

## USO DO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA ESTUDO DAS TENSÕES DE MEMBRANA EM CHAPAS METÁLICAS

Daví Judá de Souza Fraga, [davijuda@hotmail.com](mailto:davijuda@hotmail.com)<sup>1</sup>  
Julio Cezar Pedrosa da Silva, [julio.silva@ifg.edu.br](mailto:julio.silva@ifg.edu.br)<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto Federal de Goiás – IFG, R. 75, 46 - Centro Centro, Goiânia - GO, 74055-110, coordenação de mecânica-Departamento 4.

**Resumo.** Das três possíveis formas de não linearidade este trabalho tem como objetivo geral apresentar um comparativo entre a simulação usando o aplicativo Ansys e o valor analítico de um problema de grandes deslocamentos em chapas metálicas. Será analisada uma chapa metálica 100 x 300 mm, bi apoiada com 1,5 mm de espessura, submetida a uma pressão constante de modo que, o carregamento aplicado na chapa comece nulo e aumente gradualmente com o passar do tempo por 50 segundos, e comparou-se os métodos analíticos e simulados para o método linear, comparando as tensões obtidas e os deslocamentos. A partir disso verifica-se que os valores de tensão simulados e calculados são extremamente próximos entre si tanto no eixo X quanto no Z em suas tensões máximas. Ao analisarmos o deslocamento observa-se que a deflexão ultrapassa 75% da espessura da chapa o que gera tensão de membrana da chapa, isso faz com que a solução linear não possa mais atender ao nosso problema, tendo assim que recorrer a análise não linear. Ao comparar os dois verifica-se uma diferença grande entre os dois métodos porém, segundo a literatura, o método mais claro é passar para o método não linear para prever e determinar o deslocamento da peça, uma vez que o método linear não atende mais ao problema e comparando os dois pode-se verificar uma diferença de até 40% entre as deflexões entre os dois métodos.

**Palavras chave:** 1. Elementos finitos 2. Teoria de placa e cascas 3. Tensão de membrana 4. Simulação Linear 5. Simulação Não Linear

**Abstract.** We have three possible forms of nonlinearity, this work has the general objective of showing a comparison between the simulation using the Ansys software, by finite element method, analytical value and nonlinear simulation using the method of large displacements in sheet metal. It will be a metal plate 100 x 300 mm, bi-supported with 1.5 mm thick, with constant pressure. The load applied to the plate starts at zero and gradually increases over time for 50 seconds. It is verified that the simulated and calculated stress values are close to each other both in the X and Z axis at their maximum stresses. For the displacement, it is observed that the deflection exceeds 75% of the thickness of the plate, which generates membrane stress of the plate, which means that the linear solution cannot longer meet our problem, thus having to go to non-linear analysis. When comparing the two, there is a great difference, however, according to the literature, the most appropriate method is the non-linear method to predict and determine the displacement of the part method, since the linear method no longer meets to the problem and comparing the two it is possible to verify a difference of 40%.

**Keywords:** 1. Finite elements, 2. Plate and shell theory, 3. membrane stress, 4. Linear Simulation, 5. Non-Linear Simulation

### 1. INTRODUÇÃO

A princípio, para a criação de projetos e dimensionamento de estruturas, os engenheiros faziam uso das teorias clássicas de resistência dos materiais. Era muito comum os engenheiros gastarem dias realizando cálculos à mão, utilizando as aproximações que a teoria clássica possui. Entretanto, devido às aproximações que a teoria clássica possui, alguns projetos ficavam dimensionados de forma incorreta, por esse motivo, a etapa de testes era tão importante para os engenheiros. Contudo, com o avanço da tecnologia e as alterações no mercado como um todo, tornou-se inviável essa forma de projetar, pois o gasto envolvido em dimensionar um protótipo e realizar um teste prático se tornou maior. Além disso, a necessidade de se economizar recursos e tempo fizeram que os engenheiros adotassem a simulação como uma ferramenta crucial no desenvolvimento de projetos (ALVES FILHO, 2007)

A simulação tornou possível obter os resultados muito próximos aos resultados da teoria clássica, além de tornar possível a análise de peças com geometrias complexas, que até poderiam ser analisadas pelo método clássico, mas as aproximações que seriam feitas para se adequar a peça a teoria clássica acabariam por distanciar o modelo calculado do modelo real (ALVES FILHO, 2008)

São definidos como folhas as estruturas onde duas dimensões são muito superiores a uma terceira dimensão, sendo esta última a espessura. As folhas podem também ser classificadas de acordo com a espessura, as condições de carregamento e outras características, como a rigidez e a flexão. As folhas podem ser classificadas em: Chapas, placas, cascas e membranas.

Definimos como Chapas toda a estrutura onde todos os pontos estão posicionados no plano médio, tanto na configuração de referência quanto na configuração deformada. Ou seja, para Chapas, todos os pontos se localizam apenas em um único plano geométrico, plano Oxy. Além disso, para Chapas, o carregamento ocorre apenas paralelamente ao plano. Em resumo, as Chapas correspondem aos casos onde a estrutura está em seu estado plano de tensões.

Semelhante as Chapas, as Placas são estruturas em que todos os pontos pertencem ao plano médio, ou seja, todos os planos se encontram em um único plano geométrico Oxy. Entretanto, no caso das Placas, os pontos se encontram no plano médio apenas na configuração de referência. A principal diferença entre Chapas e Placas está no fato de que Placas podem receber carregamentos normais ao seu plano Oxy, tendo portanto a presença da direção z. Desta forma, quando submetida a uma pressão, ou carregamento normal qualquer, a Placa irá sofrer flexão.

As Cascas são estruturas tridimensionais, logo possuem rigidez para suportar carregamentos de flexão e de torção distribuídas ao longo da superfície média, além de esforços nos planos tangentes a superfície média. Como exemplos de Cascas podemos citar estruturas como vasos de pressão, silos, fuselagem de avião, casco de navio dentre outros.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma análise por meios matemáticos que tem por afimco a discretização de um meio contínuo em pequenos elementos, conservando as mesmas características físicas e propriedades do meio de origem. Esses elementos são descritos por equações diferenciais e resolvidos por modelos matemáticos, para que sejam obtidos os resultados desejados. A utilização dos métodos variacionais em geral, e do método dos elementos finitos, podem ser feitos de diversas maneiras de acordo com as incógnitas utilizadas na sua formulação. Quando utilizado no método dos deslocamentos será preciso uma formulação matricial adequada por ser um método considerado mais simples e de fácil aplicação, por mais que teoricamente não dependa da linguagem matricial.

De acordo com o método incremental e iterativo, o método de Newton-Raphson permite calcular soluções para equações não lineares em um processo de interações que envolvem problemas estruturais não lineares. Pode-se notar a ampla utilização do método em diversos softwares de elementos finitos (LOPES, 2008).

A aplicação do método além de difundida perante a comunidade científica para modelos de análise iterativa em problemas não lineares em sistemas estruturais, também representa a aplicação fracionada de um determinado carregamento, denominado incremento de carga, em conjunto com as aplicações de equações de equilíbrio, sendo assim, resolvidas por um processo iterativo (ARAÚJO DA SILVA, 2009).

## 2. METODOLOGIA

Para estudo das tensões de membrana por meio de simulação numérica serão utilizados o software Ansys e a linguagem de programação Python.

O Ansys será utilizado para realizar duas simulações de uma chapa retangular engastada nas extremidades, como mostra a figura 1.

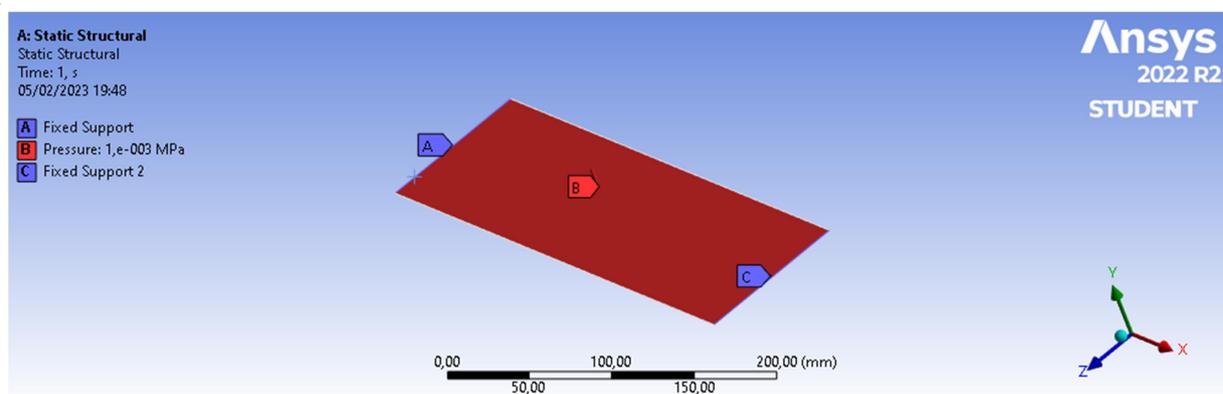


Figura 1 Chapa para simulação numérica. Autoria Própria

A placa possui 300 mm de comprimento, 100 mm de largura e 1,5mm de espessura. O carregamento sobre a placa será uma pressão que varia seguindo a função abaixo:

$$P(t) = t * 0,0005 + 0,0005$$

(1)

Onde:

- $t$  é o tempo, que vai de 0 até 50 segundos.
- $P$  é a pressão, medida em MPa.

Uma vez determinada as condições de contorno, faremos uma simulação linear, onde grandes deflexões na chapa são desconsideradas, e tensões de membrana não são consideradas. O método linear é aconselhado para pequenas deflexões, até aproximadamente 75% da espessura da chapa, mas neste presente trabalho, analisaremos como são os resultados tanto para deformações pequenas e grandes. Faremos isso com o intuito de mostrar que, com o aumento da pressão, os resultados da simulação linear e não linear tendem a divergir, de modo que a solução linear e a analítica não refletem mais a realidade física do problema em análise.

Para a geração dos gráficos será utilizaremos a linguagem de programação Python, através das bibliotecas Numpy e Pandas. Os gráficos serão plotados segundo os pontos máximos do deslocamento e das tensões máximas presentes na chapa.

Além disso, iremos comparar a deflexão sofrida pela chapa na análise linear e na análise não linear, para mostrar a divergência dos resultados. E por fim, mostraremos como que as tensões de membrana, presentes na simulação linear, aumentam a rigidez da estrutura ainda que a mesma se encontre dentro do regime elástico. As simulações e o programa serão feitas no computador ideapad330 da Lenovo.

## 2. DESENVOLVIMENTO

Na simulação a chapa foi engastada nas extremidades e submetida a uma pressão uniforme. A chapa foi fixada nas extremidades menores, de 100 mm. E a pressão é aplicada de forma uniforme em toda a superfície da chapa.

Assim, uma vez definido o carregamento, foi gerada a malha de elementos finitos. Para essa simulação foi empregado o elemento de placa e casca, que é o mais recomendado para elementos cujo o comprimento e a largura sejam muito superiores a espessura. Foram obtidos 4800 elementos e 4961 nós. A figura 2 mostra a chapa discretizada na esquerda e os detalhes da malha a direita, com o comprimento máximo do elemento sendo de 2,5 mm, além de mostrar a quantidade de nós e de elementos.

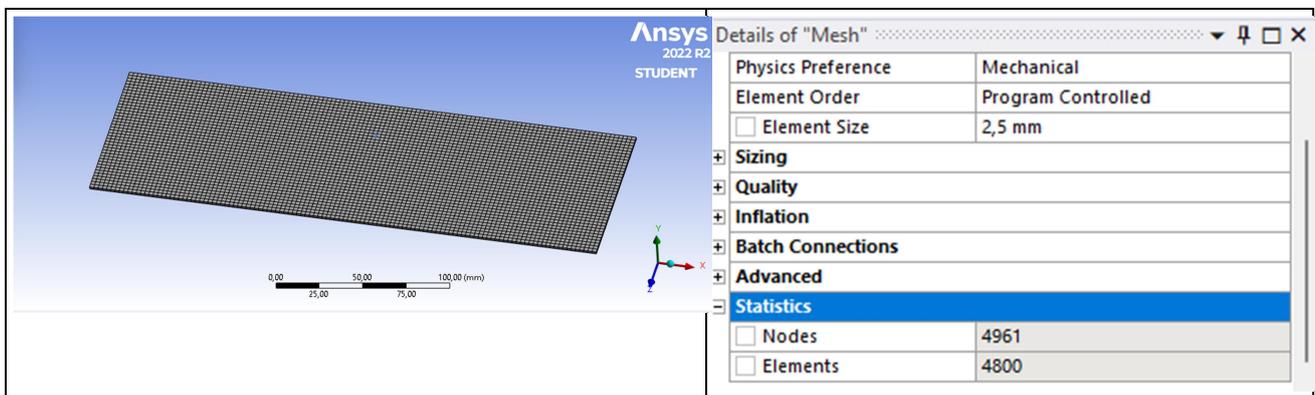


Figura 2 Malha de elementos e Estatísticas da malha.

Definidos os carregamentos e a malha, configuramos a simulação no campo *Analisy settings*. Neste ponto temos a primeira divergência entre a simulação linear e a não linear. Para a simulação linear o módulo *large deflections* permanece desligado.

Uma vez desligando esse módulo, o software considera a simulação como uma análise linear, logo, será calculada a rigidez da estrutura, com base no número de elementos e seus graus de liberdade. A partir da rigidez constante da estrutura, do carregamento, e das propriedades do material, o software determina os deslocamentos nodais, e assim, a configuração deformada da estrutura. Por se tratar de uma análise linear, os resultados das tensões máximas normais tendem a ser próximas as tensões obtidas pelo método analítico. A figura 3 mostra a distribuição da tensão normal no eixo X para a análise linear, o valor positivo é remetente a tração, e o valor negativo para a compressão. O gráfico 1 representa a variação da tensão normal máxima no eixo X com a variação da pressão.

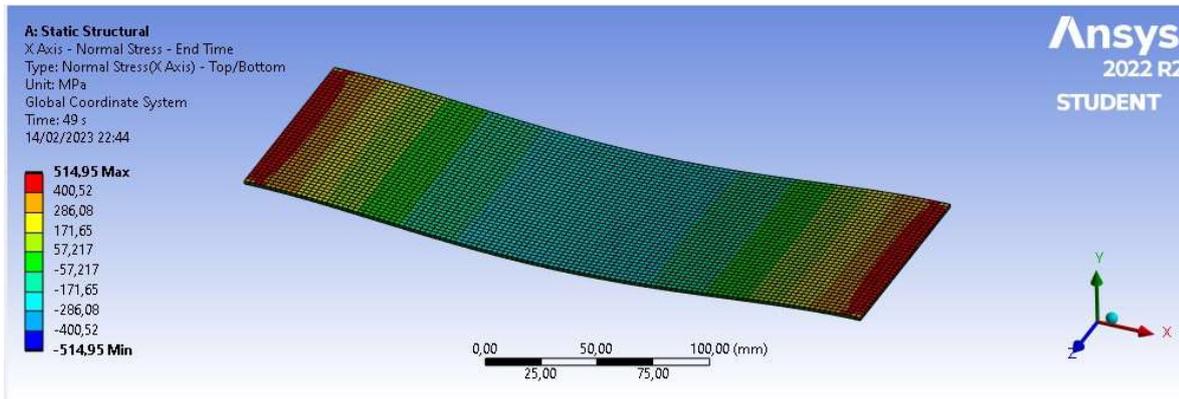
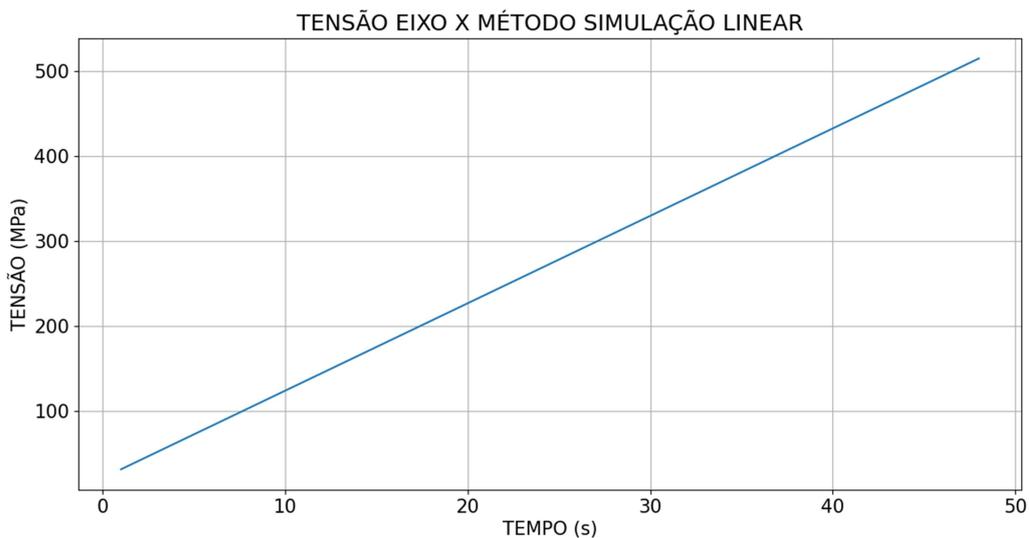


Figura 3 Distribuição de tensão no eixo X na simulação linear. Autoria própria.

Como visto na figura acima, as extremidades da malha são as regiões que sofrem maiores deformações, estando sujeitos a tensões máximas de até 514,95MPa, o que é esperado tendo em vista que a peça está engastada nas extremidades. A peça sofre uma força de tração nas suas extremidades inferiores e compressão na superior, ambas de mesma magnitude (514,95MPa) porém de naturezas diferentes. O Gráfico 1 nos mostra a relação das tensão aplicada nas extremidades em função do tempo.

Gráfico 1 Tensão normal máxima no eixo X em função do tempo.



Como fica claro no gráfico, A tensão normal varia de forma uniforme na simulação linear. A relação  $[F]=[K].[x]$  que rege o método linear é obedecido. Onde  $[F]$  é a matriz que representa o carregamento,  $[K]$  é a matriz de rigidez da estrutura e  $[x]$  são os deslocamentos nodais.

De forma semelhante, a figura 4 mostra o resultado da distribuição da tensão normal máxima no eixo Z , pode-se ver a partir da imagem que as tensões no eixo z seguem o mesmo princípio da lei de Huck mostradas para o eixo X, no entanto a magnitude das forças são diferentes, uma vez que temos uma tensão máxima de 151,6MPa nas regiões de engaste.

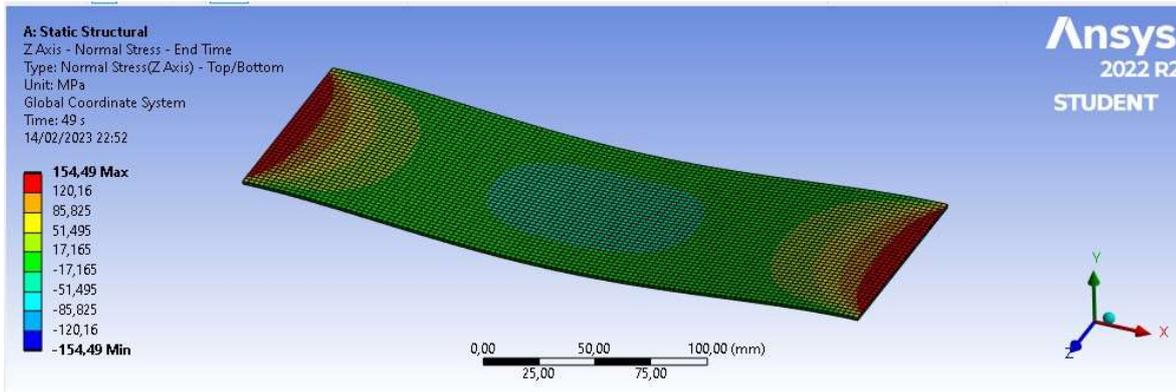
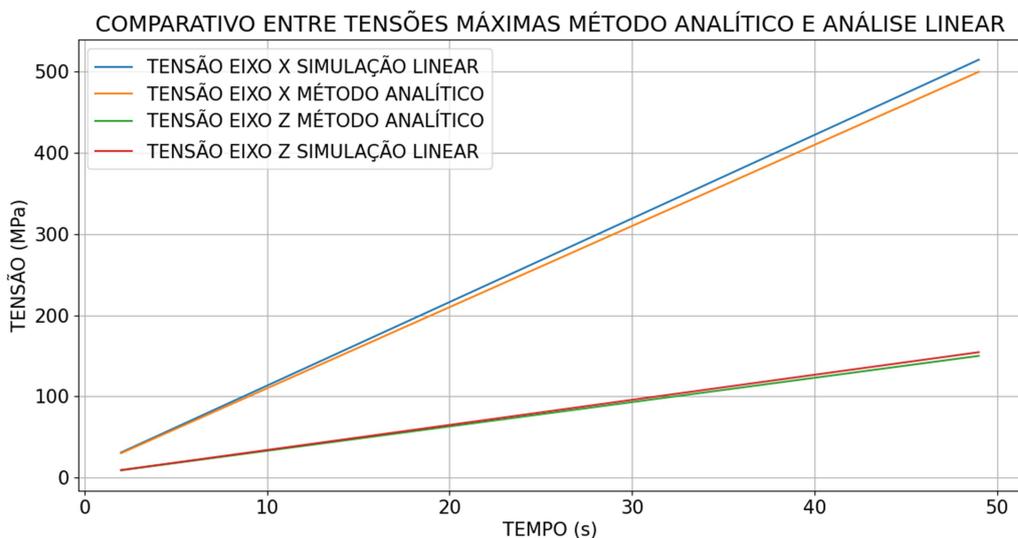


Figura 4 Distribuição de tensão no eixo Z na simulação linear. Autoria própria.

Uma vez realizada a simulação linear, foi gerado um gráfico comparativo entre as tensões normais máximas nos eixos X e Z obtidas pela simulação e as tensões normais máximas obtidas pelo método analítico. O Gráfico 2 representa as tensões normais máximas obtidas pela simulação linear e pelo método analítico.

Gráfico 2 Tensões normais máximas nos eixos X e Z obtidas pela simulação linear e pelo método analítico em função do tempo.



Como pode-se observar, há uma grande similaridade entre os valores simulados e os calculados, sendo o valor máximo de tensão para o eixo X no tempo de 48 segundos usando o método analítico, foi de 500 MPa, e utilizando a simulação linear de 504,61 MPa, dando um erro relativo de 2,98%. Já no eixo Z, a tensão máxima de 150 Mpa para o método analítico e 154,47 Mpa para a simulação linear, com erro de 2,98%, demonstrando a similaridade do resultado dos dois métodos adotados.

Se formos analisar o deslocamento sofrido pelas chapas, usando o método linear, nas mesmas situações propostas anteriores vemos que as peças sofreram uma maior deflexão no centro, o que é coerente uma vez que as chapas estão engastadas em suas extremidades. A figura 5 nos mostra as deflexões sofridas pela chapa em relação ao eixo X. Observa-se que, na figura as regiões mínimas estão no centro isso se deve pela inversão de sinais apenas, uma vez que o deslocamento ocorre no sentido negativo no eixo (tendo em vista que o ansys considera a superfície da chapa como o 0 do eixo), no entanto em valores absolutos tem-se que a chapa defletiu 9,16mm no centro enquanto na sua extremidade não houve deslocamento.

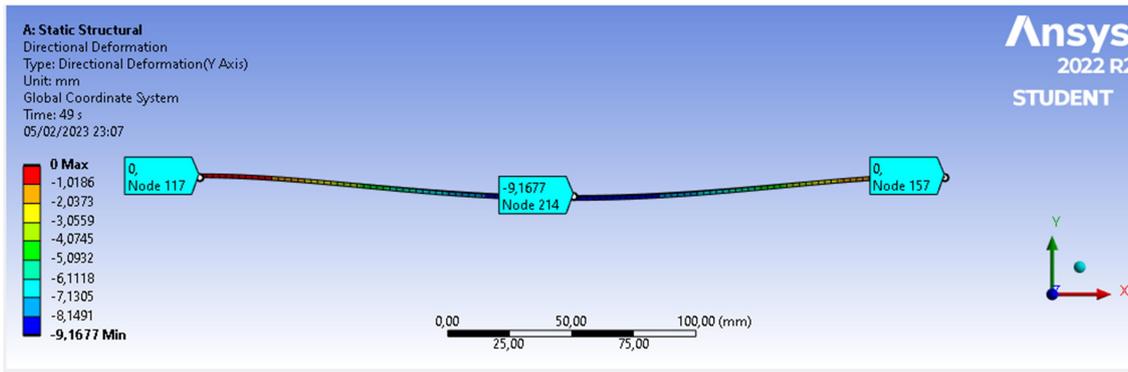


Figura 5 Deflexão total pela análise linear por elementos finitos.

A partir da literatura e da análise da figura acima percebe-se que o método linear não pode satisfazer devidamente a solução para esse problema, uma vez que a deflexão é superior a 75% da espessura da chapa (1,5mm), logo, ela não pode ser devidamente representada a partir do método acima, sendo necessário expressar o deslocamento a partir de outro método. Com isso, a análise não linear é a que melhor representa o caso em estudo, pois, com grandes deflexões ocorre uma alteração na rigidez da chapa. Essa alteração na rigidez se deve aos grandes deslocamentos sofridos durante o carregamento, essa carga ocasiona o surgimento das tensões de membrana. Quando analisado como um fenômeno não linear, percebe-se um aumento na rigidez e uma diminuição do deslocamento e das tensões internas. A Figura 6 mostra os deslocamentos sofridos pela chapa pela análise não linear. Como podemos perceber, a deflexão foi de 2,78 mm, enquanto que na simulação linear, mostrado na Figura 5, a deflexão máxima foi de 9,16 mm.

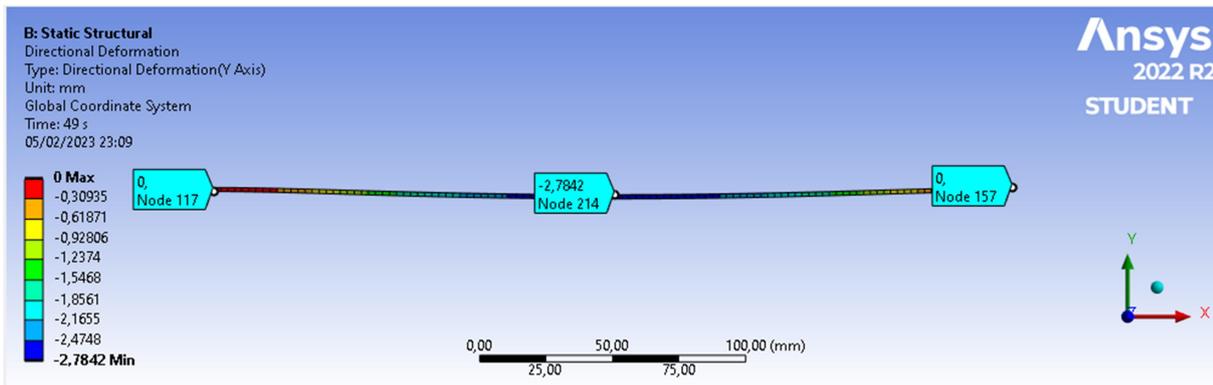
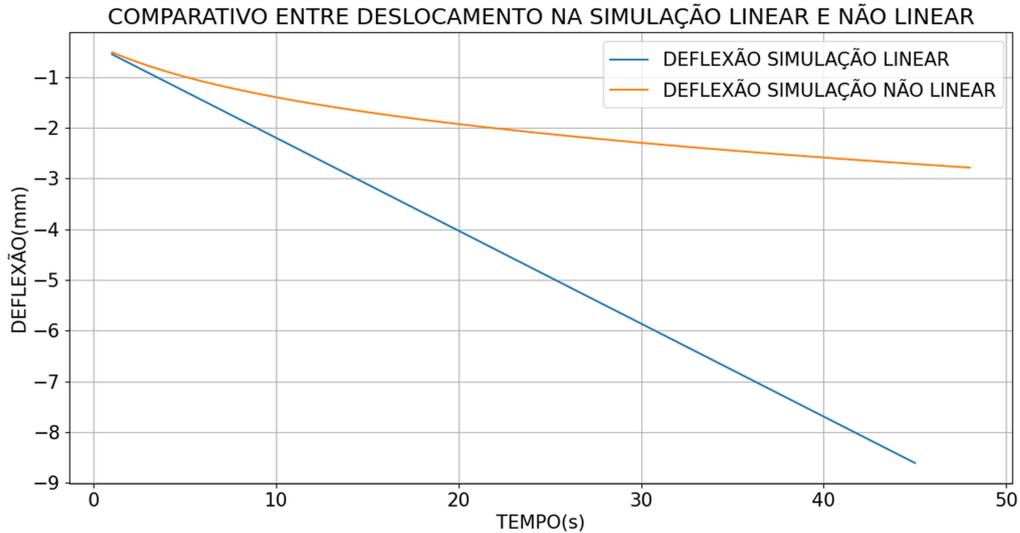


Figura 6 Deflexão total pela análise não linear por elementos finitos.

As tensões de membrana são tensões que ocorrem nos planos tangentes ao plano médio da chapa. Essas tensões diminuem o deslocamento da chapa. O Gráfico 3 mostra o comparativo entre a deflexão obtida pela análise linear e a análise não linear. Como fica claro no gráfico, quando a deflexão é menor que 75% da espessura da chapa, ambas as simulações são convergentes, porém, no ponto de grandes deslocamentos, os resultados se tornam divergentes.

Além disso, ao analisarmos os dados, percebe-se que, para pequenas deflexões, no qual as tensões internas são mais baixas, o erro relativo percentual está abaixo de 1%. Contudo, a medida que o carregamento aumenta, e a chapa sofre grandes deflexões, a simulação linear e a não linear apresentam uma divergência, com o erro relativo passando dos 40%, sendo a deflexão máxima analisando o método linear de 9,16mm e utilizando o método não linear de 2,78mm.

Gráfico 3 Comparativo entre simulação linear e não linear.



Na figura 7 podemos ver como as tensões tangentes ao plano neutro da chapa se comportam. Essas são as tensões de membrana, obtidas por meio da simulação não linear. Definimos esse caso como não linearidade geométrica, pois, a grande deflexão da chapa provoca o aumento da rigidez. A não linearidade devido a plasticidade do material não foi levada em conta pois as tensões chegam próximas a tensão de escoamento do material apenas no tempo de 50 segundos, onde a pressão é máxima. Logo, durante todos os 49 segundos iniciais a chapa permaneceu em seu regime elástico, porém com a rigidez não constante devido ao fenômeno da não linearidade geométrica.

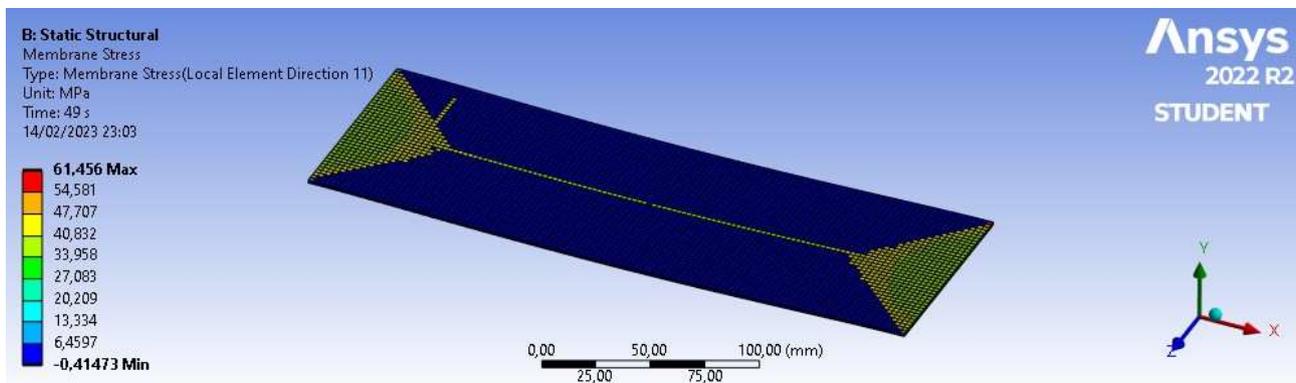


Figura 7 Tensões de membrana. Simulação não linear.

### 3. CONCLUSÕES

Com isso, percebemos que as tensões de membrana são tensões que atuam no plano tangente. Além disso, ao analisarmos as tensões de Von-Mises entre a simulação linear e não linear, podemos perceber que, ao ignorar as grandes deflexões, a tensão de Von-Mises será acima da tensão de escoamento, o que caracteriza início da plasticidade do material. Porém, levando em conta as grandes deflexões, percebemos que a tensão de Von-Mises permanece abaixo da tensão de escoamento, logo, é possível fazer a otimização de projetos estudando as tensões em chapas metálicas. Ao levar em conta as grandes deflexões podemos reduzir a espessura da chapa, proporcionando assim uma estrutura mais leve. Abaixo vemos como a tensão de Von-Mises varia para a simulação linear, em verde, e a simulação não linear em magenta.

### 4. AGRADECIMENTOS

Ao Instituto Federal de Goiás IFG e ao CPNQ pelo auxílio e apoio nessas atividades.

### 5. REFERÊNCIAS

ALVES FILHO, Avelino. **Elementos Finitos: A base da tecnologia CAE**. 6. ed. São Paulo: Érica Ltda., 2007.

ALVES FILHO, Avelino. **Elementos Finitos: A base da tecnologia CAE / Análise Dinâmica**. 2. ed. São Paulo: Érica Ltda., 2008.

ARAÚJO DA SILVA, A. A. **Análise não-linear assintótica modal da instabilidade de estruturas reticuladas**. 215 p. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2009.

LOPES, F. d. R. de C. **Influência do comportamento semi-rígido de placas de base e de ligações viga-coluna na resposta dinâmica de pórticos de aço**. 164 p. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro - RJ, 2008.