

## VALIDAÇÃO DE UM MODELO NUMÉRICO DA VIBRAÇÃO DE UMA PLACA METÁLICA RETANGULAR SIMPLEMENTE APOIADA

Jéssica Cristiane Andrade, [jessica240496@hotmail.com](mailto:jessica240496@hotmail.com)<sup>1</sup>  
Pedro Pio Rosa Nishida, [pedronishida@ufu.br](mailto:pedronishida@ufu.br)<sup>1</sup>  
Pedro Henrique Silva Santos, [pedrosilva240@hotmail.com](mailto:pedrosilva240@hotmail.com)<sup>1</sup>  
Arthur Heleno Pontes Antunes, [arthur.antunes@ufu.br](mailto:arthur.antunes@ufu.br)<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidade Federal de Uberlândia, BR 050, Km 78 – Bloco 1DCG, Uberlândia – MG, 38410-337

**Resumo.** A importância do estudo de vibrações está relacionada especialmente à determinação dos seus efeitos sobre o desempenho e a segurança das estruturas e dos sistemas mecânicos, para o controle dos mesmos. Considerando que diversas estruturas são formadas por placas, este trabalho apresenta como principal objetivo o desenvolvimento de um modelo numérico que represente adequadamente a análise das vibrações de uma placa retangular simplesmente apoiada em suas quatro bordas e que possa ser utilizado posteriormente como referência para a execução de um modelo experimental. A partir da avaliação analítica da mecânica da placa, considerando a placa submetida às referidas condições de contorno, foi elaborado um programa no software MATLAB® para o cálculo das frequências naturais e para a visualização gráfica dos modos de vibração e do seu comportamento diante de excitações externas. A análise numérica, por sua vez, foi realizada através da implementação de um modelo via Método dos Elementos Finitos no software ANSYS® de modo a fornecer os resultados de interesse. O modelo numérico proposto foi considerado válido para todos os parâmetros de estudo avaliados.

**Palavras chave:** frequências naturais, modos de vibração, placa simplesmente apoiada, solução analítica, análise numérica

**Abstract.** The importance of studying vibrations is especially related to the determination of their effects on the performance and safety of structures and mechanical systems, for their control. Considering that several structures are formed by plates, this work has as main objective the development of a numerical model that adequately represents the analysis of the vibrations of a rectangular plate simply supported on its four edges and that can be used later as a reference for the execution of an experimental model. From the analytical evaluation of the mechanics of the plate, considering the plate submitted to the mentioned boundary conditions, a program was created in the MATLAB® software for the calculation of the natural frequencies and for the graphic visualization of the vibration modes and their behavior in the face of excitations external. Numerical analysis, in turn, was performed through the implementation of a model via the Finite Element Method in the ANSYS® software in order to provide the results of interest. The proposed numerical model was considered valid for all evaluated study parameters.

**Keywords:** natural frequencies, vibration modes, simply supported plate, analytical solution, numerical analysis

### INTRODUÇÃO

As vibrações estão presentes nas funções humanas vitais mais simples em que se pode imaginar (audição, visão, respiração, fala, por exemplo). Conforme Rao (2004) apresenta sobre o histórico da vibração, as suas origens se deram com o desenvolvimento dos primeiros instrumentos musicais e com os estudos sobre a música e o som. A compreensão sobre os fenômenos da natureza e as teorias matemáticas desenvolvidas a respeito da vibração de sistemas físicos foram os assuntos aos quais os primeiros intelectuais dedicaram maior atenção. Já as contribuições mais recentes relacionam-se especialmente com situações aplicadas à engenharia.

Percebe-se, dessa maneira, a abrangência do assunto de vibrações que se ramifica em diversos conteúdos mais específicos, entre os quais se destaca o estudo de vibrações de placas. Na atualidade, esta área de pesquisa alcançou especial importância e notável crescimento de aplicações, dado que diversos componentes na engenharia de estruturas podem ser enquadrados neste assunto. Szilard (2004) reforça esta ideia mencionando a engenharia civil, a construção

naval e a indústria aeroespacial, nas quais as placas são indispensáveis, além dos diversos maquinários e dispositivos mecânicos nos quais elas se apresentam como principal componente.

Nesse sentido, este trabalho apresenta como propósito o desenvolvimento de uma análise numérica da vibração de uma placa retangular com condições de contorno específicas (quatro bordas simplesmente apoiadas em suas extensões) possível de ser validada a partir da teoria de vibrações de placas. Com a formalização deste estudo analítico e numérico do comportamento de uma placa, foram definidas as suas frequências naturais, os seus modos de vibração e a sua resposta dinâmica à diferentes frequências de excitação, possibilitando o desenvolvimento de novos estudos sobre placas e, de modo especial, consolidando a base teórica para a elaboração e validação de um modelo experimental que represente com fidelidade os resultados do trabalho em questão.

## 1. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O objetivo principal do estudo de vibrações é a determinação de seus efeitos sobre o desempenho e a segurança dos sistemas e, por consequência, o controle dos mesmos. Para a compreensão adequada deste assunto e dos demais tópicos apresentados no presente trabalho, uma breve revisão a respeito dos conteúdos de dinâmica e vibrações, vibração de placas e método dos elementos finitos será apresentada.

### 1.1. Dinâmica e Vibrações

As vibrações se tratam de movimentos oscilatórios de sistemas dinâmicos, os quais se referem a associações de materiais que possuem massa e cujas partes podem apresentar movimento relativo, ou seja, todos os corpos dotados de massa e elasticidade são capazes de vibrar (TSE; MORSE; HINKLE, 1978). De maneira simplificada e com outras palavras, as vibrações são movimentos alternativos que ocorrem em torno de posições de equilíbrio, com amplitudes relativamente pequenas.

A classificação mais geral dos sistemas oscilatórios identifica a vibração como livre ou forçada (THOMSON; DAHLEH, 1998): denomina-se vibração livre quando forças que são inerentes ao sistema promovem a oscilação do mesmo sem a atuação de nenhuma força externa; a vibração forçada, por sua vez, acontece quando a excitação de forças externas atua sobre o sistema, a qual, quando oscilatória, força este a vibrar na mesma frequência. Deve-se mencionar ainda que na vibração livre, o sistema pode oscilar sob uma ou mais de suas frequências naturais, as quais são próprias do sistema dinâmico, definido pela sua rigidez e distribuição de massa.

O procedimento da análise de vibrações inclui uma série de etapas para a previsão do comportamento dos sistemas dinâmicos, cujas respostas normalmente são dependentes das condições iniciais e das excitações externas ao longo do tempo. A maioria deles são muito complexos, de modo que apenas as características mais importantes são consideradas, além da definição das condições de entrada. E as etapas que constituem o procedimento de análise são nesta ordem: modelagem matemática, obtenção das equações governantes, solução destas e interpretação dos resultados obtidos (RAO, 2004).

### 1.2. Vibração de Placas

De acordo com Szilard (2004), as placas podem ser definidas simplificadaamente como componentes estruturais planos, retos e bidimensionais, cuja espessura apresenta-se com dimensão muito menor que o comprimento e a largura. O formato e as extremidades físicas podem assumir variadas geometrias e as condições de contorno podem ser classificadas como livres, de apoio simples, fixas, incluindo também os casos de apoios e restrições elásticas e apoios pontuais.

Para realização da análise de uma placa é necessário implementar idealizações a respeito da sua geometria e apoios, do comportamento do material e dos tipos de carga e modos de aplicação. Isto ocorre porque a análise de uma estrutura real leva o estudo a um grau de complexidade tão elevado que a sua fiel representação torna a pesquisa inviável em diversos aspectos. Dessa forma, a estrutura real deve ser substituída por um modelo simplificado que assegure as principais características de seu comportamento.

Para a resolução e conclusão da análise das vibrações de uma placa são aplicadas as equações governantes da teoria da elasticidade, porém as soluções exatas são obtidas apenas para específicas condições de contorno e de carga (SZILARD, 2004). Na maioria dos casos, métodos de energia podem fornecer soluções analíticas razoáveis para problemas práticos. Porém, hoje em dia, os métodos de solução numéricos, a exemplo do método dos elementos finitos, alcançaram maior importância, especialmente pelo advento da ampla e facilitada utilização dos computadores atualmente, bem como devido à simplificação, rapidez e precisão obtidas pela técnica de discretização para resolução de problemas complexos com a aplicação destes métodos.

### 1.3. Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos se trata de uma técnica matemática de análise numérica baseada na discretização, ao considerar um meio contínuo, uma placa, por exemplo, como um conjunto de elementos de dimensão reduzida (pequenos componentes) finitos. Tais elementos preservam as propriedades do meio que constituem e a resposta do sistema se dá pela resolução simultânea das equações que governam os mesmos por um software computacional.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para o objeto de estudo principal desta pesquisa será considerada uma placa livre de espessura  $h$ , com dimensões características  $L_x$  e  $L_y$  ao longo dos eixos identificados pelos respectivos índices, posicionada em um sistema de coordenadas cartesianas  $Oxyz$  de acordo com a Fig. 1, sendo que  $Ox$  e  $Oy$  coincidem com seus eixos principais de inércia.

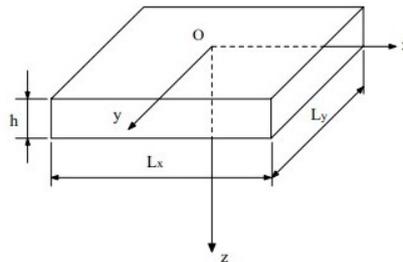


Figura 1. Posicionamento da placa no sistema de coordenadas cartesianas

O estudo da flexão de placas baseado nas hipóteses de Kirchhoff permite a análise das vibrações livres e do comportamento dinâmico de placas quando as mesmas estão sujeitas a condições de contorno e carregamentos específicos. A base da fundamentação teórica que fornece os principais resultados utilizados neste trabalho reside nos trabalhos de Gérardin e Rixen (1997) e de Szilard (2004).

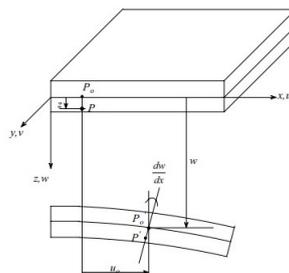


Figura 2. Cinemática da deformação da placa

Considerando as hipóteses da Teoria de Kirchhoff e considerando a cinemática da deformação de uma placa fina ilustrada na Fig. 2, podem ser estabelecidas as seguintes relações para  $u$ ,  $v$  e  $w$ , componentes do vetor deslocamento nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente:

$$u = u_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1)$$

$$v = v_0(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2)$$

$$w = w(x, y) \quad (3)$$

Onde  $u_0(x, y)$  e  $v_0(x, y)$  são deslocamentos resultantes de uma extensão inicial da placa através de uma pré-carga no plano médio.

Gérardin e Rixen (1997), a partir deste ponto, fornecem então o desenvolvimento da teoria da elasticidade (para materiais linearmente elásticos, homogêneos e isotrópicos), apresentam a expressão do princípio de Hamilton e os

conceitos de energia necessários à utilização do mesmo, além de todos os procedimentos de cálculo que resultam na equação diferencial da deflexão vertical  $w$  de uma placa retangular (Eq. (4)):

$$D\Delta\Delta w + m\ddot{w} - \bar{p} = 0 \quad (4)$$

Onde  $m$  é a massa por unidade de área,  $\bar{p}$  é o carregamento externo,  $\Delta$  é o operador de Laplace e  $D$  é o módulo de rigidez da placa, sendo os dois últimos definidos, respectivamente, pelas equações indicadas por Eq. (5) e Eq. (6):

$$\Delta = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (6)$$

Sendo  $E$  o módulo de elasticidade e  $\nu$  o coeficiente de Poisson.

## 2.1. Modos de Vibrar e Frequências Naturais

Diante desse resultado, para realizar o estudo proposto, considera-se a hipótese de vibrações livres (caracterizada pelo movimento harmônico e pela ausência de carga externa), de maneira que a equação do movimento da placa homogênea e isotrópica (não submetida a pré-tensão) resulta na Eq. (7):

$$\Delta\Delta w - \frac{\omega^2 m}{D} w = 0 \quad (7)$$

E a solução da mesma é fornecida em termos de funções hiperbólicas e trigonométricas, com constantes  $A_i$  e parâmetros  $\alpha$  e  $\gamma$  dependentes das condições de contorno, segundo a Eq. (8):

$$w(x, y) = A_1 \sin \alpha x \sin \gamma y + A_2 \cos \alpha x \sin \gamma y + A_3 \sin \alpha x \cos \gamma y + A_4 \cos \alpha x \cos \gamma y + A_5 \sinh \alpha x \sinh \gamma y + A_6 \cosh \alpha x \sinh \gamma y + A_7 \sinh \alpha x \cosh \gamma y + A_8 \cosh \alpha x \cosh \gamma y \quad (8)$$

Com a aplicação das condições de contorno no caso em que a placa apresenta as quatro bordas simplesmente apoiadas, tem-se que a deflexão e o momento de flexão ao longo dos eixos de cada borda são nulos. Esta é a única situação em que a solução analítica é exata. Assim, a solução do movimento da placa simplesmente apoiada, as frequências naturais e os modos de vibrar correspondentes (considerando  $A = 1$ ) são dados segundo a Eq. (9), Eq. (10) e Eq. (11), respectivamente:

$$w(x, y) = A \sin \alpha x \sin \gamma y \quad (9)$$

$$\omega_{rn} = \pi^2 \left[ \left( \frac{r}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{n}{L_y} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (10)$$

$$w_{rn}(x, y) = \sin \left( \frac{r\pi x}{L_x} \right) \sin \left( \frac{n\pi y}{L_y} \right) \quad (11)$$

Onde  $r$  e  $n$  assumem os valores de 1, 2, 3, ...,  $\infty$ , sendo parâmetros associados à indicação dos modos de vibração.

## 2.2. Resposta da Placa Simplesmente Apoiada a Excitações Externas

Para a análise da resposta dinâmica da placa simplesmente apoiada é considerado um carregamento transversal arbitrário que varia de modo harmônico (com frequência  $p$ ) ao longo do tempo, através de uma carga pontual  $P$  concentrada no centro da placa. A deflexão da placa simplesmente apoiada então é fornecida pela solução combinada das vibrações livres e forçadas, conforme apresenta Szilard (2004), dada pela Eq. (12):

$$w(x, y, t) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sin pt - \frac{p}{\omega_{rn}} \sin \omega_{rn} t \right) W_{rn} \sin \left( \frac{r\pi x}{L_x} \right) \sin \left( \frac{n\pi y}{L_y} \right) \quad (12)$$

Onde os coeficientes  $W_{rn}$  dependem das características da placa e do carregamento externo de acordo com a Eq. (13):

$$W_{rn} = \frac{4P \cdot \sin\left(\frac{r\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{L_x \cdot L_y \cdot m \cdot (\omega_{rn}^2 - p^2)} \quad (13)$$

### 3. METODOLOGIA

A proposta do trabalho consistiu na comparação entre as soluções analítica e numérica do comportamento de uma placa submetida à configuração de apoio simples quanto às condições de contorno, considerando, a partir da teoria e da simulação numérica, procedimentos para a determinação das frequências naturais, dos modos de vibração e do comportamento de uma dada placa, com dimensões e propriedades especificadas.

Dessa maneira, a seguir, são apresentadas as características gerais da placa definida para o estudo e os procedimentos usados para a implementação da solução analítica, baseada na fundamentação teórica, e da solução numérica, com resultados de cálculos e soluções gráficas obtidos através dos softwares MATLAB® R2015a e ANSYS (*Multiphysics*) R18.1, respectivamente.

#### 3.1. Caracterização da Placa

A placa selecionada para análise apresenta como material constituinte o Alumínio SAE 303, cujas propriedades físicas estão especificadas na Tab. 1, juntamente com as dimensões adotadas para o objeto de estudo:

Dimensão na direção $x$ ( $L_x$ )	0,30 m
Dimensão na direção $y$ ( $L_y$ )	0,35 m
Espessura ( $h$ )	0,001 m
Módulo de Elasticidade ( $E$ )	69 GPa
Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )	0,33
Densidade ( $\rho$ )	2700 kg/m <sup>3</sup>

As condições de contorno aplicadas para a placa caracterizaram-se pela configuração de apoio simples em todas as bordas, permitindo somente a rotação em torno de seu eixo, com a restrição do deslocamento, o qual não deve ocorrer em nenhuma direção.

Ao proceder com a análise dos modos de vibração da placa, nenhuma excitação externa foi estabelecida. E para o estudo da resposta da placa às excitações externas foi considerada a aplicação de uma carga concentrada no centro da placa segundo uma análise harmônica.

#### 3.2. Implementação da Solução Analítica

A rotina desenvolvida no MATLAB® foi utilizada para simular os resultados a partir da solução analítica, obtida de acordo com a teoria, com o intuito de se obter os valores das frequências naturais e a visualização dos modos de vibração da placa, segundo a solução exata. Para isto, os dados de entrada foram inseridos conforme a Tab. 1.

Para o caso da placa simplesmente apoiada nas quatro bordas, com a variação dos parâmetros  $r$  e  $n$ , uma matriz com os valores exatos das frequências naturais foi encontrada a partir da Eq. (10).

Para a definição de um modo de vibrar específico (com  $r$  e  $n$  definidos), a partir de uma estrutura própria do programa para um laço (denominada for), a deflexão foi determinada (Eq. (11)) para diversos pontos identificados por coordenadas específicas de  $x$  e  $y$ , percorrendo-se praticamente toda a área da placa.

Os valores da deflexão foram guardados em uma matriz e apresentados graficamente através do comando *contourf*, por meio da projeção ortogonal sobre o plano horizontal ( $Oxy$ ) das interseções da superfície da placa com planos paralelos ao plano da projeção.

Para a placa submetida a uma excitação externa, a Eq. (12) foi implementada, com o cálculo dos parâmetros  $W_{rn}$  a partir da Eq. (13), estabelecendo-se a aplicação do carregamento segundo uma força concentrada no centro da placa. Para que seja possível observar a forma das vibrações que a placa apresenta em cada frequência de excitação especificada, o primeiro termo da Eq. (12), dependente do tempo, foi considerado como sendo equivalente à unidade.

#### 3.3. Modelagem Numérica

Para a realização da simulação numérica e posterior comparação com a teoria das vibrações de placas foi utilizado o Método dos Elementos Finitos por meio do software ANSYS®. Partiu-se de uma análise estrutural com a seleção do elemento SHELL63, indicado na Fig. 3, o qual possui quatro nós e seis graus de liberdade em cada um deles (translações na direção e rotações em torno dos eixos  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$ ).

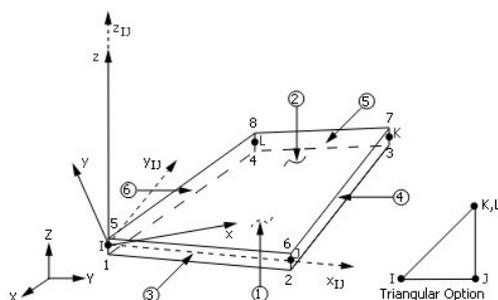


Figura 3. Geometria do elemento SHELL63

Depois disso, foram definidas a espessura e as propriedades do material, seguidas da modelagem da geometria estrutural da placa adotada segundo suas dimensões ao longo das direções  $x$  e  $y$ , conforme os dados da Tab. 1.

Feito isso, a malha de elementos finitos foi criada, sendo possível especificar a quantidade ou a dimensão destes, e as condições de contorno foram fixadas selecionando-se os nós que constituem os lados da placa e determinando seus deslocamentos e rotações.

Com isso, definiu-se o tipo específico de análise (modal e harmônica, nos casos estudados), foram aplicados os carregamentos externos aos quais a placa se encontra submetida quando da vibração forçada e, após a solução dada pelo software, obteve-se a visualização gráfica e os resultados dos parâmetros desejados na simulação.

## 4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 4.1. Freqüências Naturais

A partir da solução analítica foi possível encontrar as freqüências naturais exatas (Eq. (10)) da placa simplesmente apoiada adotada, tendo sido implementado o cálculo destes valores correspondentes aos nove modos de vibrar associados à variação dos parâmetros inteiros  $r$  e  $n$  de 1 a 3. Os resultados obtidos em Hz estão apresentados abaixo, na Tab. 2:

Tabela 2. Freqüências naturais exatas em Hz.

Índices dos Modos de Vibração ( $r, n$ )	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$r = 1$	46,8047	106,2741	205,2898
$r = 2$	127,7492	187,2186	286,3343
$r = 3$	262,6567	322,1261	421,2419

As freqüências naturais obtidas via simulação numérica, através do ANSYS, foram apresentadas a cada visualização gráfica do modo de vibração e, com o intuito de facilitar a comparação, os valores encontrados foram reunidos na Tab. 3 de modo análogo à apresentação dos valores exatos:

Tabela 3. Freqüências naturais pela análise numérica em Hz.

Índices dos Modos de Vibração ( $r, n$ )	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$r = 1$	46,8032	106,2680	205,3760
$r = 2$	127,7420	187,1960	286,2820
$r = 3$	262,6310	322,0690	421,1250

Como é possível notar, os resultados encontrados foram bastante próximos, mas não exatamente os mesmos dados pela solução analítica, divergindo apenas por casas decimais com erros relativos da ordem de  $10^{-4}$  e  $10^{-5}$ , como indica a Tab. 4. E a causa mais provável destas diferenças se deve à discretização da placa, ou seja, da malha utilizada, a qual fornece resultados cada vez mais precisos quanto mais refinada ela é.

Tabela 4. Erros relativos das freqüências naturais obtidas pela solução numérica.

Índices dos Modos de Vibração ( $r, n$ )	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$r = 1$	46,8032	106,2680	205,3760
$r = 2$	127,7420	187,1960	286,2820
$r = 3$	262,6310	322,0690	421,1250

### 4.2. Modos de Vibrar

Os modos de vibração da placa, conforme explicado no tópico da metodologia, foram obtidos tanto pela solução analítica através do MATLAB® R2015a, quanto pela análise numérica, por meio do ANSYS® R18.1.

Os resultados provenientes da projeção ortogonal sobre o plano horizontal (através do comando `contourf`) foram reunidos em uma única imagem com os nove modos de vibração variando-se  $r$  e  $n$  de 1 a 3, a qual é colocada lado a lado com a reunião das imagens resultantes da simulação numérica (via método dos elementos finitos) para efeito de comparação entre os respectivos modos de vibrar na Fig. 4:

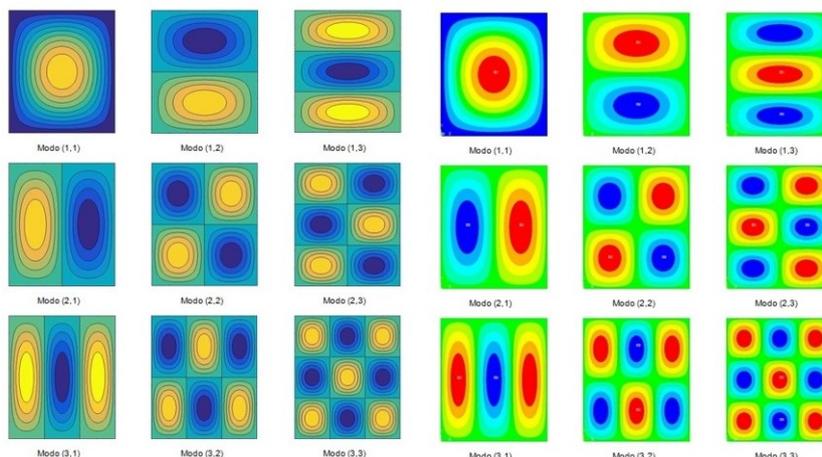


Figura 4. Modos de vibração pela solução analítica e pela solução numérica à esquerda e à direita, respectivamente

Através destes resultados, é possível perceber que os próprios índices dos modos de vibrar estão diretamente relacionados à resposta da placa na análise modal:  $r$  indica o número de meias-ondas de flexão ao longo da direção  $x$  e  $n$  indica o número de meias-ondas de flexão ao longo da direção  $y$ . No modo (2,3), por exemplo, considerando a projeção representada, observa-se duas meias-ondas na direção horizontal ( $x$ ) e três delas na direção vertical ( $y$ ).

Em todos os nove modos de vibração, os resultados analíticos e numéricos apresentaram grande equivalência entre si, não havendo necessidade de ressalva neste caso. A solução da análise modal através do método dos elementos finitos apresentou boa precisão e confiabilidade, considerando a implementação da solução analítica como referência do que era esperado segundo a teoria.

### 4.3. Resposta dinâmica às excitações externas

Para a análise da resposta da placa às excitações externas foi considerada uma carga concentrada no centro da mesma com valores fixados de modo aleatório. Os resultados obtidos tanto pela solução analítica implementada no MATLAB® (esquerda) quanto pela solução numérica do ANSYS® (direita) são apresentados a seguir nas imagens indicadas por Fig. 5 e Fig. 6 para as duas frequências de excitação definidas no estudo de 275 e 425 Hz, respectivamente.

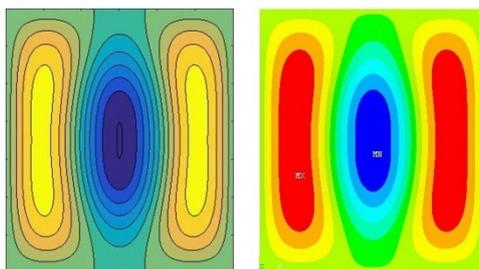


Figura 5. Excitação na frequência de 275 Hz

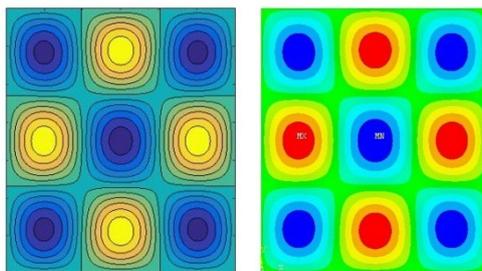


Figura 6. Excitação na frequência de 425 Hz

Diante dos resultados obtidos, observa-se que em alguns casos em que a frequência de excitação externa apresenta valor relativamente próximo da frequência natural da placa (e maior), a resposta da mesma se assemelha ao modo de vibrar em tal frequência. Isto ocorre para dois modos cujos índices são ímpares: a resposta à excitação de 275 Hz (Fig. 5) lembra o modo de vibração (3,1) e a resposta da placa à excitação de 425 Hz (Fig. 6) se parece bastante com o modo (3,3).

Por fim, comparando as análises segundo as soluções obtidas com os softwares MATLAB® (analítica) e ANSYS® (numérica), observa-se que em todos os casos da resposta à excitação externa os resultados encontrados foram bem condizentes entre si. E novamente, agora para a análise harmônica realizada, pode se dizer que o modelo numérico reproduziu com fidelidade o que se esperava da resposta da placa de acordo com a teoria.

## 5. CONCLUSÕES

O presente trabalho apresentou como objetivo principal a validação de um modelo numérico da vibração de uma placa metálica. Utilizando os principais resultados da literatura para a implementação da solução analítica exata para o movimento de uma placa simplesmente apoiada, foi possível realizar a comparação desta com a simulação numérica proposta que pôde ser validada.

Os parâmetros analisados foram: as frequências naturais, determinadas através do cálculo segundo a teoria e do modelo numérico; os modos de vibração e o comportamento dinâmico da placa em resposta às vibrações forçadas em diferentes frequências de excitação, a partir dos resultados gráficos obtidos via implementação da solução analítica e simulação numérica.

Os valores das frequências naturais resultantes da solução numérica foram muito próximos dos valores fornecidos pela solução analítica, diferindo apenas por casas decimais, muito provavelmente devido à malha utilizada e ao próprio método de aproximação que é utilizado na simulação.

Os modos de vibração expostos a partir de rotinas estabelecidas nos softwares MATLAB® e ANSYS® concordaram bastante entre si, refletindo exatamente os padrões esperados de acordo com a teoria. E as respostas da placa a diferentes excitações externas harmônicas, também avaliadas analítica e numericamente, forneceram padrões muito próximos entre si para cada frequência, de modo a ser possível afirmar que os resultados obtidos também foram adequadamente precisos neste caso.

Dessa maneira, pode se concluir que a implementação do modelo numérico da placa proposto no ANSYS® produziu resultados muito satisfatórios. Estes refletiram bem as respostas esperadas conforme a literatura, apropriadamente apresentadas de acordo com a rotina implementada no MATLAB®, comprovando o alcance do objetivo principal deste estudo.

## 6. REFERÊNCIAS

- Rao, S. S., 2004. Mechanical vibrations. 5. ed. Upper Saddle River: Pearson Education, Inc., Prentice Hall, 1084 p.
- Reddy, J. N., 2006. An introduction to the finite element method. 3. ed. New York: McGraw-Hill Higher Education, 766 p.
- Szilard, R., 2004. Theories and applications of plate analysis: classical, numerical and engineering methods. Hoboken: John Wiley & Sons Inc., 1024 p.
- Thomson, W. T., Dahleh, M. D., 1978. Theory of vibration with applications. 5. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, Inc. 524 p.
- Tse, F. S., Morse, I. E., Hinkle, R. T. Mechanical vibrations: theory and applications. 2. ed. Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1978. 449 p.

## 7. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.