

# ESTUDO ANALÍTICO, NUMÉRICO E EXPERIMENTAL DE UM SISTEMA DE 2 GRAUS DE LIBERDADE SOB VIBRAÇÕES FORÇADAS

Lorenzo Stabeli Diehl, [lorenzo.stabeli@gmail.com](mailto:lorenzo.stabeli@gmail.com)<sup>1</sup>

Israel Jorge Cárdenas Nuñez, [israel.nunez@uftm.edu.br](mailto:israel.nunez@uftm.edu.br)<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Engenharia Mecânica - Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Av. Randolpho Borges Júnior, 1400 - Univerdecidade, Uberaba - MG

**Resumo.** Apesar da relevância do método de elementos finitos (MEF) para problemas vibratórios, erros oriundos de seu uso inadequado e de sua ordem de aproximação ainda limitam sua utilização mais ampla na indústria. A fim de validar o MEF para análises modais e harmônicas, a resposta em frequência de um sistema de 2 graus de liberdade foi simulada e comparada a soluções analíticas para um modelo equivalente de parâmetros concentrados e dados de uma bancada de teste. Os resultados demonstraram que o MEF é capaz de prever com suficiente acurácia as frequências naturais e o deslocamento do sistema nas ressonâncias. Entretanto, o deslocamento e frequência de antirressonância previstas pelo MEF diferiram consideravelmente dos dados experimentais, indicando a necessidade de se otimizar os parâmetros do modelo numérico para aplicações de interesse prático.

**Palavras chave:** Método de elementos finitos. Vibrações mecânicas. Função resposta em frequência. Sistema de 2 GDL.

**Abstract.** In spite of the relevance of the finite element method (FEM) to vibration problems, errors arising from its inadequate use and approximation order still limit its wider use in industry. To validate the FEM for modal and harmonic analyses, the frequency response function of a two degree of freedom system was simulated and compared against analytical solutions of an equivalent lumped-parameter model and data from a test rig. The results showed that FEM is able to predict the natural frequencies and displacement of the system near resonances with sufficient accuracy. Nevertheless, the antiresonance displacement and frequency predicted by FEM differed significantly from experimental data, suggesting the necessity of optimizing the numerical model parameters for applications of practical interest.

**Keywords:** Finite element method, Mechanical vibrations, Frequency response function, Two degree of freedom system.

## 1. INTRODUÇÃO

Vibrações mecânicas podem não apenas danificar equipamentos e edificações, como também induzir doenças musculares e neurológicas em trabalhadores em condições insalubres (Krajnak, 2018). Em contrapartida, vibrações são utilizadas para movimentação, mistura e separação de materiais em transportadores vibratórios e peneiras industriais (Kipriyanov e Plotnikova, 2022), ou ainda convertidas em eletricidade quando presentes em transportes terrestres (Pan *et al.*, 2021) ou induzidas por escoamentos (Ma e Zhou, 2022). Ora prejudiciais, ora favoráveis, vibrações mecânicas demandam análise ainda durante as etapas iniciais de projetos e de desenvolvimento de novos produtos. Entretanto, os custos associados a prototipagem e ensaios, aliados à escassez de soluções de forma fechada para as equações dinâmicas de sistemas vibratórios de geometria complexa, inviabilizam muitas das vezes o estudo de vibrações e de técnicas para o seu controle. Frente às dificuldades em se caracterizar o comportamento vibratório de estruturas de interesse prático por métodos analíticos e experimentais, são necessárias idealizações que simplifiquem sua modelagem e permitam seu tratamento matemático. Ao substituir-se o modelo de uma estrutura contínua por um conjunto finito e reduzido de graus de liberdade (GDL), é possível se obter equações dinâmicas que descrevam o sistema com suficiente fidelidade, a depender das simplificações adotadas. A seguir, aborda-se a utilidade e relevância do sistema de 2 GDL (representativo dos modelos de parâmetros concentrados) e do método de elementos finitos (MEF) para a análise de vibrações mecânicas.

### 1.1 Sistema de 2 GDL

O sistema de 2 GDL abordado neste trabalho é composto por duas mesas, sendo a mesa menor apoiada sobre a mesa maior por meio de suspensões de lâminas flexíveis em paralelo, conforme apresentado na Figura 1. Devido à configuração das mesas, o seu movimento é acoplado e restrito apenas à translação no plano horizontal e na mesma direção da força de excitação atuante sobre as mesas, cuja massa é muito superior à massa das suspensões. Neste modelo de parâmetros concentrados, as equações diferenciais parciais que regem a elastodinâmica do sistema, com propriedades distribuídas no espaço, são substituídas por equações diferenciais ordinárias aplicáveis a elementos de inércia, rigidez e

amortecimento discretos, reduzindo o número de GDL da estrutura ao número de mesas e viabilizando soluções analíticas. Este sistema tem sido objeto de estudo comum a diversas áreas das engenharias aeroespacial e mecânica, uma vez que estas compartilham dos métodos para a análise de dinâmica estrutural (Jalili Sadr Abad *et al.*, 2020). No estudo de Moura Júnior *et al.* (2001), os autores observaram o aparecimento de uma antirressonância na resposta da mesa inferior de um sistema de 2 GDL, forçado harmonicamente por um excitador elétrico. Ozer e Yagiz (2011) realizaram a análise modal experimental do sistema de 2 GDL e sintonizaram um absorvedor dinâmico de vibrações passivo aos parâmetros modais identificados, atenuando a resposta do sistema a carregamentos cíclicos. Por sua vez, Silva *et al.* (2019) aplicaram um absorvedor pendular a um aparato experimental composto por um sistema de 2 GDL, de caráter didático e análogo àquele da bancada de teste construída por Loccufier e Petit (2011), na qual controladores PID foram aplicados ao servomotor responsável pela excitação da plataforma à qual a mesa inferior era fixa.

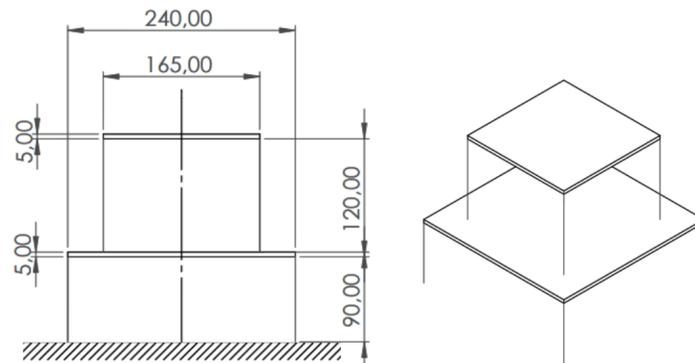


Figura 1. Sistema de 2 GDL abordado no trabalho, com dimensões em milímetros

## 1.2 Aplicação do MEF a vibrações mecânicas

Para o estudo de estruturas dificilmente modeláveis por parâmetros concentrados, métodos numéricos apresentam-se como uma alternativa viável. Desde a década de 1960, estes têm se beneficiado do avanço da capacidade computacional, que possibilitou o seu uso cada vez mais intensivo para resolução de problemas estruturais. Dentre os métodos numéricos adequados a vibrações mecânicas destaca-se o MEF, que discretiza a geometria em um conjunto finito de elementos, com vértices denominados pontos nodais e para os quais matrizes elementares são obtidas ao avaliar-se funções que aproximem as equações governantes do problema em forma variacional. Ao combinar as matrizes elementares em uma única matriz global e invocar a condição de estacionariedade que rege o problema, um sistema de equações algébricas é enfim obtido e solucionado por algoritmos numéricos convencionais (Atalla e Sgard, 2015). A utilidade do MEF ao estudo de vibrações mecânicas é ampla e se estende desde problemas diretos, como análises modal e harmônica, a problemas inversos, nos quais busca-se estimar os parâmetros modais que resultariam em um comportamento vibratório previamente conhecido.

Apesar da gama de vantagens e possibilidades do MEF, é necessário que o seu usuário conheça não apenas os fundamentos da teoria de vibrações mecânicas, como também as limitações e boas práticas particulares ao método para evitar erros decorrentes da definição do problema, do uso impróprio de elementos, da aplicação inadequada de condições de contorno e cargas, da resolução insuficiente da malha ou ainda da própria ordem do método numérico (Meireles, 2008). Em adição a estas fontes de erros, outra potencial limitação do MEF é oriunda do comportamento de juntas (tais como rebites, parafusos e soldas), haja vista que o seu tipo e localização influenciam significativamente a ocorrência de não-linearidades e o amortecimento da estrutura. A representação do comportamento dinâmico de tais juntas requer, por sua vez, modelos adicionais com diferentes níveis de linearidade, dimensionalidade e motivação fenomenológica ou física (Bograd *et al.*, 2011), contribuindo assim para uma maior complexidade do modelo numérico.

## 1.3 Objetivo do trabalho

Apesar da crescente importância do MEF para a redução dos ciclos de desenvolvimento e do tempo de lançamento no mercado, tendência corroborada pelo avanço de conceitos como gêmeos digitais e indústria 4.0, o seu uso é ainda limitado a indústrias de maior maturidade tecnológica e a um número reduzido de produtos, devido à falta de confiabilidade do método numérico. A validação deste por meio de dados experimentais ou soluções analíticas conhecidas é fundamental para que estas dificuldades sejam superadas e para que inovações sejam bem-sucedidas. Desta forma, é objetivo deste trabalho validar a acurácia do MEF através do estudo analítico, numérico e experimental do sistema de 2 GDL apresentado. Apesar de tratar-se de uma configuração simplificada, a escolha pelo sistema de 2 GDL é justificada pela sua capacidade em representar características vibratórias comuns a estruturas mais complexas enquanto custos computacionais são mantidos a níveis aceitáveis, servindo portanto como um *benchmark* ideal. Além disso, espera-se que os resultados deste trabalho,

em adição à bancada de teste construída, possam ser aproveitados enquanto materiais de apoio ao ensino de disciplinas relacionadas a vibrações mecânicas, haja vista o potencial didático da configuração de 2 GDL para esse fim.

## 2. MODELO ANALÍTICO

O comportamento dinâmico de um sistema qualquer de 2 GDL pode ser formulado em termos de seu vetor de deslocamentos, seu vetor de carregamentos e sua matriz de impedância mecânica – que por sua vez, é dependente da frequência da excitação a qual está sujeito (Rao, 2017) – na forma de uma função resposta em frequência (FRF), que expressa a relação entre entradas e respostas de um sistema linear e invariante no tempo. Para o sistema de 2 GDL ilustrado na Figura 2, sujeito a uma única força externa sobre a mesa inferior com frequência angular  $\omega$ , as FRFs das mesas inferior e superior em forma complexa são respectivamente dadas por

$$\frac{X_1}{F_1} = \frac{Z_{22}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2} = \frac{-\omega^2 m_2 + j\omega c_2 + k_2}{[-\omega^2 m_1 + j\omega(c_1 + c_2) + (k_1 + k_2)](-\omega^2 m_2 + j\omega c_2 + k_2) - (j\omega c_2 + k_2)^2} \quad (1)$$

$$\frac{X_2}{F_1} = \frac{-Z_{12}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2} = \frac{j\omega c_2 + k_2}{[-\omega^2 m_1 + j\omega(c_1 + c_2) + (k_1 + k_2)](-\omega^2 m_2 + j\omega c_2 + k_2) - (j\omega c_2 + k_2)^2} \quad (2)$$

sendo  $m$ ,  $k$  e  $c$  a massa, rigidez e amortecimento das mesas, respectivamente. Para comparação com os resultados experimentais, as Equações 1 e 2 foram avaliadas adotando-se massas iguais às das mesas inferior ( $m_1$ ) e superior ( $m_2$ ) da bancada de teste; a rigidez das suspensões das mesas inferior ( $k_1$ ) e superior ( $k_2$ ) foi estimada com base no módulo de elasticidade para uma liga de aço ( $E = 210\text{GPa}$ ) e em sua geometria, modelada como uma viga em balanço; e o efeito do amortecimento foi desprezado. A Tabela 1 apresenta os valores adotados para o modelo analítico. Com o MATLAB®, avaliou-se as Equações 1 e 2 para um intervalo de 0 a 40Hz e com resolução em frequência de 0,016Hz.

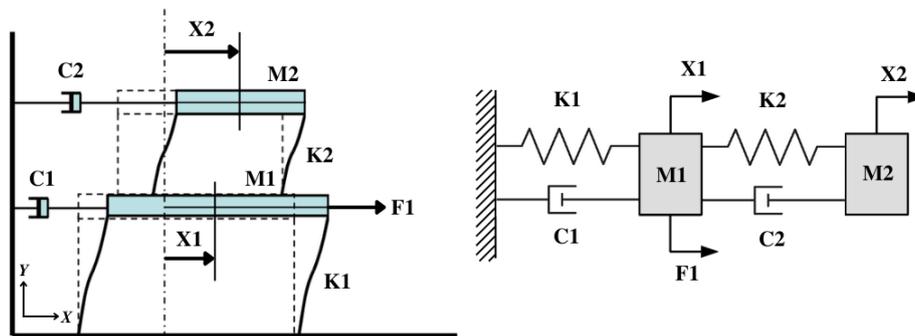


Figura 2. Sistema de 2 GDL e seu sistema massa-mola-amortecedor correspondente

Tabela 1. Propriedades utilizadas no modelo analítico do sistema de 2 GDL

$m_1$ [kg]	$m_2$ [kg]	$k_1$ [N/m]	$k_2$ [N/m]	$c_1$ [Ns/m]	$c_2$ [Ns/m]
4,52	2,49	23.045	9.722	0	0

## 3. MODELO NUMÉRICO

Para a análise harmônica do sistema de 2 GDL pelo MEF, utilizou-se a linguagem APDL do software ANSYS®. No pré-processamento, definiu-se elementos de volume SOLID185 e de mola-amortecedor COMBIN14 para modelagem das mesas e de suas suspensões, respectivamente. Definiu-se os conjuntos de constantes reais dos elementos COMBIN14 com coeficientes de rigidez iguais aos da Tabela 1 divididos pelas quatro suspensões de uma mesma mesa, dado que estas estavam associadas em série. Também desprezou-se o efeito do amortecimento na análise pelo MEF. Em seguida, atribuiu-se material elástico, linear e isotrópico aos elementos SOLID185, com valores de densidade volumétrica escolhidos de forma a se obter sólidos com massas iguais às aquelas apresentadas na Tabela 1; já o coeficiente de Poisson adotado foi arbitrário, uma vez que desprezou-se quaisquer deformações das mesas. Conforme as dimensões esboçadas na Figura 1, criou-se dois blocos retangulares, referentes às mesas, e oito pontos nodais, referentes às bases das suspensões.

Com a geometria do modelo de MEF criada, definiu-se o número de divisões das linhas dos blocos retangulares como igual à unidade (modelando cada mesa com um único elemento finito) e atribuiu-se a cada mesa seu respectivo material e densidade volumétrica. Criou-se oito elementos COMBIN14 conectando-se quatro pontos nodais aos vértices da mesa inferior e quatro pontos nodais aos vértices da mesa superior. Também atribuiu-se a cada suspensão seu respectivo

conjunto de constantes reais e rigidez. Os diferentes tipos de elementos utilizados no modelo são ilustrados na Figura 3a, com elementos SOLID185 e COMBIN14 identificados por "1" e "2", respectivamente. Por fim, conforme mostrado na Figura 3b, impôs-se condições de contorno e carga unitária aos pontos nodais, impedindo a translação nas direções  $y$  e  $z$ , a rotação nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  e qualquer movimento relativo entre os pontos nodais de uma mesma mesa. As extremidades livres das suspensões da mesa inferior foram engastadas e aplicou-se a carga unitária em um ponto nodal qualquer da mesa inferior, uma vez que as restrições cinemáticas asseguravam a seus pontos nodais comportamento de corpo rígido. Finalizado o pré-processamento, realizou-se a análise harmônica do modelo numérico para um intervalo de 0 a 40Hz e com resolução em frequência de 0,016Hz, obtendo-se como resultado final as FRFs das mesas inferior e superior.

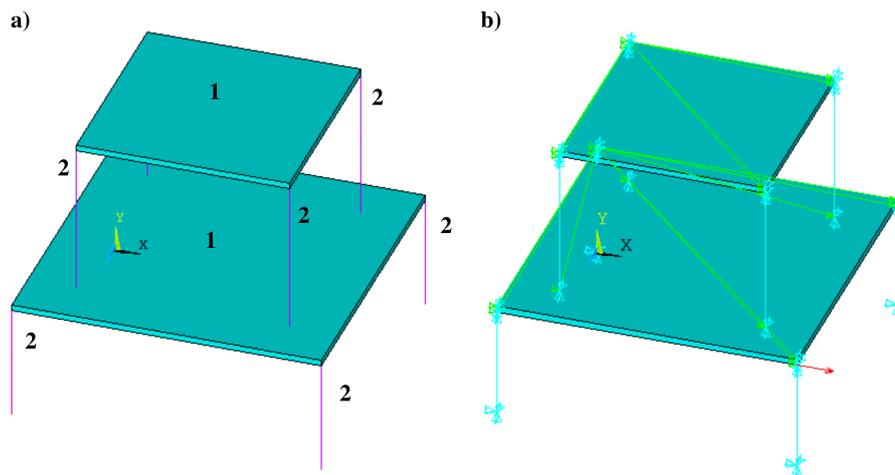


Figura 3. Modelo com (a) tipos de elemento utilizados e com (b) condições de contorno e carga aplicadas

#### 4. MODELO EXPERIMENTAL

Para validação dos resultados analíticos e numéricos, realizou-se testes no Laboratório de Vibrações e Acústica da Universidade Federal do Triângulo Mineiro. Uma bancada de teste foi construída, visando um aparato experimental de fácil montagem e adequado para fins didáticos. Conforme a Figura 4, as mesas da bancada consistiam em chapas metálicas quadradas com suas laterais fixas, por meio de parafusos, a lâminas flexíveis de aço e seção transversal retangular, sendo as dimensões da bancada iguais às mostradas na Figura 1 e as massas das mesas inferior e superior iguais a  $m_1 = 4,52\text{kg}$  e  $m_2 = 2,49\text{kg}$ , respectivamente. A mesa inferior da bancada foi excitada de forma que a resposta do sistema a diferentes frequências e as FRFs experimentais das mesas fossem obtidas em um único experimento. O tipo de excitação foi um ruído banco de banda estreita entre 0 a 1000Hz.

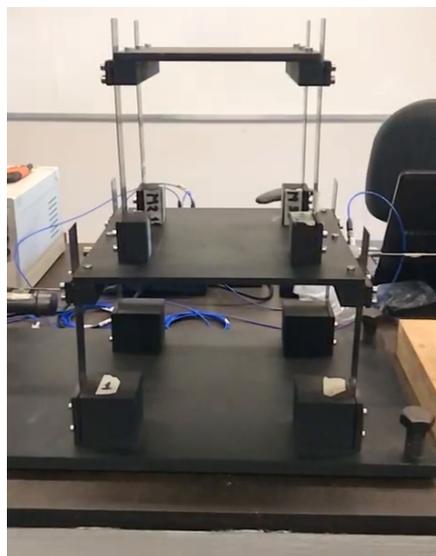


Figura 4. Bancada de teste utilizada nos experimentos.

Para a aquisição de sinais de vibração, utilizou-se os seguintes componentes: 2 acelerômetros da fabricante PCB Piezotronics®; 1 célula de carga da fabricante PCB Piezotronics®; 1 placa de aquisição da fabricante National Instruments® e modelo NI USB-6259; 1 amplificador de sinais da fabricante PCB Piezotronics®; 1 amplificador de sinais da fabricante Modal Shop® e modelo 2050E09; 1 vibrador eletrodinâmico (*shaker*) da fabricante Modal Shop® e modelo 2100E11; 1 computador com o software MATLAB® e cabos do tipo coaxial de baixo nível de ruído com conectores BNC/BNC. A bancada de teste e os componentes foram conectados conforme a Figura 5. Gerou-se com o MATLAB® o ruído branco de banda estreita que, após convertido em sinal analógico pela placa de aquisição e amplificado pelo primeiro amplificador de sinais, foi enviado ao vibrador eletrodinâmico (*shaker*), que por meio da célula de carga transmitiu uma força horizontal de excitação aleatória à mesa inferior do sistema. Amostrou-se, com uma frequência de aquisição  $f_s$  de 16.384Hz e durante um intervalo  $T$  de 300 segundos, os sinais de saída dos acelerômetros e da célula de carga, que foram condicionados por um segundo amplificador de sinais antes de digitalizados pela placa de aquisição conectada ao computador.

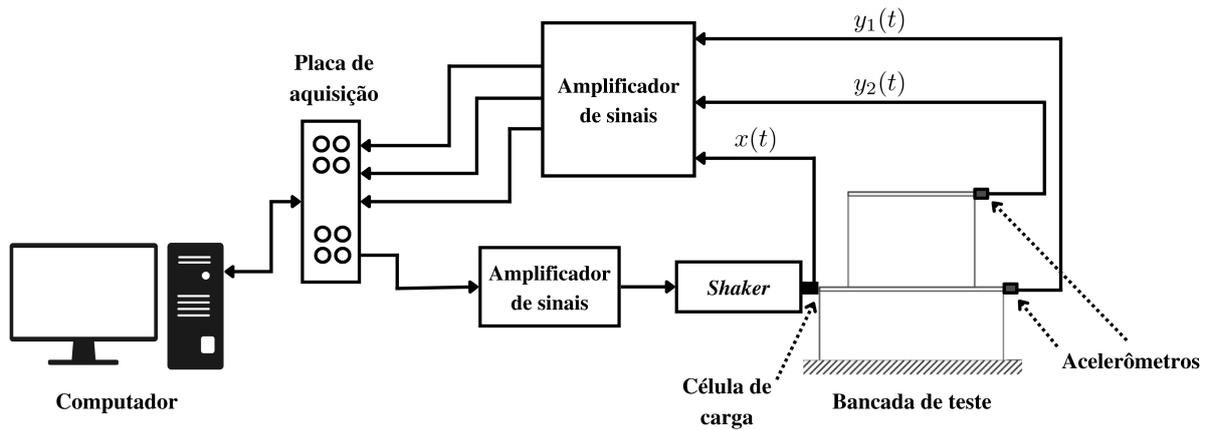


Figura 5. Diagrama esquemático do sistema de aquisição de sinais da bancada de teste

Com os sinais de entrada  $x(t)$  e de saída  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  mensurados, utilizou-se métodos de processamento de sinais para extrair as informações de interesse. Primeiramente, para truncar as séries discretas e minimizar efeitos de vazamento espectral, multiplicou-se os sinais originais no domínio do tempo pela janela de Hanning, obtendo-se sinais janelados  $x'(t)$ ,  $y_1'(t)$  e  $y_2'(t)$ . Com os sinais devidamente pré-processados, aplicou-se o algoritmo FFT (*Fast Fourier Transform*) para cálculo da Transformada de Fourier Discreta (TFD) da entrada  $X(\omega)$  e saídas  $Y_1(\omega)$  e  $Y_2(\omega)$ . Em seguida, calculou-se para cada mesa do sistema de 2 GDL o espectro cruzado entre a entrada e sua respectiva saída  $S_{yx}$  (o produto da TFD do sinal de entrada com o complexo conjugado da TFD do sinal de saída), assim como o auto-espectro da entrada  $S_{xx}$  (o produto da TFD do sinal de entrada com seu complexo conjugado), conforme as Equações 3 e 4:

$$S_{yx}(\omega) = X(\omega)Y^*(\omega) \quad (3)$$

$$S_{xx}(\omega) = X(\omega)X^*(\omega) \quad (4)$$

Desta maneira, pôde-se calcular a FRF de cada mesa através do estimador  $H_1$  (Equação 5), definido como o espectro cruzado entre a entrada e saída, dividido pelo auto-espectro da entrada. Este estimador foi escolhido, uma vez que a força de excitação era provida pelo vibrador eletrodinâmico (*shaker*) e logo, era esperado um baixo nível de ruído no sinal de entrada, se comparado ao nível de ruído no sinal de saída. Também calculou-se a função de coerência  $C_{xy}$  entre os sinais (Equação 6), para quantificar a sua correlação e obter uma medida da dependência linear e causalidade das vibrações em relação à força de excitação.

$$H_1(\omega) = \frac{S_{yx}(\omega)}{S_{xx}(\omega)} \quad (5)$$

$$C_{xy}(\omega) = \frac{|S_{yx}(\omega)|^2}{S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega)} \quad (6)$$

## 5. RESULTADOS

Os resultados analíticos, numéricos e experimentais são apresentados na Figura 6. De antemão, pôde-se notar entre os picos de ressonância o surgimento de uma antirressonância, proporcionada pela conexão da mesa sob excitação à mesa superior que, nesta configuração, atuou analogamente a um absorvedor dinâmico de vibrações passivo e filtrou

a resposta da mesa inferior em torno de uma frequência de excitação intermediária às frequências naturais do sistema global. Além disso, as alternâncias nos gráficos de fase de cada diagrama de Bode apontaram corretamente a ocorrência de ressonâncias e antirressonâncias em seus respectivos gráficos de magnitude, para ambos os modelos analítico e numérico. Apesar do ruído no gráfico de fase dos resultados experimentais, este também sofreu alternâncias durante a ocorrência das ressonâncias e seguiu a tendência dos diagramas de fase analítico e numérico.

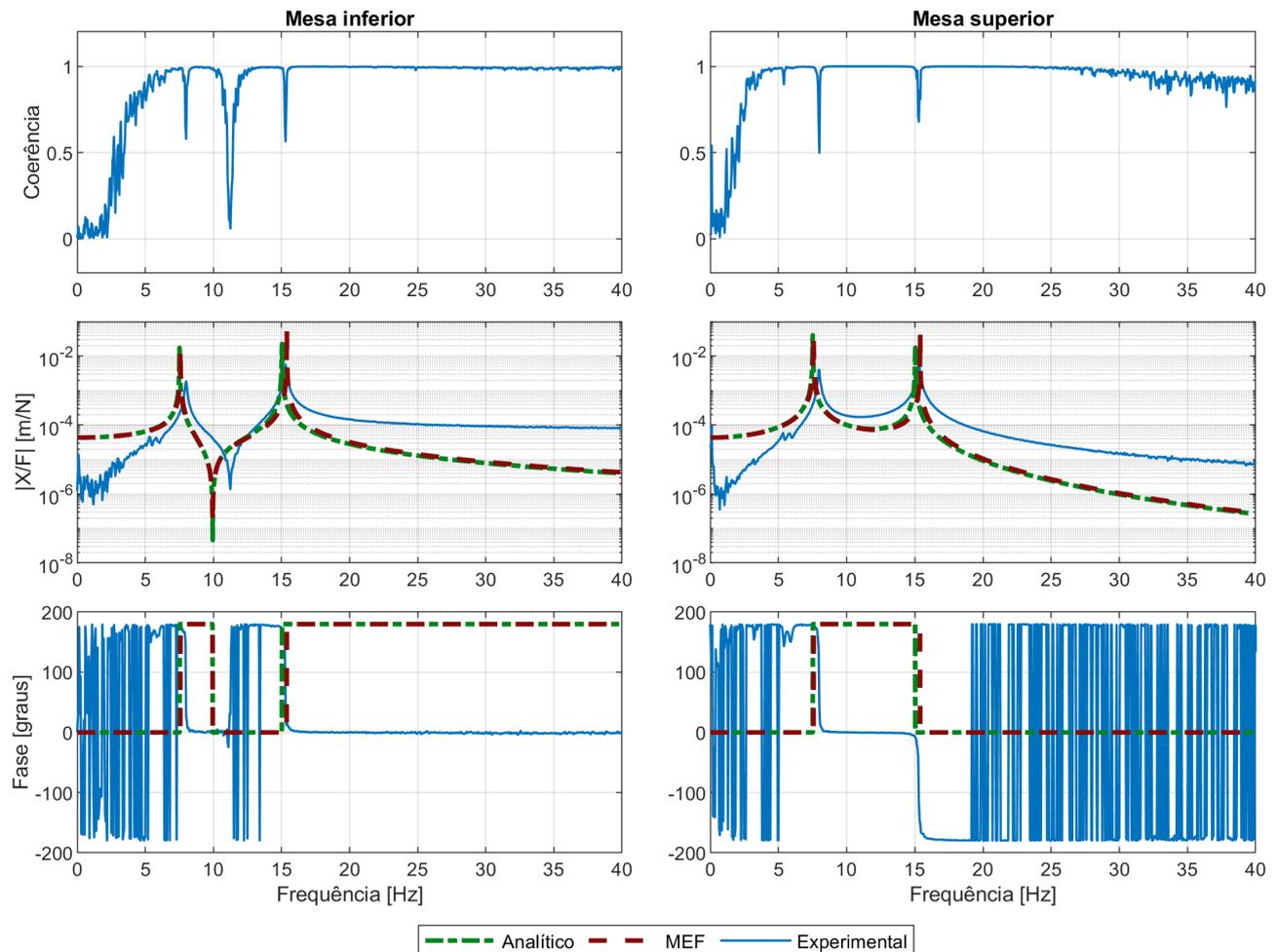


Figura 6. Coerência e diagramas de Bode dos resultados analíticos, numéricos e experimentais do sistema de 2 GDL

Previamente à análise dos diagramas de Bode experimentais, comparou-se os diagramas de Bode analíticos e numéricos. Em geral, as frequências naturais do sistema e a frequência de antirressonância obtidas pelo modelo numérico concordaram bem com as frequências previstas pelo modelo analítico, apesar da leve discrepância entre as FRFs em torno da segunda frequência natural. No entanto, o modelo numérico resultou em maiores deslocamentos de ambas as mesas durante a segunda ressonância e a antirressonância, à medida que resultou em deslocamentos em torno da primeira ressonância praticamente idênticos, se comparado ao modelo analítico. Desta forma, consideradas a banda de frequência analisada e as premissas simplificadoras adotadas para a definição do problema, pôde-se considerar os modelos analítico e numérico como equivalentes para a análise harmônica do sistema de 2 GDL, a julgar pela similaridade entre os resultados.

Analisando-se as funções de coerência dos dados experimentais, observou-se uma significativa e esperada redução na coerência entre os sinais de entrada e saída da mesa inferior ao redor da frequência de antirressonância, indicando uma baixa causalidade entre a resposta do sistema e a força de excitação (haja vista que esta era incapaz de surtir grandes deslocamentos da mesa inferior para esta frequência). Também houve quedas na coerência em torno das frequências naturais estimadas pelos modelos analíticos e numéricos. Estas quedas podem ser explicadas pela menor dependência da resposta do sistema em relação ao sinal de excitação nas ressonâncias, durante as quais os sinais de entrada e saída eram mais sensíveis a fontes de ruído e as FRFs, mais suscetíveis a vazamento espectral. Os baixos e ruidosos níveis de coerência para frequências abaixo de 5 Hz inviabilizaram a validação dos resultados teóricos nesta banda, uma vez que os sinais amostrados não necessariamente representavam o comportamento real do sistema.

Adotando-se a média aritmética das frequências estimadas para as mesas inferior e superior com a função *modalfit*, nativa do MATLAB®, a frequência natural fundamental ( $f_1$ ), a segunda frequência natural ( $f_2$ ) e a frequência de an-

tirressonância ( $f_a$ ) para cada um dos três modelos foram calculadas e apresentadas na Tabela 2, que também contém os erros dos modelos analítico e numérico, relativos aos dados experimentais. O MEF previu com razoável precisão a frequência natural fundamental, apesar do deslocamento observado ter sido menos intenso do que previsto pelo modelo, o que pode ser explicado pela negligência do amortecimento estrutural e do efeito de possíveis folgas nas juntas do aparato experimental. Uma precisão ainda melhor do MEF foi observada em torno da segunda frequência natural, apesar do deslocamento teórico novamente acima do observado.

Tabela 2. Erros dos resultados analíticos e numéricos relativos aos dados experimentais

Frequência	Experimental	Analítico		Numérico	
	Valor [Hz]	Valor [Hz]	Erro relativo [%]	Valor [Hz]	Erro relativo [%]
$f_1$	7,979	7,517	5,79	7,571	5,11
$f_a$	11,250	9,947	11,58	9,952	11,54
$f_2$	15,289	15,034	1,67	15,392	0,67

A principal deficiência do MEF foi a capacidade de previsão do deslocamento e frequência associados à antirressonância, que se diferiram consideravelmente em relação aos dados experimentais, assim como a resposta do sistema para bandas superiores à segunda frequência natural. É provável que estas discrepâncias sejam também oriundas da desconsideração de efeitos dissipativos sobre o sistema, o que poderia ser corrigido através da otimização das matrizes de massa, rigidez e amortecimento do modelo, de forma a minimizar a diferença entre os comportamentos teórico e experimental do sistema (Gladwell, 1997). Independentemente destas limitações, uma vez demonstrada neste trabalho a equivalência entre o modelo analítico e o modelo numérico para a análise harmônica do sistema de 2 GDL, os erros entre os resultados teóricos e experimentais não podem ser atribuídos unicamente ao MEF, mas sim devem ser considerados como decorrentes das simplificações adotadas pelo modelo de parâmetros concentrados, que serviu como referência para a criação do modelo de MEF.

## 6. CONCLUSÕES

Validou-se neste trabalho a capacidade do MEF em simular o comportamento vibratório de um sistema de 2 GDL próximo a ressonâncias, especialmente em torno de sua segunda frequência natural. Ao comparar-se os resultados do MEF a soluções analíticas obtidas para um modelo com parâmetros concentrados e que serviu como referência para a criação do modelo numérico, concluiu-se que as simplificações adotadas pelo modelo analítico muito provavelmente foram as responsáveis pelas divergências entre os resultados numéricos e os dados experimentais, em adição aos efeitos de amortecimento negligenciados na análise por MEF. Deste modo, demonstrou-se que a análise harmônica de uma configuração de relativa simplicidade pode ser conduzida pelo MEF, aplicável também a problemas dinâmicos de maior complexidade e abrangência, uma vez garantido que as simplificações adotadas durante a modelagem não inviabilizem a utilidade dos resultados numéricos. Ademais, evidenciou-se com sucesso o potencial didático da bancada de teste para o ensino de tópicos referentes a vibrações mecânicas, instrumentação e análise de sinais. Para pesquisas futuras, sugere-se investigar estratégias que mitiguem a deficiência do MEF em prever o comportamento de estruturas para frequências de excitação próximas a antirressonâncias, falha esta possivelmente corrigível pelo ajuste dos parâmetros do modelo numérico (em especial o amortecimento estrutural) a dados experimentais, assim como pela utilização de elementos de outros tipos ou ainda de modelos de juntas, quando aplicáveis. Além disso, propõem-se também simular outros modelos de parâmetros concentrados e analisar a influência de uma maior quantidade de GDL sobre a acurácia do MEF, dado que a presença de picos de ressonância em bandas de frequência distintas das analisadas neste trabalho pode influenciar a qualidade dos resultados.

## 7. REFERÊNCIAS

- Atalla, N. e Sgard, F., 2015. *Finite element and boundary methods in structural acoustics and vibration*. CRC Press.
- Bograd, S., Reuss, P., Schmidt, A., Gaul, L. e Mayer, M., 2011. "Modeling the dynamics of mechanical joints". *Mechanical systems and signal processing*, Vol. 25, No. 8, p. 2801–2826.
- Gladwell, G., 1997. "Inverse vibration problems for finite-element models". *Inverse Problems*, Vol. 13, No. 2, p. 311.
- Jalili Sadr Abad, M., Mahmoudi, M. e Dowell, E., 2020. "Novel technique for dynamic analysis of shear frames based on energy balance equations". *Scientia Iranica*, Vol. 27, No. 3, p. 1091–1112.
- Kipriyanov, F.A. e Plotnikova, Y.A., 2022. "Application of mathematical methods to evaluate vibration conveyor". *International Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 7, No. 1, p. 6544–6554.
- Krajnak, K., 2018. "Health effects associated with occupational exposure to hand-arm or whole body vibration". *Journal of Toxicology and Environmental Health, Part B*, Vol. 21, No. 5, p. 320–334.

- Loccufier, M. e Petit, F., 2011. “Multifunctional pilot plant for mechanical engineers”. *International Journal of Mechanical Engineering Education*, Vol. 39, No. 1, p. 31–45.
- Ma, X. e Zhou, S., 2022. “A review of flow-induced vibration energy harvesters”. *Energy Conversion and Management*, Vol. 254, p. 115223.
- Meireles, J.F.B., 2008. *Análise dinâmica de estruturas por modelos de elementos finitos identificados experimentalmente*. Doutorado em engenharia mecânica, Universidade do Minho, Guimarães, Portugal.
- Moura Júnior, J., Martins, G., Jacomine, L. e Lépure Neto, F., 2001. “Absorvedor dinâmico de vibrações para um sistema de 2 GDL”. In *Anais do VIII Congresso Nacional de Estudantes de Engenharia Mecânica*. Salvador, Brasil.
- Ozer, H.O. e Yagiz, N., 2011. “Reducing vibration effects on the two storey building model using dynamic absorber”. In *Second International Conference on Advances in Mechanical Engineering (AME2011)*.
- Pan, H., Qi, L., Zhang, Z. e Yan, J., 2021. “Kinetic energy harvesting technologies for applications in land transportation: A comprehensive review”. *Applied Energy*, Vol. 286, p. 116518.
- Rao, S., 2017. *Mechanical Vibrations*. Pearson Prentice Hall, 6ª edição.
- Silva, A., Farias, W. e Souto, C., 2019. “Desenvolvimento de um dispositivo didático na forma de absorvedor dinâmico de vibrações passivo para uma estrutura com 2 GDL”. In *Anais do XXII Congresso Brasileiro de Automática*. Vol. 1.

## 8. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.