XXIX Congresso Nacional de Estudantes de Engenharia Mecânica
12 a 16 de junho de 2023, Goiânia, Goiás, Brasil

O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COM INTERPOLAÇÃO DIRETA EM PROBLEMAS ELÁSTICOS PARA DIFERENTES FUNÇÕES DE BASE RADIAL

Renato Moreira Baiense Filho, renatobaiensefilho@gmail.com[1]
Maycol Angelo Balestreiro Pascoal, maycol.pascoal@edu.ufes.br[1]
Luciano de Oliveira Castro Lara, castrolara@hotmail.com[1]

[1]Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Av. Fernando Ferrari, 540 – Bairro Goiabeiras – 29075 – 910, Vitória, ES, Brasil.

Resumo. *Os métodos numéricos se tornaram indispensáveis para o progresso e desenvolvimento de conhecimento e tecnologia nas áreas da Ciência e Engenharia. Dentre os diversos métodos já desenvolvidos, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) tem se destacado por sua singularidade e aplicabilidade. Para aumentar o seu campo de atuação, novas técnicas têm sido propostas com a finalidade de aperfeiçoar e expandir esse método, como é o caso do MECID (Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta), que utiliza um processo de interpolação com Funções de Base Radial (FBR) para transformar integrais de domínio em integrais de contorno. Com a aplicação do MECID em problemas elásticos, busca-se melhorar a qualidade dos resultados apresentados pelo MECID testando-se a utilização de diferentes Funções de Base Radial para analisar quais são as funções que permitem a obtenção de melhor precisão nos resultados.*

Palavras chave*: Método dos Elementos de Contorno. Interpolação Direta. Funções de Base Radial. Teoria da Elasticidade.*

Abstract. *Numerical methods have become indispensable for the progress and development of knowledge and technology in the areas of Science and Engineering. Among the various methods already developed, the Boundary Element Method (BEM) has stood out for its uniqueness and applicability. To increase its scope, new techniques have been proposed to improve and expand this method, as is the case of DIBEM (Direct Interpolation with Boundary Element Method), which uses an interpolation process with Radial Base Functions (RBF) to transform domain integrals into integral contour integrals. With the application of DIBEM in elastic problems, we seek to improve the quality of the results presented by DIBEM by testing the use of different Radial Base Functions to analyze which are the functions that allow obtaining better precision in the results.*

Keywords: *Boundary Element Method, Direct Interpolation, Radial Base Functions, Elasticity Theory.*

1. INTRODUÇÃO

O conhecimento adequado dos fenômenos físicos tem se mostrado essencial para o desenvolvimento de novas tecnologias. Tal conhecimento permite que vários problemas de engenharia sejam estudados e soluções sejam encontradas. O comportamento e a relação entre as grandezas físicas de um dado fenômeno são modelados por equações diferenciais cujas soluções, quando possíveis, são difíceis de serem determinadas analiticamente devido à sua complexidade. Para lidar com este problema, diversos métodos numéricos têm sido desenvolvidos, permitindo que soluções aproximadas e confiáveis sejam encontradas e aplicadas em diversas áreas da ciência e tecnologia. Dentre eles, destacamos o método dos elementos de contorno (MEC).

O MEC permite a discretização apenas no contorno do problema em vez de todo o domínio, pode ser considerado um método numérico principal, juntamente com o método de elementos finitos (MEF) e o método de diferenças finitas (MDF) mais conhecidos, fornecendo, em conjunto, uma solução computacional eficaz para uma ampla classe de problemas científicos e de engenharia. Como muitas outras técnicas numéricas, o interesse pelo MEC aumentou gradualmente nas últimas décadas. No entanto, para problemas em que existem ações aplicadas no domínio, são necessários procedimentos adicionais àqueles tradicionalmente empregados, nos casos onde as ações estão limitadas ao contorno. A primeira abordagem clássica para esse tipo de problema foi a discretização do domínio em células (Brebbia, 1980), fazendo com que o MEC perdesse sua principal vantagem sobre os métodos de domínio. Em um esforço para evitar a discretização interna, uma grande quantidade de pesquisas foi conduzida para encontrar um método geral e eficiente para transformar integrais de domínio em integrais de contorno equivalentes. Surgindo então outras abordagens, como; o uso da função de Galerkin, método da dupla reciprocidade (MECDR), método da múltipla reciprocidade (MMR) e o método da interpolação direta (MECID).

Nesse cenário, a MECID é uma alternativa, desenvolvida por Loeffler, *et al.* (2015), com alguns aspectos ainda não totalmente compreendidos, mas que já está sendo aplicada na solução de uma variedade de problemas físicos. O emprego dessa formulação para a solução de problemas elásticos com forças de corpo ainda é recente. O MECID é semelhante ao MECDR em muitos aspectos porque aplica um procedimento de aproximação usando funções de base radial; no entanto, é ainda mais simples, mais geral e mais robusto, fazendo uma aproximação direta ao núcleo completo da integral de domínio. O MECID foi testado com sucesso em problemas bidimensionais envolvendo a solução das equações de Poisson e Helmholtz (Loeffler, *et al*., 2015; Loeffler e Mansur, 2017).

Com respeito às FBR escolhidas, tais como, radial simples, Placa Fina e cúbica, estas foram escolhidas por conveniência. Em seu trabalho, Buhmann (2003) destaca as propriedades matemáticas de cada uma delas, como por exemplo os tipos de suporte empregado, podendo variar de pleno a compacto.

O que se propõe nesse trabalho é apresentar a evolução do método dos elementos de contorno para resolver problemas elásticos com forças de corpo. Onde o objetivo é avaliar o Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta em problemas elásticos para diferentes Funções de Base Radial.

O procedimento foi utilizado com sucesso em problemas governados pela Equação de Laplace, Poisson e Helmholtz, mas devido a sua generalidade, é aqui estendido aos problemas de elasticidade.

Este trabalho pode credenciar o MEC para outras aplicações mais elaboradas sem grandes dificuldades de execução, destacando problemas interessantes, tais como casos dependentes do tempo e problemas de plasticidade.

2. METODOLOGIA

2.1. O Método dos Elementos de Contorno

Considerando um meio bidimensional como sendo contínuo, homogêneo, elástico, linear, isotrópico, em condições estáticas, com forças de corpo, a equação diferencial governante associada a este problema é a Equação de Navier. Esta equação usando notação indicial e as constantes de Lamé λ e μ é dada por (Brebbia, *et al*., 1984):

$$\mu u_{j,ii}(X) + (\lambda + \mu) u_{i,ij}(X) + b_j = 0 \tag{1}$$

Na Eq. (1), $u_i(X)$ representa a componente vetorial do campo de deslocamento na direção "*i*", X representa um ponto com coordenadas (x_1, x_2) e b_j as forças de corpo.

Considerando procedimentos matemáticos bem conhecidos do MEC, a seguinte forma integral da Equação de Navier é obtida (Brebbia, *et al*., 1984):

$$c_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_\Gamma p_{ij}^*(\xi,X)u_j(X)d\Gamma - \int_\Gamma u_{ij}^*(\xi,X)p_j(X)d\Gamma = \int_\Omega b_j(X)u_{ij}^*(\xi,X)d\Omega \tag{2}$$

Uma estrutura diádica para a solução fundamental e sua derivada associada, é usada, denotadas respectivamente $u_{ij}*$ e $p_{ij}*$, para representar deslocamentos e forças de superfície gerados na direção j no ponto de campo X, como resultados de uma carga unitária atuando na direção i aplicada no ponto fonte ξ. c_{ij} é o coeficiente diádico introduzido em função da posição do ponto fonte (se está dentro do domínio, fora dele ou exatamente na fronteira).

Assim, e em problemas bidimensionais são dadas por (Brebbia, *et al*., 1984):

$$u_{ij}^* = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)}\left[(3-4\nu)\ln\left(\frac{1}{r}\right)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j}\right] \tag{3}$$

$$p_{ij}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r}\left[\frac{\partial r}{\partial n}((1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}) - (1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i)\right] \tag{4}$$

As Eqs. (3) e (4) são denominadas soluções de Kelvin e correspondem respectivamente às soluções fundamentais dos deslocamentos e das forças de superfície (Brebbia e Walker, 1980; Brebbia *et al.,* 1984). A grandeza $r = r(\xi,X)$ é a distância euclidiana entre os pontos fonte e campo; e $n(X)$ é a normal externa ao contorno $\Gamma(X)$.

A Eq. (2) é a equação MEC para problemas elásticos com forças de corpo. No entanto, nota-se que esta equação ainda apresenta uma integral de domínio derivada da força do corpo. É nesta última integral que as diferentes abordagens MEC apresentadas na seção anterior são aplicadas. Uma forma de fazer isso é aplicar o conceito de interpolação, que consiste em aproximar uma dada função por uma combinação linear de funções auxiliares, ponderadas pelos coeficientes dessa combinação linear. A partir disso, aplica-se a integração por partes e/ou teorema da divergência, transformando a integral de domínio em uma integral de contorno.

A técnica de interpolação foi inicialmente aplicada em problemas elásticos estáticos no método da dupla reciprocidade (MECDR), no qual apenas a força de corpo da integral de domínio é interpolada (Ribeiro, 1991).

$$b_j(X) = \sum_{k=1}^{NT} \alpha_j^k \, F^k(X^k, X) \tag{5}$$

Onde α_j^ksão os coeficientes a serem determinados para cada direção j e $F^k(X^k, X)$são as funções auxiliares de interpolação que pertencem a classe das funções de base radial (FBR). Essas funções possuem seu argumento definido pela distância euclidiana entre o ponto base X^ke o ponto do domínio *X* (Buhmann, 2003; Schaback, 2007). Na Eq. (5), *NT* corresponde ao total de pontos base utilizados na interpolação.

A proposta deste projeto para se trabalhar a integral de domínio é o MECID, que também é uma técnica de interpolação, na qual todo o núcleo da integral de domínio é interpolado diretamente utilizando funções de base radial (Loeffler, *et al*., 2015; Loeffler, *et al*., 2017). Aplicando esse método para o problema elástico, o núcleo da integral de domínio da Eq. (2) será dado por:

$$u_{ij}^*(\xi, X) b_j(X) = \sum_{k=1}^{NT} {}^{\xi}\alpha_i^k \, F^k(X^k, X) \tag{6}$$

Inserindo o delta de Kronecker na equação acima e omitindo, apenas por simplicidade, mesmo não sendo uma notação indicial, o somatório em relação à k, tem-se a seguinte expressão:

$$u_{ij}^*(\xi, X) b_j(X) = {}^{\xi}\alpha_p^k \delta_{pi} F^k(X^k, X) \tag{7}$$

Logo, a integral de domínio da Eq. (2) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\int_\Omega u_{ij}^*(\xi, X) b_j(X) \, d\Omega = \int_\Omega {}^{\xi}\alpha_p^k \delta_{pi} F^k(X^k, X) \, d\Omega \tag{8}$$

Para as simulações realizadas neste trabalho foram utilizadas as FBR simples, cúbica e placa fina (Buhmann, 2003).

No MECID, assim como no MECDR, a integral de domínio é transformada em uma integral de contorno por meio de uma primitivaΨ^k da função de interpolação. A partir da Eq. (8), o desenvolvimento do MECID é apresentado abaixo:

$$\int_\Omega {}^{\xi}\alpha_p^k \delta_{pi} F^k(X^k, X) \, d\Omega = {}^{\xi}\alpha_p^k \int_\Omega \delta_{pi} \Psi_{,mm}^k(X^k, X) \, d\Omega \tag{9}$$

Aplicando o teorema da divergência, chega-se a integral de contorno:

$${}^{\xi}\alpha_p^k \int_\Omega \delta_{pi} \Psi_{,mm}^k(X^k, X) \, d\Omega = {}^{\xi}\alpha_p^k \int_\Gamma \delta_{pi} \Psi_{,m}^k(X^k, X) n_m d\Gamma = {}^{\xi}\alpha_p^k \int_\Gamma \eta_{pi}^k(X^k, X) d\Gamma \tag{10}$$

Na Eq. (10), η_{pi}^krepresenta a derivada direcional da função primitiva Ψ^k, onde $n_m$são as componentes do vetor normal ao contorno.

Importante salientar que a Eq. (10) é aplicada a cada ponto fonte ξ, cuja interpolação é realizada pela varredura de todos os pontos base X^kem relação aos pontos do domínio *X*, ponderados pelos coeficientes ${}^{\xi}\alpha_p^k$em cada direção *p*.

Após todas essas etapas, pode-se reescrever a Eq. (2) como uma equação integral de contorno, conforme a Eq. (11):

$$c_{ij}(\xi) u_j(\xi) + \int_\Gamma p_{ij}^*(\xi, X) u_j(X) d\Gamma = \int_\Gamma u_{ij}^*(\xi, X) p_j(X) d\Gamma + {}^{\xi}\alpha_p^k \int_\Gamma \eta_{pi}^k(X^k, X) d\Gamma \tag{11}$$

A função primitiva Ψ^k das FBR e as expressões de η_{pi}^k são mostradas na seção seguinte.

2.2. Funções de Base Radial

O desenvolvimento de novas técnicas de contorno vem evoluindo significantemente por meio da utilização de Funções de Base Radial. Estas funções têm apresentado a sua utilidade na busca por soluções numéricas oriundas de problemas de engenharia. Segundo Bertolani (2010), em análise numérica, interpolação é um método de avaliação de novos valores de função, dentro de um intervalo que contenha um conjunto de pontos discretos.

De fato, os desenvolvimentos matemáticos do MEC apresentados neste trabalho, consistem em aproximar núcleos de integrais de domínio por meio de funções de base radial conhecidas e de seus coeficientes α, isto será feito por meio da etapa de discretização do domínio analisado, definindo todos os pontos a serem avaliados.

Matematicamente, a aproximação de núcleos de integrais de domínio é feita como apresentado na Eq. (12) (Partridge, *et al*., 1992).

$$\int_{\Omega(X)} f(X)d\Omega(X) = \int_{\Omega(X)} \alpha^j F^j(X^j;X)d\Omega(X)\,;\; j = 1,2,\ldots n \tag{12}$$

Onde *f(X)* representa a função escalar que deverá ser aproximada, α^j os coeficientes de influência a determinar e F^j $(X^j;X)$ a função de base radial a ser escolhida, contendo em seu argumento o ponto campo *X* em conjunto com o ponto base X^j.

Do ponto de vista das FBR, estas funções são consideradas como métodos de aproximação de funções multivariáveis (Buhmann, 2003).

Na Tab 1 são apresentas as funcões de base radial e suas primitivas utilizadas neste trabalho. O desenvolvimento das primitivas é apresentado por Baiense Filho (2022).

Vale ressaltar que, em todas as FBR da Tab. 1, os termos $r_m n_m$ representam um produto escalar entre o vetor radial r e o vetor normal ao contorno n, ou seja:

$$r_m n_m = r_1 n_1 + r_2 n_2 \tag{13}$$

Tabela 1. Funções de base radial e suas primitivas.

Função	$F = \Psi_{,mm}$	Ψ	$\Psi_{,m} n_m$
Radial simples	r	$\frac{r^3}{9}$	$\left(\frac{r}{3}\right) r_m n_m$
Radial cúbica	r^3	$\frac{r^5}{25}$	$\left(\frac{r^3}{5}\right) r_m n_m$
Placa fina	$r^2 \ln r$	$\frac{r^4}{32}(2\ln r - 1)$	$\frac{r^2}{16}(4\ln r - 1) r_m n_m$

3. TESTE NUMÉRICO

A formulação matemática do MECID para problemas elásticos bidimensionais é desenvolvida e implementada numericamente em código FORTRAN. Por se tratar de um estudo inicial para esse tipo de problema, o teste numérico realizado utiliza um caso que possui solução analítica previamente apresentada na literatura. A simulação utilizada foi uma barra horizontal esbelta submetida à força centrífuga.

A simulação com a barra esbelta horizontal submetida à uma força centrífuga representa o caso onde a rotação do corpo ocorre em uma única direção, no mesmo plano do problema (Brebbia, *et al*., 1984). A Fig. 1 representa essa situação:

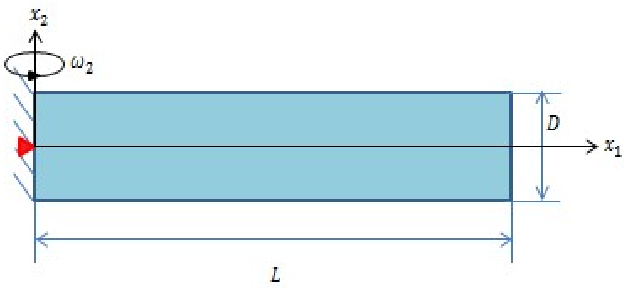

Figura 1. Barra esbelta horizontal com força centrífuga.

A situação acima possui a seguinte solução analítica (El-zafrany, *et al*., 1986):

$$u_1 = \frac{\rho {\omega_2}^2}{2E} x_1 \left(L^2 - \frac{{x_1}^2}{3}\right) \tag{14}$$

As dimensões do problema são, L=2,5 e D=0,5 unidades de comprimento. Foram considerados apenas os deslocamentos na direção horizontal adotando-se coeficiente de Poisson igual a zero (ν=0). As malhas utilizadas nas simulações são formadas por 24, 48, 120 e 240 elementos lineares no contorno. As respostas dos deslocamentos horizontais são dos valores obtidos no comprimento inferior da Fig. 1, quando x_2 = -0,25.

Foram utilizados elementos lineares e vinte pontos de Gauss para a integração numérica.

Por simplicidade, no problema, foi considerada a velocidade angular igual à uma unidade:

Foram adotados módulo de elasticidade e massa específica iguais à uma unidade:

A partir dos valores numéricos encontrados e dos erros calculados, os resultados foram apresentados na forma de tabela.

O principal objetivo desse exemplo para o MECID é avaliar o comportamento de cada FBR. As quantidades de pontos base internos utilizadas foram de 57 pontos, cuja distribuição é mostrada na Fig. 2.

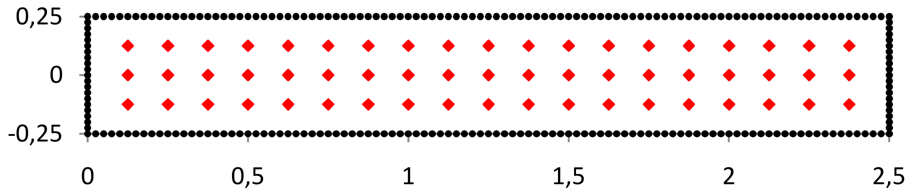

Figura 2. Distribuição dos pontos internos para a barra esbelta horizontal.

A Tab. 2 mostra os erros médios relativos (EMR) obtidos, usando FBR radial simples, para 24, 48, 120 e 240 elementos respectivamente. O mesmo procedimento é feito com a FBR placa fina e com a FBR cúbica.

Tabela 2. EMR dos deslocamentos horizontais com FBR diferentes.

FBR	24 elementos de contorno	48 elementos de contorno	120 elementos de contorno	240 elementos de contorno
Radial simples	4,100	1,694	0,371	0,093
Placa fina	4,127	1,697	0,392	0,083
Radial cúbica	4,105	2,305	1,742	55,576

Os resultados indicam que a FBR cúbica apresentou um comportamento distinto em relação às outras duas FBR. Para as duas primeiras malhas, os resultados possuem valores similares, contudo, a partir de 120 elementos de contorno, é observado que a resposta numérica começa a divergir da solução analítica, mostrando que não ocorre convergência para essa FBR.

4. CONCLUSÕES

O presente trabalho analisou a técnica do MEC para problemas de elasticidade: a recente técnica do MECID. A técnica de interpolação direta apresentou resultados satisfatórios, resolvendo um problema elástico com força de corpo, mostrando rápida convergência nos casos onde as funções de base radial simples e de placa fina foram utilizadas, apresentando poucas instabilidades nos testes realizados, além de apresentarem resultados semelhantes.

No entanto, a função de base radial cúbica apresentou instabilidades, principalmente para as malhas com maior quantidade de elementos de contorno. Pretende-se testar outras funções de base radial, tais como as funções de base radial com suporte compacto, pois existem alguns aspectos que não são totalmente compreendidos e que precisam de estudos mais detalhados para um melhor entendimento da técnica quando aplicada em elasticidade.

5. AGRADECIMENTOS

Esta pesquisa foi apoiada pela Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Espírito Santo - FAPES (Brasil) e pela Universidade Federal do Espírito Santo (UFES).

6. REFERÊNCIAS

Baiense Filho, R.M., 2022. *Método dos Elementos de Contorno com Interpolação Direta Regularizado aplicado a problemas de Elasticidade Linear com força de corpo*. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Espírito Santo.

Bertolani, M.N., 2010. *Funções de base radial de suporte global e compacto na aproximação de superfícies*. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Espírito Santo, Espírito Santo.

Brebbia, C. A. e Walker, S., 1980. *Boundary Element Techniques in Engineering*. Londres: Newnes-Butterworths.

Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. e Wrobel, L. C., 1984. *Boundary Element Techniques*. Berlim: Springer- Verlag.

Buhmann, M.D., 2003. Radial Basis Function: *Theory and Implementations*. Cambridge University Press, Giessen.

El-zafrany, A., Cookson, R. A. e Iqbal, M., 1986. "Boundary element stress analysis with domain type loading: advances in the use of the boundary element method for stress analysis". *Mechanical Engineering Publications*. London, p. 15-34.

Loeffler, C. F., Cruz, A. L. e Bulcão, A., 2015. "Direct use of radial basis interpolation functions for modelin source terms with the boundary element method". *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 50, p. 97-108.

Loeffler, C. F., Zamprogno, L., Mansur, W. J.e Bulcão., 2017. "A.Performace of Compact Radial Basis Functions in the Direct Interpolation Boundary Element Method for Solving Potencial Problems". *Computer Modeling In Engineering And Sciences*, v. 113, n. 3,p. 367-387.

Loeffler, C.F. e Mansur, W.J., 2017. "A Regularization scheme applied to the direct interpolation boundary element technique with radial basis functions for solving eigenvalue problem". *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 74, p. 14-18.

Partridge, P.W, Brebbia, C.A. e Wrobel, L.C., 1992. *The dual reciprocity boundary element method*. London: Computational Mechanics Publications and Elsevier.

Ribeiro, M. Q. H. Leite., 1991. *Análise de Estruturas com carregamento térmico utilizando o método dos elementos de contorno*. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Mecânica, Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro.

Schaback, R.A., 2007. “Practical to Radial Basis Functions”. 20 jun. 2022 <https://num.math.uni-goettingen.de/schaback/teaching/sc.pdf>.

7. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.