

RESPOSTA DINÂMICA DE UM MODELO DE VIGA COM MÚLTIPLAS TRINCAS

Cássio Bruno Florêncio Gomes, cassio.bruno@discente.ufma.br¹

Vilson Souza Pereira, vilson.sp@ufma.br¹

Dalmo Inácio Galdez Costa, dalmo.costa@ufma.br¹

Edilson Dantas Nóbrega, edilson.dantas@ufma.br¹

¹Universidade Federal do Maranhão, Av. dos Portugueses, 1966, Bacanga - CEP 65080-805, São Luís - MA

Resumo: O monitoramento da integridade estrutural tem sido um tópico de pesquisa há décadas. Neste contexto, o comportamento dinâmico de estruturas que possuem descontinuidades geométricas do tipo trinca, é assunto de grande relevância na engenharia moderna. Além disso, nos últimos anos houve um crescimento de pesquisas dedicadas a analisar o comportamento vibracional de estruturas danificadas. Os resultados desses estudos podem ser usados para desenvolver modelos matemáticos mais eficientes e capazes de melhorar o processo de monitoramento e detecção de trincas com base em vibrações estruturais. A análise de vibração de estruturas danificadas pode ser usada como um indicador adequado para o diagnóstico de defeitos. Quando trincas abertas aparecem em uma estrutura unidimensional, uma das abordagens adotadas, é considerar que seu comportamento pode ser modelado através de uma flexibilidade local nas proximidades da trinca. Neste artigo, é investigada uma abordagem simplificada para modelagem de múltiplas trincas em vigas submetidas a vibração transversal. Este modelo é implementado através de uma função local, aplicada diretamente à rigidez da viga, que possui na sua formulação parâmetros calculados experimentalmente. Para essa função, a resposta característica é um decaimento exponencial. Esse efeito provoca uma redução da rigidez local e das proximidades da trinca. O modelo proposto de viga com múltiplas trincas é apresentado e os resultados são investigados usando Método do Elemento Espectral.

Palavras-chave: Viga, Múltiplas Trincas, Elemento Espectral, Propagação de Ondas

1. INTRODUÇÃO

As estruturas em um conceito geral desempenham a função de suporte nas mais diversas aplicações, entre elas podem ser destacadas aquelas que suportam predominantemente cargas estáticas, como silos, torres de transmissão, edifícios entre outros. Estruturas mecânicas, dão suporte a peças e elementos de máquinas que por sua constituição, impõem carregamentos variáveis no tempo. Nesse contexto um entendimento do comportamento dinâmico dessas estruturas é necessário, ou seja, uma análise de seus modos e frequências de vibração. Vários são os fatores que influenciam nesta análise, entre eles o comportamento do material, sua geometria, vínculos de suporte e também se há falhas ou defeitos. A presença de trincas altera o comportamento dinâmico de elementos estruturais e, uma vez que seus efeitos tenham sido compreendidos, tal fenômeno pode ser utilizado para identificar e quantificar não só a presença de trincas, como também sua localização e dimensões (Filho *et al.*, 2018).

Descontinuidades geométricas agudas podem aparecer em estruturas por conta de vários fatores, por conta de carregamentos repetidos, falha em processos de fabricação e defeitos do material (Krawczuk, 2002). Contudo, nem sempre é possível garantir que estes não estejam presentes, apenas avaliar se irão ou não progredir para um desfecho catastrófico. Diferentes técnicas não destrutivas são utilizadas atualmente para identificar a presença de defeitos, das quais se destacam as análises por meio de ultrassom, líquido penetrante, radiografia, emissão acústica, partículas magnéticas entre outros.

Neste trabalho uma análise estrutural dinâmica de vigas de Bernoulli-Euler será apresentada com o emprego do Método dos Elementos Espectrais. Dessa forma, o efeito da presença de múltiplas trincas será descrito matematicamente por uma função do tipo exponencial como apresentado por Kharazan *et al.* (2021).

O presente trabalho está dividido da seguinte forma: a seção 2 aborda a consequência da presença da trinca na rigidez de um elemento de viga, em seguida, a seção 3 dispõe a formulação do Método do Elemento Espectral para um modelo de viga uniforme de Bernoulli-Euler. Na seção 4 são mostrados os resultados das simulações numéricas do modelo, baseadas nas formulações indicadas nas sessões anteriores. Por fim, a seção 5 conclui o trabalho e direciona os trabalhos futuros.

2. EFEITO DA TRINCA NA RIGIDEZ DA VIGA

Inicialmente é assumido que o as trincas possuem abertura com comprimento a constante ao longo da viga. Outra consideração está relacionada ao efeito combinado da inclusão de múltiplas trincas, o que leva a um comportamento complexo, assim o modelo apresentado aproxima a rigidez da viga por meio de uma mudança local na flexibilidade ($EI(x)$), ou seja, ao redor de cada uma das trincas (Kharazan *et al.*, 2021). A Figura 1 apresenta um modelo de viga de comprimento L , na qual estão presentes trincas de tamanho a_{c_i} , nas posições x_{c_i} . A seção transversal deste elemento tem largura w e altura b .

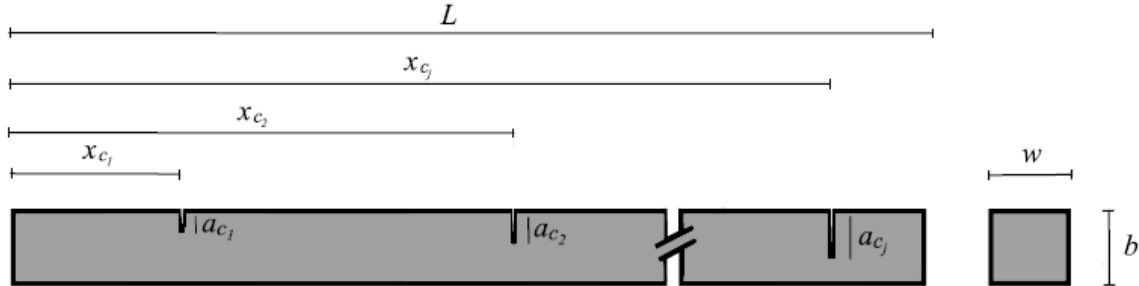


Figura 1: Elemento de viga com múltiplas trincas (Christides e Barr, 1984).

Christides e Barr (1984), apresentaram uma formulação que considerou o efeito de uma trinca em uma viga contínua com seção transversal retangular através de uma função exponencial, dada pela Eq. (1).

$$EI(x) = \frac{EI_0}{1 + C_I \exp(-2\alpha_c |x - x_j|/b)}. \quad (1)$$

O termo α_c é um coeficiente constante que considera o comprimento efetivo no qual a rigidez da viga é alterado pela presença da trinca. De acordo com Christides e Barr (1984), para esta constante é possível usar o valor 0,667. O parâmetro C_I relaciona os segundos momentos de área da seção transversal da viga saudável e no local onde a trinca se localiza, sendo obtido pela Eq. (2).

$$C_I = \frac{I_0 - I_{c_j}}{I_{c_j}}, \quad (2)$$

onde I_0 é o segundo momento de área da seção transversal saudável dado pela Eq. (3).

$$I_0 = \frac{wb^3}{12}, \quad (3)$$

Através da Eq. (4), por sua vez, obtém-se I_{c_j} que também corresponde ao segundo momento de área, porém considerando agora a seção transversal na qual se localiza a trinca:

$$I_{c_j} = \frac{w(b - a_{c_j})^3}{12}. \quad (4)$$

3. MODELO DE ELEMENTO ESPECTRAL DE VIGA UNIFORME DE BERNOULLI-EULER

A equação governante para análise dinâmica de vigas de Bernoulli-Euler no domínio da frequência é dada pela Eq. (5).

$$EI \frac{d^4}{dx^4} W(x) - \omega^2 \rho A W(x) = 0. \quad (5)$$

para a Eq. (5), pode se assumir uma solução geral da forma da Eq. (6):

$$W(x, \omega) = Ce^{-ik(\omega)x}, \quad (6)$$

onde k é o número de onda para flexão pura definido pela Eq. (7).

$$k = \left(\frac{\omega^2 \rho A}{EI} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (7)$$

Para uma viga de Bernoulli-Euler finita com comprimento L , a solução geral pode ser obtida na forma da Eq. (8).

$$W(x, \omega) = C_1 e^{-ikx} + C_2 e^{-kx} + C_3 e^{ikx} + C_4 e^{kx} \quad (8)$$

onde C_1, C_2, C_3 e C_4 são constantes que podem ser obtidas ao impor as condições de contorno do problema. A Eq. (8) pode ainda ser escrita na forma matricial como,

$$W(x, \omega) = \mathbf{Exp}(x, \omega) \mathbf{C} \quad (9)$$

onde $\mathbf{C}$ corresponde à matriz dos coeficientes e $\mathbf{Exp}(x, \omega)$ aos coeficientes exponenciais. Dessa forma, tem-se que:

$$\mathbf{Exp}(x, \omega) = \begin{bmatrix} e^{-ikx} & e^{-kx} & e^{ikx} & e^{kx} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}.$$

Os deslocamentos e inclinações nodais espectrais ($\mathbf{d}$) de um elemento de viga estão relacionados ao campo de deslocamentos por Lee (2009), através da Eq. (10).

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} W_1 \\ \Theta_1 \\ W_2 \\ \Theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W(0) \\ \frac{d}{dx}W(0) \\ W(L) \\ \frac{d}{dx}W(L) \end{bmatrix} = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{C}, \quad (10)$$

onde,

$$\mathbf{H}(\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{Exp}(0) \\ \frac{d}{dx}\mathbf{Exp}(0) \\ \mathbf{Exp}(L) \\ \frac{d}{dx}\mathbf{Exp}(L) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

O campo de deslocamentos no domínio do elemento de viga pode ser representado em termos dos deslocamentos nodais, eliminando o vetor de constantes $\mathbf{C}$ por meio da Eq. (12),

$$W = \mathbf{N}(x, \omega) \mathbf{d}, \quad (12)$$

na qual $\mathbf{N}$ são as funções de forma dinâmicas, obtidas por meio da Eq. (13):

$$\mathbf{N} = \mathbf{Exp}/\mathbf{H}. \quad (13)$$

Os valores nodais espectrais das forças cortantes e momentos fletores definidos para o elemento de viga podem ser descritos a partir das relações da teoria de resistência dos materiais na forma da Eq. (14):

$$\mathbf{f}_c = \begin{bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -EI \frac{d^3}{dx^3} W(0) \\ -EI \frac{d^2}{dx^2} W(0) \\ EI \frac{d^3}{dx^3} W(L) \\ EI \frac{d^2}{dx^2} W(L) \end{bmatrix} = \mathbf{G}(\omega) \mathbf{C}, \quad (14)$$

onde,

$$\mathbf{G}(\omega) = \begin{bmatrix} -EI \frac{d^3}{dx^3} \mathbf{Exp}(0) \\ -EI \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{Exp}(0) \\ EI \frac{d^3}{dx^3} \mathbf{Exp}(L) \\ EI \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{Exp}(L) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Assim, pode-se derivar as equações do elemento espectral a partir do seguinte procedimento descrito pela Eq. (16), de modo a obter a matriz espectral ($\mathbf{S}$) da viga de Bernoulli-Euler:

$$\mathbf{S}(\omega) \mathbf{d} = \mathbf{f}_c \rightarrow \mathbf{S}(\omega) \mathbf{H} \mathbf{C} = \mathbf{G} \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{S}(\omega) = \mathbf{G} \mathbf{H}^{-1}. \quad (16)$$

Como uma primeira abordagem, a inclusão dos efeitos da redução de rigidez a flexão local da viga devido a presença da trinca será feita através da substituição do termo EI , constante, pelo $EI(x)$ função da posição, x , conforme Eq. (1). Neste caso, o número de onda k será modificado para incluir este efeito, sendo agora dado por:

$$k_c = \left(\frac{\omega^2 \rho A}{EI(x)} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (17)$$

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção serão apresentados os resultados obtidos utilizando a formulação descrita ao longo deste trabalho. O método do elemento espectral será utilizado para determinar a função de resposta em frequência para um problema simples de viga uniforme, sujeita a presença de trincas. Para os problemas a seguir uma viga com as propriedades e características dadas na Tab. 1 foram utilizadas. A posição da trinca, x_c e seu comprimento, a_c podem variar sendo indicado o valor em cada caso.

Tabela 1: **Propriedades da viga analisada.**

Propriedade	Valor
Comprimento, L	0,3 m
Posição da trinca, x_c	0,15 m
Largura da seção transversal, w	0,01 m
Altura da seção transversal, b	0,01 m
Densidade, ρ	7850 kg/m ³
Módulo de Elasticidade, E	210 GPa
Parâmetro constante, α_c	0,667

4.1 Redução de rigidez na viga devido a trinca

Antes da análise dinâmica, é interessante observar o efeito da trinca na redução localizada da rigidez. O comprimento da trinca foi tomado como sendo igual a 1%, 5% e 10% do valor da altura de sua seção transversal. A Figura 2, apresenta o comportamento da função descrita pela Eq. (1) na sua forma normalizada ($f(x) = EI(x)/EI_0$) para os três casos.

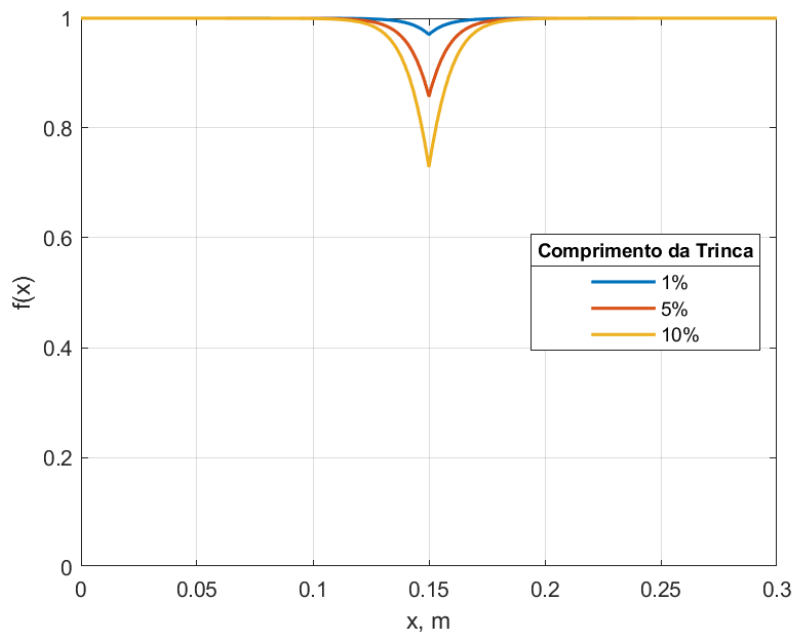


Figura 2: **Efeito da redução de rigidez a flexão nas proximidades da trinca.**

Para o caso de múltiplas trincas, é considerada agora a mesma função normalizada definida no parágrafo anterior. O comprimento de cada trinca é fixado em 5% da altura da seção transversal, b .

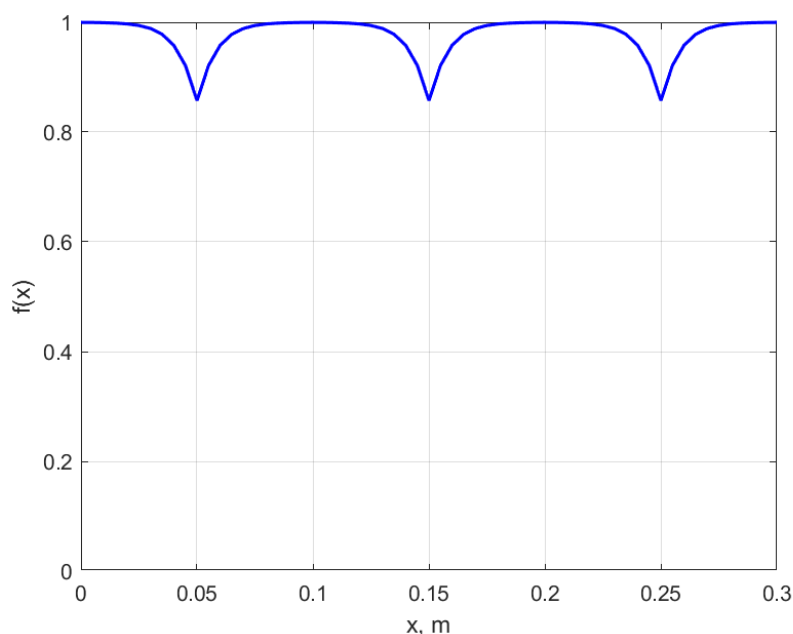


Figura 3: Efeito da redução de rigidez a flexão para um caso de múltiplas trincas.

4.2 Viga com uma trinca sujeita a uma carga constante

Para este exemplo, serão utilizadas as mesmas dimensões e propriedades apresentadas na Tab. 1. As condições de contorno para o elemento de viga analisado são o engastamento em uma de suas extremidades e uma força cortante constante e unitária, P na extremidade livre. A posição da trinca é $L_c = 0,15$ m e seu comprimento é $a_c = 0,01b$ da altura, b da seção transversal. Os resultados para esta configuração são mostrados na Fig. 4. A varredura foi feita na faixa entre 0 e 2 kHz e o deslocamento é aquele da extremidade livre.

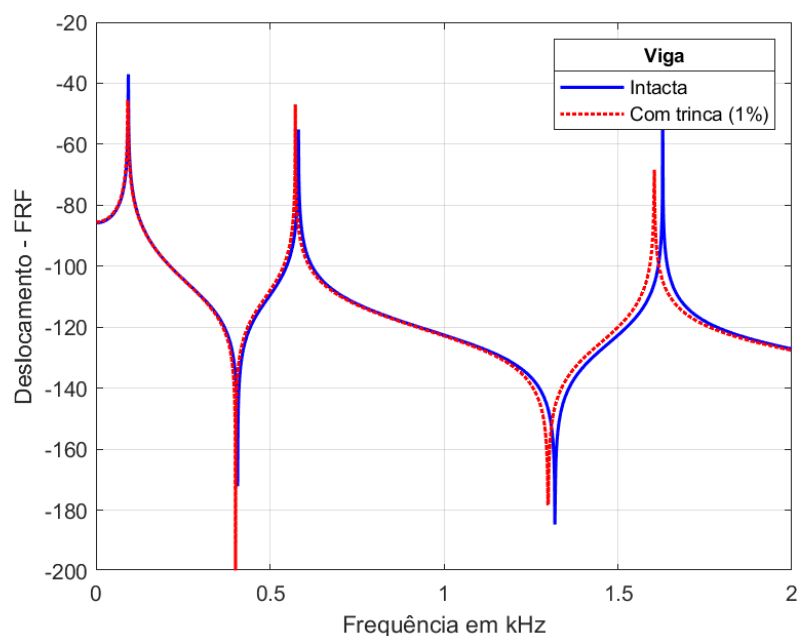


Figura 4: Função de resposta em frequência para uma viga com comprimento de trinca $a_c = 0,01b$.

Na Figura 4 é possível notar a alteração do comportamento dinâmico da viga analisada, o que se acentua com o aumento da frequência observada. Um outro exemplo apresentado na Fig. 5 mostra a alteração de comportamento de forma ainda mais clara, com o aumento no comprimento da trinca, $a_c = 0,05b$.

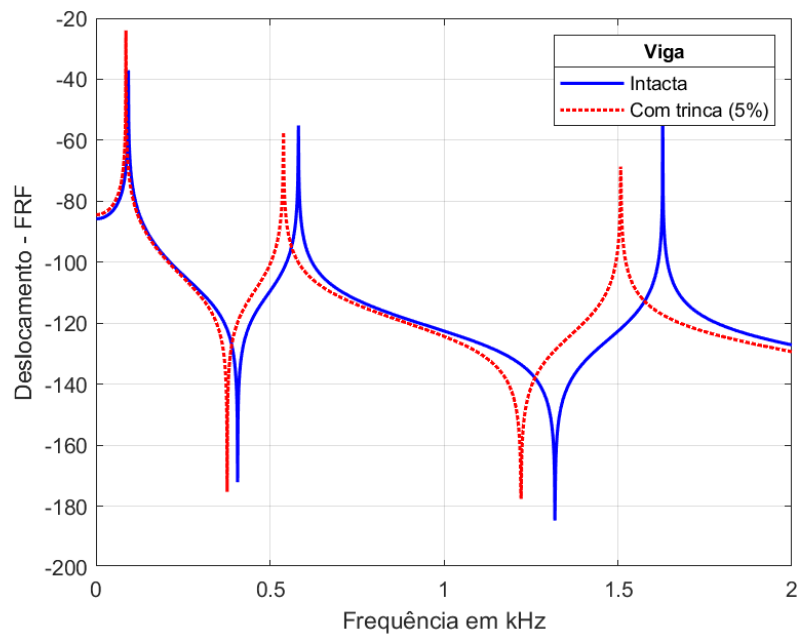


Figura 5: Função de resposta em frequência para uma viga com comprimento de trinca $a_c = 0,05b$.

4.3 Viga com múltiplas trincas sujeita a uma carga constante

A inclusão de múltiplos defeitos é agora considerada. Três trincas são posicionadas ao longo do comprimento, $x_c = [0,05 \ 0,15 \ 0,25]m$. Todas com o mesmo comprimento $a_c = 0,05b$. As condições de restrição, carregamento e demais propriedades são as mesmas do caso anterior.

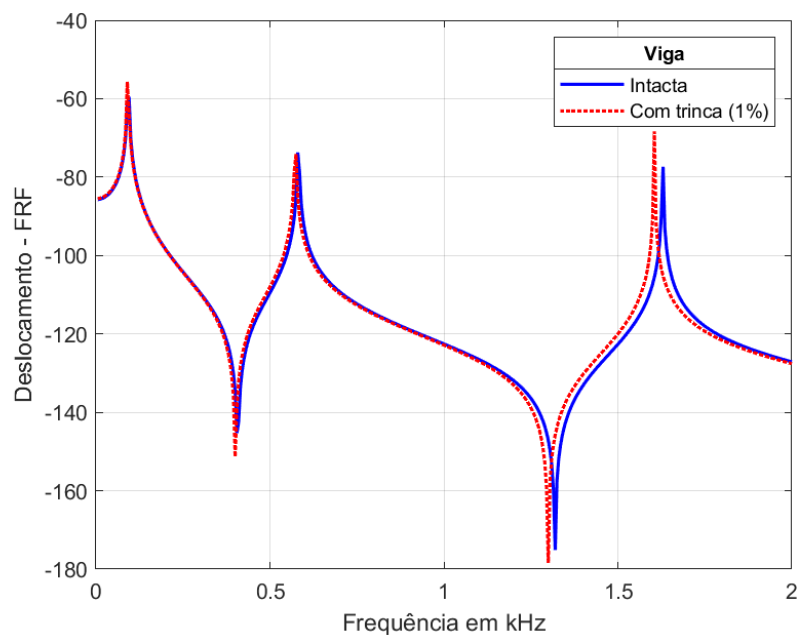


Figura 6: Função de resposta em frequência para uma viga com três trincas localizadas em $x_c = 0,05, 0,15$ e $0,25$ m, com comprimento de trinca $a_c = 0,01b$.

5. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma formulação do método do elemento espectral para uma viga de Bernoulli-Euler, na qual o efeito de redução de rigidez local foi modelado usando uma função exponencial que altera a flexibilidade da viga em torno de uma trinca de forma proporcional às suas dimensões. Foi possível observar que o uso desta técnica, permitiu analisar os efeitos destas descontinuidades locais e suas consequências no que diz respeito ao comportamento dinâmico da estrutura. Contudo, trata-se de um trabalho inicial, no qual o comportamento não linear do sistema foi simplificado

e as alterações na rigidez flexural foram impostas na solução tradicional do modelo. Em trabalhos futuros, pretende-se incluir esta não linearidade na análise a partir da equação diferencial do movimento da viga de *Bernoulli-Euler*, de forma a se observar o efeito da trinca em todos os pontos da estrutura.

6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a FAPEMA, FAPEMIG e UFMA pelo financiamento desta pesquisa.

7. REFERÊNCIAS

- Christides, S. e Barr, A.D., 1984. "One-dimensional theory of cracked Bernoulli-Euler beams". *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 26, No. 11-12, pp. 639–648. ISSN 00207403. doi:10.1016/0020-7403(84)90017-1.
- Filho, M.V.M., Ipiña, J.E.P. and Bavastrì, C.A., 2018. "Analysis of sensor placement in beams for crack identification". *Latin American Journal of Solids and Structures*, Vol. 15, No. 11MecSol2017Joinville. ISSN 16797825. doi:10.1590/1679-78254239.
- Kharazan, M., Irani, S., Noorian, M.A. and Salimi, M.R., 2021. "Nonlinear vibration analysis of a cantilever beam with multiple breathing edge cracks". *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 136, No. May, p. 103774. ISSN 00207462. doi:10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103774. URL <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2021.103774>.
- Krawczuk, M., 2002. "Application of spectral beam finite element with a crack and iterative search technique for damage detection". *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 38, No. 6, pp. 537–548. ISSN 0168874X. doi:10.1016/S0168-874X(01)00084-1.
- Lee, U., 2009. *Spectral Element Method in Structural Dynamics*. ISBN 9780470823743. doi:10.1002/9780470823767.

8. RESPONSABILIDADE AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho.

DYNAMIC RESPONSE OF A BEAM MODEL WITH MULTIPLE CRACKS

Cássio Bruno Florêncio Gomes, cassio.bruno@discente.ufma.br¹

Vilson Souza Pereira, vilson.sp@ufma.br¹

Dalmo Inácio Galdez Costa, dalmo.costa@ufma.br¹

Edilson Dantas Nóbrega, edilson.dantas@ufma.br¹

¹ Federal University of Maranhão, Av. dos Portugueses, 1966, Bacanga - Post Code 65080-805, São Luís - MA

Abstract: Structural integrity monitoring has been a topic of research for decades. In this context, the dynamic behavior of structures that have crack-type geometric discontinuities is a subject of great relevance in modern engineering. In addition, in recent years there has been a growth in research dedicated to analyzing the vibrational behavior of damaged structures. The results of these studies can be used to develop more efficient mathematical models capable of improving the process of monitoring and detecting cracks based on structural vibrations. Vibration analysis of damaged structures can be used as a suitable indicator for fault diagnosis. When open cracks appear in a one-dimensional structure, one of the approaches adopted is to consider that their behavior can be modeled through a local flexibility in the vicinity of the crack. In this article, a simplified approach for modeling multiple cracks in beams subjected to transverse vibration is investigated. This model is implemented through a local function, applied directly to the stiffness of the beam, which has experimentally calculated parameters in its formulation. For this function, the characteristic response is an exponential decay. This effect causes a reduction in the local stiffness and in the vicinity of the crack. The proposed multi-cracked beam model is presented and the results are investigated using the Spectral Element Method.

Palavras-chave: Beam, Multiple Cracks, Spectral Element, Wave Propagation