de segunda e terceira ordem, a saber, $\partial^2 n / \partial x \partial z$, $\partial^3 n / \partial x^2 \partial z$ e $\partial^3 n / \partial z^3$, puderam ser determinadas derivando-se duas vezes a Eq. (6) em relação a x e unindo todos esses resultados com as relações obtidas anteriormente. Essa derivação é válida, visto que a superfície está direcionada paralelamente ao eixo x e, nela, somente a variação em z está restringida.

A Tabela 1 resume todos os resultados das condições de contorno na superfície da placa. Na fronteira da camada-limite, somente as derivadas de primeira e segunda ordem foram definidas, e todas são nulas.

Tabela 1. Condições de contorno da superfície da placa (Autoria própria).

Condição de contorno	Valor	Condição de contorno	Valor
n	1	$\partial^2 n / \partial x \partial z$	Eq. (6) derivada uma vez em x
$\partial n / \partial x$	0	$\partial^3 n / \partial x^3$	0
$\partial n / \partial z$	Eq. (6)	$\partial^3 n / \partial z^3$	$[\bar{u}(1-A)/(k_t/\rho c_e)] \partial^2 n / \partial x \partial z - \partial^3 n / \partial x^2 \partial z$
$\partial^2 n / \partial x^2$	0	$\partial^3 n / \partial x^2 \partial z$	Eq. (6) derivada duas vezes em x
$\partial^2 n / \partial z^2$	0	$\partial^3 n / \partial z^2 \partial x$	0

2.3. Novo equacionamento

A Equação (5), que de certa forma passa a substituir a Eq. (3) para os objetivos desejados do sistema, trouxe uma nova possibilidade de simplificação do problema. O sistema nesse novo estado possui apenas as funções n e I como variáveis

dependentes, e, a partir disso, foram testadas novas estratégias algébricas a fim de eliminar a função I e todas as suas derivadas e possivelmente obter uma equação governante mais simples.

Essa estratégia consistiu, inicialmente, em reorganizar a Eq. (5) de modo que, ao derivá-la em relação a x , desapareça a função I , restando apenas suas derivadas de primeira e segunda ordem em x . Em seguida, para eliminar a derivada de primeira ordem, a mesma foi isolada na Eq. (2), estando em função somente de n e suas derivadas, e substituída na Eq. (5) derivada. A Eq. (2) foi, então, derivada em relação a x a fim de gerar a derivada de segunda ordem para ser substituída na Eq. (5) derivada. Após isso, a equação resultante, que possuía diversos termos contendo somente a função n como variável dependente, foi simplificada e organizada, gerando a nova equação governante do fenômeno modelada segundo o método OQA, a Eq. (7):

$$\frac{k_t}{\rho c_e} [1 - 2A + 2A^2(2n - 1)] \left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)^2 = - \frac{k_t A[(1 - 2n) + 4An(n - 1)]}{2} \left[\left(\frac{\partial^3 n}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 n}{\partial x \partial z^2} \right) \frac{\partial n}{\partial x} - \left(\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} \right) \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \right] + \bar{u}(1 - A)^3 \left(\frac{\partial n}{\partial x} \right)^3 \quad (7)$$

A Equação (7) é uma equação diferencial de terceira ordem, ao passo que a Eq. (1) de Dairel e Gonçalves (2021) é de quarta ordem. Para mais, a complexidade e o tamanho da Eq. (7) também são relativamente menores que os da Eq. (1), e, devido a essas vantagens, a solução numérica foi aplicada na Eq. (7).

2.4. Normalização das coordenadas

Para uma melhor confiabilidade e mais fácil generalização dos resultados da solução numérica, é ideal que todas as variáveis sejam normalizadas. Neste ponto, resta ainda normalizar as coordenadas x e z .

A princípio, pretendia-se normalizar z em relação à espessura da camada-limite δ ($z^* = z/\delta$), conforme foi feito em trabalhos anteriores na área, mantendo somente a região da camada-limite como domínio de solução. Todavia, no caso bidimensional, isso gerou um efeito colateral extremamente indesejável em x , pois a espessura da camada-limite varia ao longo de x . A normalização de z se manteve simples e dentro das expectativas, mas as derivadas em relação a x , em especial as de ordem superior, ficaram acrescidas de termos extensos associados à equação da curva da fronteira da camada-limite, o que posteriormente acarretaria em uma complexidade exagerada das equações adimensionalizadas. Além disso, seria necessária a equação fisicamente aceita para $\delta(x)$ na literatura clássica (ver Incropera *et al* (2014) ou Çengel e Ghajar (2012)), a qual traria ainda mais complexidade visto que, nela, a espessura δ é proporcional à raiz quadrada de x .

À vista disso, o domínio de solução foi redefinido para corresponder ao retângulo delimitado pelos pontos $(0,0)$, $(L_x,0)$, $(0,L_z)$ e (L_x,L_z) , em que L_x e L_z são dois comprimentos característicos fictícios direcionados respectivamente em x e em z e escolhidos arbitrariamente, e a normalização de x e de z foi feita em relação a esses comprimentos ($x^* = x/L_x$ e $z^* = z/L_z$). Como L_x e L_z são parâmetros constantes, estes não agregaram demasiada complexidade às equações. Tal método de normalização foi, então, implementado na equação (7) e nas condições de contorno.

2.5. Método da solução numérica

Para iniciar a definição do método e das etapas da solução numérica, o domínio de solução foi dividido em pequenos sub-retângulos cujas dimensões são Δx e Δz , os respectivos passos em x e em z , e os vértices formados pelos sub-retângulos são os pontos amostrais que devem assumir um valor na solução. A fronteira da camada-limite foi omitida por consequência da mudança do domínio de solução, e esperava-se que os próprios resultados da solução numérica revelassem os pontos amostrais mais próximos da curva da fronteira, isto é, os pontos nos quais a função n é o mais próximo possível de zero.

Em relação à aplicabilidade do método de Runge-Kutta de quarta ordem nessa discretização, sabe-se que suas fórmulas podem ser utilizadas diretamente em equações diferenciais ordinárias desde que haja uma equação para cada derivada em função das outras variáveis dependentes (ver, por exemplo, Boyce e Diprima (2015)). Isso garante que seja possível calcular os coeficientes k_1 , k_2 , k_3 e k_4 do método de Runge-Kutta para avançar um passo na solução. Entretanto, o fenômeno em análise foi modelado bidimensionalmente, sendo, portanto, descrito por uma equação diferencial parcial com duas variáveis independentes. Além disso, sabe-se do cálculo que, no caso das derivadas parciais de funções de duas variáveis, existem não somente uma, mas quatro derivadas de terceira ordem distintas, sendo necessária uma equação para cada uma delas em função das derivadas de ordem inferior (as quais, na solução numérica, passariam a ser as variáveis dependentes). As Equações (1) e (7) são as únicas disponíveis e não são suficientes para esse intuito, pois as demais ainda possuem as funções I , β , B e $\sqrt{u^2}$. Viu-se a necessidade de adaptar o método conforme o número de variáveis dependentes e independentes, pois cada variável adicional exigia um novo grupo distinto de quatro coeficientes k para que pudesse avançar em determinada direção no domínio de solução.

Posto isso, implementou-se nesse ponto o método de otimização, que utilizou uma estratégia similar à dos métodos de quasi-Newton. Adotou-se três séries de Taylor para funções de duas variáveis (ver Carvalho *et al* (2001)), truncadas

após os termos de terceira ordem, as quais introduziram cada uma um termo regressivo distinto: de um passo em x , de um passo em z , e de um passo em x e em z simultaneamente. Essas três equações, quando unidas com a equação (7) através de extensas técnicas algébricas, forneceram uma equação para cada uma das quatro derivadas parciais de terceira ordem, todas em função das demais variáveis dependentes, dos passos Δx e Δz e dos termos regressivos mencionados. Obviamente, tal método trouxe um erro adicional devido ao truncamento das séries de Taylor, mas foi o único capaz de sanar as deficiências das equações para a solução numérica nesse contexto. Além disso, presume-se que se trata de um erro aceitável devido à inclusão de termos até a terceira ordem e ao tamanho diminuto os passos Δx e Δz .

2.5. Execução da solução numérica

Após a normalização das coordenadas nas equações das derivadas de terceira ordem e nas condições de contorno não nulas da superfície da placa, passou-se à execução da solução numérica. Tendo em vista que todas as condições de contorno da superfície da placa são conhecidas e que a derivada de primeira ordem em relação a z não é nula, podendo, por isso, avançar o passo inicial, a solução numérica foi desenvolvida somente com avanços em z , gerando perfis da função n até o final do comprimento L_z para diferentes posições em x e sempre partindo da superfície ($z = 0$) ao iniciar um novo perfil na próxima posição x . Isso foi feito repetidamente até se atingir o comprimento L_x .

É válido ressaltar ainda que, devido à necessidade de termos regressivos em x nas equações, o primeiro perfil da função n em z , logo adjacente ao bordo de ataque (ponto $(0,0)$ do plano xz), necessitava de condições de contorno na linha vertical que contém o bordo de ataque ($x = 0$) para ser determinado. As próprias condições físicas do problema preenchem essa lacuna, pois o escoamento entra no domínio de solução à temperatura ambiente, o que implica que $n(0,z) = 0$. No bordo de ataque em si, porém, ocorre um conflito entre as condições de contorno da superfície da placa e da linha vertical de $x = 0$. Após análises a respeito, foi dada prioridade à condição da superfície, pois em todos os demais inícios dos perfis nas outras posições de x , a função n seria igual a 1 conforme a condição de contorno, e tal consistência foi mantida. Em relação aos termos regressivos em z , foi necessário um ponto fora do domínio de solução para a inicialização de cada perfil. Esses pontos foram facilmente determinados por meio da própria série de Taylor que calculava o termo regressivo de um passo em z , incorporadas as condições de contorno.

A execução da simulação numérica se deu por meio do *software* Microsoft Excel®. A escolha dos valores das propriedades do fluido foi baseada no ar atmosférico a cerca de 25 °C, tendo sido estimados em $\nu = 1,511 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ e $k_f/\rho c_e = 2,249 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$. A velocidade média \bar{u} escolhida para o escoamento foi de 20,0 m/s, a qual, em termos práticos meteorológicos, é classificada como uma ventania segundo a escala de Beaufort (consultar *website* da Prefeitura de Santo André (2023)). Para os parâmetros da solução numérica, os valores escolhidos foram $\Delta x^* = 0,100$, $\Delta z^* = 0,010$ (passos em x e z normalizados), $L_x = 5,000 \text{ m}$ e $L_z = 0,150 \text{ m}$. Para os valores do termo A , entretanto, deve-se lembrar que a função α foi admitida constante em contraste com seu comportamento físico real, e, portanto, esperava-se que A possuísse um valor médio específico dependente das outras condições do problema, valor este que tornaria o perfil térmico o mais próximo possível da realidade física.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Com os valores dos passos Δx^* e Δz^* definidos na solução numérica, obteve-se um conjunto de dados de cem valores da função n e de suas derivadas parciais para cada perfil, e os cinco primeiros perfis obtidos, representativos do comportamento geral do fenômeno, estão representados na Fig. 1, na forma de um gráfico $n(z^*)$.

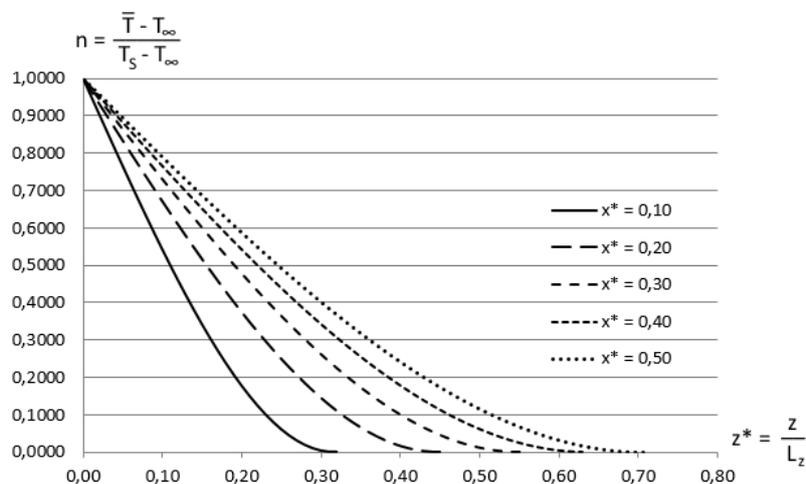


Figura 1. Perfis térmicos da função n em função de $z^* = z/L_z$ (Autoria própria)

Além disso, foi construída a representação gráfica tridimensional $n(x^*, z^*)$ dos perfis, exemplificados na Fig. 2 para melhor visualização da evolução da camada-limite térmica.

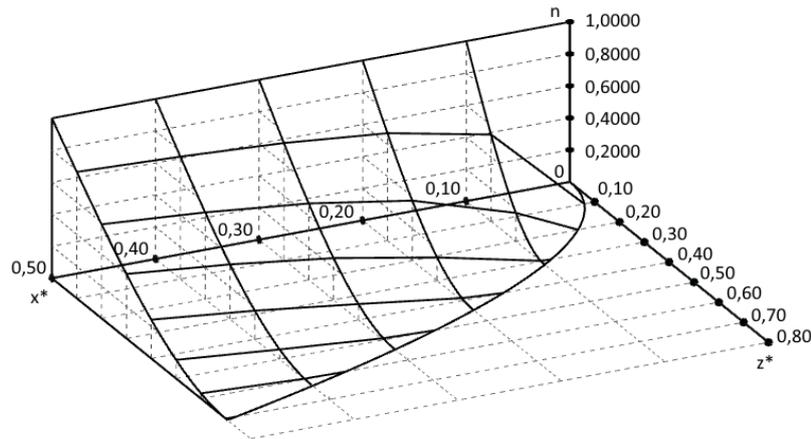


Figura 2. Representação gráfica tridimensional da solução numérica (Autoria própria)

Da Figura 2, observa-se a curva da fronteira da camada-limite, constituída dos pontos finais de cada perfil. As coordenadas numéricas (x^*, z^*) desses pontos, fornecidas pela solução numérica, são: $(0,10, 0,32)$, com $A = 0,23548$, $(0,20, 0,45)$, com $A = 0,23987$, $(0,30, 0,55)$, com $A = 0,24213$, $(0,40, 0,63)$, com $A = 0,24358$ e $(0,50, 0,71)$, com $A = 0,24460$.

As coordenadas listadas acima, bem como o que já se conhece a respeito da camada-limite no problema do escoamento sobre uma placa plana, sugerem que a curva que contém esses pontos seja proporcional à raiz quadrada de x . Essa hipótese foi testada fazendo-se uma interpolação numérica, e a Eq. (8) foi a função que melhor se ajustou aos pontos, sendo ela, então, a equação normalizada aproximada para a curva da fronteira da camada-limite térmica da Fig. 2, válida somente para os valores selecionados anteriormente dos parâmetros:

$$\delta_T(x) = 0,04472\sqrt{x} = \frac{51,45x}{Re_x^{1/2}} \quad (8)$$

Primeiramente, é visível das Figs. 1 e 2 que os perfis possuem sentido físico e atendem às expectativas, pois em todos os perfis, a temperatura normalizada parte de 1 na superfície da placa e decresce até 0 em um ponto suficientemente distante da placa no meio externo. No que tange à evolução da camada-limite, também se observa um comportamento condizente com a previsão física, pois a espessura da camada-limite cresce à medida que se avança em x , o que faz de modo aproximadamente proporcional à raiz quadrada de x , o que também está de acordo com a Eq. (8).

A comparação dos perfis das Figs. 1 e 2 com dados experimentais não foi possível, pois ainda é escasso a disponibilidade de experimentos acerca da transferência de calor turbulenta bidimensional similares às condições aqui resultantes. Apesar disso, com base na superposição parcial entre as camadas-limite fluidodinâmica e térmica, a Fig. 3 compara a Eq. (8) com as equações para escoamento em camada limite pelo método da integral de von Kármán (ver White (2018)) $\delta(x) = 0,368x/(Re_x^{1/5})$, para perfil de velocidade assumido $v/U = (y/\delta)^{1/7}$, e $\delta(x) = 0,252x/(Re_x^{1/6})$, para perfil assumido $v/U = (y/\delta)^{1/8}$, dentro da faixa de Reynolds em análise na simulação numérica.

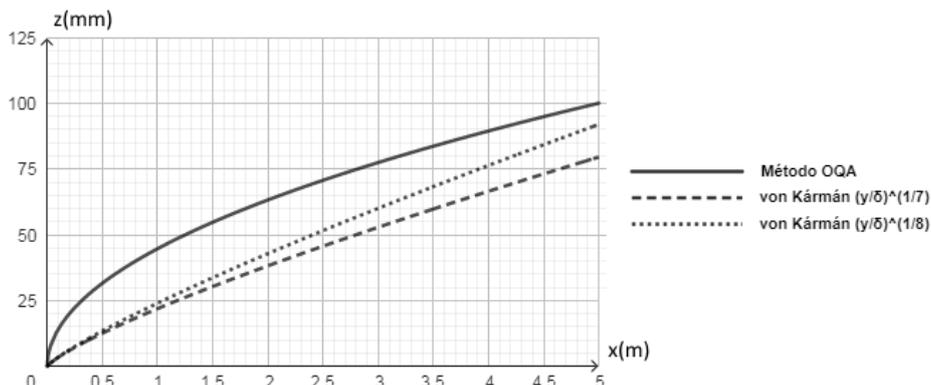


Figura 3. Comparação entre as camadas-limite hidrodinâmica e térmica (Autoria própria)

Apesar da concordância entre a fenomenologia física e os resultados obtidos, é preciso destacar que a solução numérica apresentou alguns comportamentos anômalos. Pela extrapolação dos perfis térmicos em direção ao escoamento externo, os pontos da fronteira se mostraram, na realidade, como pontos de inflexão, pois a função n apresentou um crescimento indefinido inesperado para valores de z^* acima da fronteira da camada-limite. Esse padrão se repetiu para todas as outras combinações distintas de valores dos parâmetros que foram testadas. Ademais, conforme discutido previamente, o termo A não pode ser livremente escolhido para que o perfil térmico seja fisicamente realista, pois a função coeficiente de redução não é um parâmetro constante na realidade física. Isso explica a presença de valores específicos do termo A para cada ponto. Em qualquer perfil, para valores de A maiores que aqueles listados, o ponto de inflexão do perfil térmico ocorre abaixo do eixo horizontal da Fig. 1, e para valores menores, o ponto de inflexão ocorre acima do mesmo eixo. Com isso, deve existir apenas um valor de A para cada perfil que satisfaça minimamente a previsão física ao fazer com que o ponto de inflexão ocorra no eixo horizontal da Fig. 1, e aqueles são os valores que o fazem.

Percebe-se, pois, que a hipótese que mantém a função coeficiente de redução α constante não atende de forma ideal à fenomenologia da transferência de calor turbulenta bidimensional, ainda que a mesma tenha fornecido resultados satisfatórios no transporte de massa e calor unidimensional trabalhados, por exemplo, por Schulz *et al* (2011a), Gonçalves (2014) e Castro (2017). Isso se deve ao fato de que o comportamento anômalo da solução ocorre próximo da fronteira da camada-limite e acima dela, região suficientemente distante da placa para que a turbulência predomine sobre os mecanismos de transporte térmico. Conforme a definição básica da função α (ver Schulz *et al* (2011a) ou Gonçalves (2014)), a função tende a valores próximos de 0 quando a turbulência é dominante, e isso implica que o termo A assumira valores próximos de 1, o que já diverge significativamente dos valores constantes estimados junto aos pontos de inflexão.

Há que se salientar ainda que, apesar desse impasse na solução numérica, os valores de A dos perfis são muito próximos entre si, e possuem um valor médio de cerca de 0,24313. Esse é um valor de A relativamente próximo de zero, o que implica em um valor da função α próximo de 1. Novamente com base na definição da função coeficiente de redução, um valor de α próximo de 1 indica pouco efeito de turbulência no transporte da propriedade e consequente predominância da difusividade molecular, situação que ocorre em regiões muito próximas à superfície da placa, e, de fato, a solução numérica se mostrou coerente para pequenos valores de z^* . Apesar de tais condições descritas, os perfis de evolução da camada-limite térmica representados na Fig. 3 indicam uma razoável aproximação da solução numérica da Eq. (7) com as soluções do escoamento pela integral de momentum de von Kármán, levando em consideração o desvio esperado entre as condições de evolução das camadas-limite fluidodinâmica e térmica.

4. CONCLUSÕES

A turbulência estatística é uma área de pesquisa que, de modo geral, ainda está pendente de novos estudos e desenvolvimentos, e os resultados deste trabalho apontam que houve um progresso na modelagem estatística da transferência de calor turbulenta segundo o método OQA. Os perfis obtidos na região da camada-limite são coerentes com a previsão física, e as tendências fisicamente inconsistentes da solução numérica ocorreram em regiões externas à camada-limite, além de que, conforme discutido, há fortes indícios de que a principal causa dessas inconsistências esteja relacionada à hipótese que restringe a livre variação da função coeficiente de redução α no plano xz .

Os métodos de solução numérica foram extremamente trabalhosos de serem completamente implementados e demandou-se muita deliberação para adaptá-los ao problema bidimensional e possibilitar a execução de uma simulação fisicamente válida. Apesar de que foram utilizadas séries de Taylor truncadas após derivadas de terceira ordem, acredita-se que a perda de precisão e exatidão foi aceitável, pois os termos das derivadas de maior ordem já se tornam muito pequenos.

Apesar da anomalia nos perfis de transferência térmica apresentando pontos de inflexão junto à fronteira da camada-limite, pode-se observar razoável concordância da evolução da camada limite térmica com as soluções definidas pelo método da integral de momentum de von Kármán, resguardado as diferenças esperadas dentre as evoluções de camadas-limite fluidodinâmica e térmica.

Recomenda-se que futuros trabalhos busquem o refino da solução numérica da Eq. (1) de Dairel e Gonçalves (2021) ou da Eq. (7) desta pesquisa a fim de possivelmente contornar as anomalias discutidas na seção anterior e possibilitar a generalização dos resultados para diversos valores das propriedades físicas. Por outro lado, recomenda-se modelar e solucionar o problema da transferência de calor turbulenta pelo método OQA sem adotar a hipótese de uma função α constante, o que certamente será um desafio matemático ainda maior. Sugere-se também a realização de experimentos que forneçam dados comparáveis com os resultados teóricos deste trabalho e de trabalhos futuros relacionados ao método OQA a fim de reafirmar os mesmos ou, alternativamente, refutá-los e apontar possibilidades de aprimoramento da modelagem do fenômeno de transporte.

5. REFERÊNCIAS

- Boyce, W. E.; Diprima, R. C., (2015). *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Rio de Janeiro, Brazil: LTC.
- Carvalho, Alexandre N.; Nunes, Wagner V. L.; Zani, Sérgio L., (2001). *Cálculo III*. Universidade de São Paulo. São Paulo, Brazil. Recuperado de <https://sites.icmc.usp.br/andcarva/sma332/awz.pdf>
- Castro, G. B., (2017). *Transferência convectiva turbulenta unidimensional de calor modelada segundo o método de ondas quadradas aleatórias com função coeficiente de redução constante*. (Trabalho de conclusão de curso). Centro Universitário de Patos de Minas, Patos de Minas, Brazil.
- Çengel, Yunus A.; Cimbala, John M., (2015). *Mecânica dos fluidos: fundamentos e aplicações*. (3a ed.) São Paulo, Brazil: Mc Graw Hill.
- Çengel, Yunus A.; Ghajar, Afshin J., (2012). *Transferência de calor e massa: uma abordagem prática*. (4a ed.). Porto Alegre, Brazil: AMGH.
- Dairel, V. S., Gonçalves, B. B., (2021). *Aplicação do método de ondas quadradas aleatórias na análise de transferência turbulenta de calor*. Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) – Centro Universitário de Patos de Minas, Patos de Minas, Brazil.
- Gonçalves, B. B., (2014). *Detalhando a solução unidimensional do método OQA com função coeficiente de redução constante aplicado ao transporte escalar interfacial turbulento*. 185 f. (Dissertação de mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brazil.
- Incropera, Frank P.; Bergman, Theodore L.; Lavine, Adrienne S.; Dewitt, David P., (2014). *Fundamentos de transferência de calor e massa*. (7a ed.). Rio de Janeiro. Brazil: LTC.
- Prefeitura de Santo André. Departamento de proteção e defesa civil. (2023). *Escala de Beaufort*. Recuperado de <https://www3.santoandre.sp.gov.br/defesacivil/escala-de-beaufort/>
- Schulz, H. E., (1985). *Investigação do mecanismo de reoxigenação da água em escoamento e sua correlação com o nível de turbulência junto a superfície*. (Dissertação de mestrado). Universidade de São Paulo, São Carlos, Brazil.
- Schulz, H. E., (2003). *O essencial em fenômenos de transporte*. São Carlos, Brazil: USP.
- Shulz, H. E.; Janzen, J. G., (2009). *Concentration fields near air-water interfaces during interfacial mass-transport: oxygen transport and random square wave analysis*. Brazilian Journal of Chemical Engineering, (Vol. 26). São Paulo, Brazil.
- Schulz, H. E.; Lopes Junior, G. B.; Simões, A. L. A.; Lobosco, R. J., (2011a). *One-dimensional turbulent transfer using random square waves – scalar/velocity and velocity/velocity interactions*. Hydrodynamics: Advanced Topics, In Tech, Rijeka.
- Schulz, H. E.; Simões, A. L. A.; Janzen, J. G., (2011b). *Statistical approximations in gas-liquid mass transfer*. Komori, S; McGillis, W.; Kurose, R. (Eds.), 2010. *Gas Transfer at Water Surfaces 2010*. Kyoto University Press, Kyoto, Japan.
- Stewart, James; Clegg, Daniel; Watson, Saleem, (2022). *Cálculo*. (9a ed., Vol. 2). São Paulo, Brazil: Cengage Learning.
- White, Frank M., (2018). *Mecânica dos fluidos*. (8a ed.). Tradução José Carlos Cesar Amorim. Porto Alegre, Brazil.

6. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.