

## ANÁLISE DE SENSIBILIDADE GLOBAL E DE ESTABILIDADE DE UM SISTEMA DE CAPTAÇÃO DE ENERGIA EXCITADO PARAMETRICAMENTE

Luiz Oreste Cauz, [cauz@uems.br](mailto:cauz@uems.br)<sup>1</sup>, [luiz.cauz@unesp.br](mailto:luiz.cauz@unesp.br)<sup>2</sup>

Fábio Roberto Chavarette, [fabio.chavarette@unesp.br](mailto:fabio.chavarette@unesp.br)<sup>2</sup>

<sup>1</sup>UEMS – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Nova Andradina, Mato Grosso do Sul, Brasil.

<sup>2</sup>UNESP – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências Naturais e Engenharia, Ilha Solteira, São Paulo, Brasil

**Resumo:** A colheita de energia é o processo pelo qual a energia ambiente é capturada e transformada em uma forma utilizável. Existem diversas formas de sistemas de captação de energia, como energia solar, gradientes térmicos, vibrações acústicas e mecânicas. Os sistemas que utilizam como fonte as vibrações são chamados sistemas de captação de energia vibracional (Vibration Energy Harvesting Systems - VEHS). A colheita de energia baseada em VEHS é conhecida como uma fonte de alimentação suplementar, que fornecerá pequenas quantidades de energia para aplicações de carga lenta ou para alimentar e manter dispositivos e sensores remotos que requerem pequenas quantidades de energia para operarem, como, por exemplo: aparelhos auditivos, marca-passo, estimulador de medula espinhal e sistemas microeletromecânicos. O objetivo deste trabalho é a análise da estabilidade de um sistema de captação de energia excitado parametricamente e que utiliza como transdutor materiais piezoelétricos. Pretende-se analisar a resposta do sistema conforme se modifica os valores dos parâmetros físicos, visando a maximização da energia produzida. Neste sentido, é importante fazer preliminarmente uma análise de sensibilidade global dos parâmetros físicos com objetivo de identificar quais parâmetros, quando variados, interferem mais na produção de energia. A análise de sensibilidade é feita por meio do cálculo dos índices de Sobol. Em seguida, a análise da estabilidade é feita baseada em resultados obtidos a partir da Teoria de Floquet e por técnicas de aproximação da matriz de transição de estados desenvolvida por Sinha e Butcher. A técnica desenvolvida por Sinha e Butcher, baseada nas iterações de Picard e nas expansões em polinômios de Chebyshev visa encontrar soluções aproximadas para sistemas periódicos no tempo. Um aspecto importante conhecido na literatura, é que sistemas de captação de energia vibracional possuem respostas eficientes quando os parâmetros físicos do sistema são sintonizados para que o sistema trabalhe em regime de ressonância com a fonte de excitação paramétrica. Portanto, resultados importantes da estabilidade do sistema são mostrados quando o sistema está em ressonância com a fonte de excitação externa.

**Palavras-chave:** análise de estabilidade, análise de sensibilidade, matriz fundamental aproximada, ressonância.

### 1. INTRODUÇÃO

Diante de novas aplicações tecnológicas, são necessários estudos que visem desenvolver dispositivos capazes de gerar energia suficiente para que essas novas tecnologias sejam autossuficientes, isto é, consigam gerar energia elétrica suficiente para o seu consumo. Desta forma, é necessário novos estudos sobre a captação de energia do ambiente. Uma das formas de captar energia do ambiente é por vibração mecânica. A colheita de energia por vibração é conhecida como uma fonte de energia suplementar, que fornecerá pequenas quantidades de energia para aplicações de carga lenta ou para alimentar e manter dispositivos ou sensores remotos que necessitem de pequenas quantidades de energia para operarem. Como exemplo, aparelhos auditivos, marca-passo, estimulador de medula espinhal e sistemas microeletromecânicos. Na literatura existem diversas pesquisas sobre sistemas de captação de energia por vibração (Vibration Energy Harvesting Systems - VEHS), e dentre as mais estudadas, estão os VEHS que utilizam como transdutores materiais piezoelétricos, que são materiais que transformam a energia mecânica em energia elétrica. Um dos materiais elétricos mais utilizados é o Titanato Zirconato de Chumbo (PZT) (Challa *et al.*, 2008; Eichhorn *et al.*, 2009 e Zhu, 2011).

Na maioria das pesquisas em dinâmica aplicada, não são levados em consideração a variação dos parâmetros dos sistemas. Tampouco é estabelecido um critério para se determinar quais parâmetros influenciam mais no comportamento dinâmico. A análise de sensibilidade global estabelece um critério para se quantificar a importância de cada parâmetro de um modelo (Marelli *et al.*, 2019). Além disso, esse critério visa também a reduzir o custo computacional, pois na análise de sensibilidade usam-se frequentemente os índices de Sobol, que são baseados em variâncias de parcelas de uma

expansão polinomial.

Na análise de estabilidade será utilizado um método baseado na transformação de Lyapunov-Floquet (L-F), e utiliza a expansão polinomial de Chebyshev para aproximar os termos periódicos. O método iterativo de Picard é usado para aproximar a matriz de transição de estado. Os multiplicadores de Floquet, determinados através deste método, permitem construir o diagrama de estabilidade do sistema dinâmico.

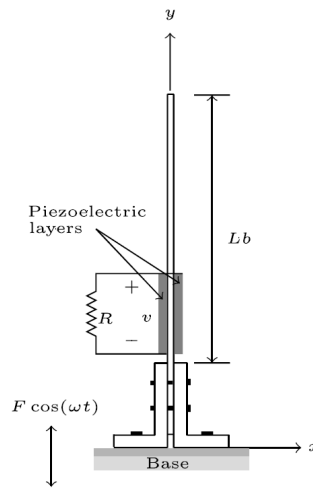
O propósito desse trabalho é de fazer uma análise de estabilidade e de sensibilidade global de um sistema de captação de energia, tendo em vista a energia produzida pelo sistema.

## 2. METODOLOGIA

### 2.1 Modelo Físico e Matemático

As montagens de estruturas para sistemas de captação de energia vibracional são diversas, sendo mais comuns colunas ou placas em balanço recoberta parcialmente, ou totalmente por uma camada de PZT (Challa *et al.*, 2008 e Zhu, 2011). O modelo físico que se propõe estudar aqui é uma viga engastada-livre parcialmente recoberta por uma camada de material piezoelétrico e excitada parametricamente, como ilustrado na Fig. 1.

Figura 1: Modelo do coletor Proposto



Fonte: Daqaq *et al.* (2009)

O material piezoelétrico está ligado ao feixe e a uma carga resistiva com a finalidade da colheita de energia. O modelo matemático representando essa dinâmica foi descrito por Daqaq *et al.* (2009) cuja equação diferencial é dada pela Eq. (1)

$$\begin{cases} \ddot{u} + 2\mu_1\dot{u} + \omega_n^2 u + \mu_2|\dot{u}|\dot{u} + \alpha u^3 + 2\beta(u^2\ddot{u} + u\dot{u}^2) = u \frac{F}{m} \cos(\omega t) + \frac{\theta}{m} V, \\ \theta\dot{u} + C_p\dot{V} + \frac{1}{R}V = 0, \end{cases} \quad (1)$$

onde  $u$  é a coordenada generalizada representando a deflexão da viga na direção  $x$ ,  $V$  é a tensão de saída medida no resistor  $R$ ,  $\mu_1$  é o termo de amortecimento viscoso,  $\mu_2$  é o amortecimento quadrático representando a resistência do ar,  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes,  $\theta$  é o acoplamento eletromecânico,  $C_p$  é a capacitância do elemento piezoelétrico,  $m$  é a massa da viga,  $F$  é a amplitude de excitação e  $\omega$  é a frequência de excitação. O termo  $\alpha u^3$  é usado para descrever a não linearidade geométrica da viga, o termo  $2\beta(u^2\ddot{u} + u\dot{u}^2)$  representa a inércia. A deflexão da viga,  $u$ , e o tempo,  $t$ , são normalizados em relação ao comprimento da viga,  $Lb$ , e a resposta de frequência inversa,  $\frac{1}{\omega_n}$ , respectivamente. Após a normalização obtém-se o sistema equivalente dado na Eq. (2)

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\mu_1\dot{x} + x + \mu_2|\dot{x}|\dot{x} + \alpha x^3 + 2\beta(x^2\ddot{x} + x\dot{x}^2) = xF \cos(\Omega t) + \frac{\theta}{K} V, \\ \theta\dot{x} + C_p\dot{V} + \frac{1}{R_{eq}}V = 0, \end{cases} \quad (2)$$

onde  $x = \frac{u}{Lb}$ ,  $t = t\omega$ ,  $V = \frac{V}{Lb}$ ,  $\mu_1 = \frac{\mu_1}{\omega_n}$ ,  $\mu_2 = \mu_2 Lb$ ,  $\alpha = \alpha \frac{Lb^2}{\omega_n^2}$ ,  $\beta = \beta (Lb)^2$ ,  $F = \frac{F}{K}$ ,  $C_p = C_p$ ,  $R_{eq} = R\omega_n$ ,  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$ ,  $K = m\omega_n^2$ .

A potência média de saída associada ao sistema (Eq. (2)) em um intervalo de tempo de comprimento  $T$  é dada por

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \lambda V(t)^2 dt \quad (3)$$

onde  $\lambda V(t)^2$  é a potência instantânea e  $\lambda = \frac{1}{R_{eq}C_p}$  (Norenberg *et al.*, 2021).

## 2.2 Análise de Sensibilidade Global

Nesta subseção apresentaremos uma síntese da análise de sensibilidade global para estudar a dinâmica do coletor de energia excitado parametricamente. Em geral, modelos matemáticos que representam fenômenos físicos, têm parâmetros de entrada que *a priori* não se sabe qual o efeito das escolhas de seus parâmetros nominais nas respostas dos modelos. Além disso, em muitos modelos, alguns de seus parâmetros exercem mais influência na resposta do sistema. A análise de sensibilidade global de um modelo visa quantificar a importância relativa de cada parâmetro de entrada. Deste modo é possível fixar os valores nominais de alguns parâmetros, variando apenas os valores dos parâmetros mais influentes. O método de análise adotado neste trabalho, é baseado na decomposição de Hoeffding-Sobol, e visa estabelecer uma aproximação do modelo original por um modelo computacional em somas de dimensões crescentes, e então avaliar a variância de cada um dos termos da soma em relação à variância total do modelo.

Por simplicidade, suponha que o modelo matemático possa ser representado pela seguinte relação funcional

$$Y = M(X), \quad X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\} \quad (4)$$

onde  $X$  é um vetor de parâmetros independentes que é modificado pelo operador matemático  $M$ , produzindo uma saída escalar  $Y$ . A decomposição de Hoeffding-Sobol pode ser escrita como a soma de termos de diferentes dimensões

$$Y = M_0 + \sum_{i=1}^n M_i(X_i) + \sum_{i<j} M_{ij}(X_i, X_j) + \dots + M_{1,\dots,n}(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad (5)$$

onde

$$\begin{aligned} M_0 &= E[Y] \\ M_i &= E[Y|X_i] - M_0 \\ M_{ij} &= E[Y|X_i, X_j] - M_0 - M_i(X_i) - M_j(X_j) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (6)$$

O operador  $E[\cdot]$  que aparece nas igualdades da Eq. (6) denota o valor esperado da quantidade a ser calculada.

Da independência dos parâmetros de  $X$  podemos escrever a variância global de  $Y$  como

$$Var[Y] = \sum_u Var[M_u(X_u)], \quad \emptyset \neq u \subset \{1, 2, \dots, n\}. \quad (7)$$

Dividindo a Eq. (7) pela variância total, obtemos

$$\sum_u \frac{Var[M_u(X_u)]}{Var[Y]} = \sum_u S_u = \sum_{i=1}^n S_i + \sum_{i<j} S_{ij} + \dots + S_{1,2,\dots,n} = 1 \quad (8)$$

onde  $S_u$  é conhecido como índices de Sobol.

Note que cada índice de Sobol representa a contribuição da variância da saída de  $X_u$  em relação à variância total da saída.

Os índices de Sobol de primeira ordem

$$S_i = \frac{Var[M_i(X_i)]}{Var[Y]} \quad (9)$$

descreve o efeito individual de  $X_i$ , enquanto que os índices de segunda ordem

$$S_{ij} = \frac{Var[M_{ij}(X_i, X_j)]}{Var[Y]} \quad (10)$$

mede a contribuição conjunta do par  $(X_i, X_j)$ , e assim por diante.

## 2.3 Expansão em Polinômio Caos

Uma forma de calcular os índices de Sobol é por meio do Método de Monte Carlo. No entanto, o uso desse método pode não ser computacionalmente interessante devido à lenta convergência desse método de amostragem. Uma maneira alternativa e eficiente para se calcular os índices de Sobol, é através de um modelo substitutivo do modelo original, obtido por meio da Expansão em Polinômio Caos (PCE) (Marelli and Sudret, 2015), que é uma aproximação para o sistema físico original, e que leva uma boa precisão dos cálculos em um curto tempo de processamento computacional.

Supondo que  $Y = M(X)$  é uma variável aleatória de variância finita, pode-se definir uma Expansão em Polinômio Caos na forma

$$Y \approx \sum_{\alpha \in A} y_{\alpha} \psi_{\alpha}(X) \quad (11)$$

onde  $\psi_{\alpha}$  são polinômios ortogonais de várias variáveis relativamente a uma função de densidade de probabilidade conjunta  $f_X$  de  $X$ ,  $y_{\alpha}$  são coeficientes reais a serem determinados e  $A \subset N^M$  de forma que seja possível selecionar todos os possíveis os índices da expansão polinomial.

Como consequência da ortogonalidade de um PCE, temos

$$E[Y] \approx y_0 \quad (12)$$

e

$$Var[Y] \approx \sum_{\substack{\alpha \neq 0 \\ \alpha \in A}} y_{\alpha}^2 \quad (13)$$

Da Equação (13) e da definição do índice de Sobol (Eq. (8)), podemos reescrever os índices de Sobol de primeira e segunda ordens respectivamente como

$$S_i = \sum_{\substack{\alpha \neq 0 \\ \alpha \in A_i}} y_{\alpha}^2 / \sum_{\substack{\alpha \neq 0 \\ \alpha \in A}} y_{\alpha}^2 \quad (14)$$

e

$$S_{ij} = \sum_{\substack{\alpha \neq 0 \\ \alpha \in A_{ij}}} y_{\alpha}^2 / \sum_{\substack{\alpha \neq 0 \\ \alpha \in A}} y_{\alpha}^2 \quad (15)$$

## 2.4 Análise de Estabilidade

Na análise da estabilidade do sistema (Eq. (2)) utilizamos o método desenvolvido pelo matemático francês Floquet (1847 - 1920) conjuntamente com uma técnica desenvolvida por Sinha and Butcher (1997). O método de Floquet presta-se ao estudo da estabilidade de trajetórias fechadas, caso as expressões analíticas das soluções correspondentes sejam conhecidas (Monteiro (2011)). Mais precisamente, Floquet mostrou, sob certas condições, que para uma classe de sistemas lineares invariantes no tempo, estudar as soluções de um sistema variante no tempo é equivalente a estudar as soluções de um sistema linear invariante. Infelizmente o estudo analítico desses sistemas, como propôs Floquet, tem certas limitações.

A técnica desenvolvida por Sinha e Butcher, é baseada nas iterações de Picard e nas expansões em polinômios de Chebyshev (Andrade *et al.*, 2012), e visa encontrar soluções aproximadas para sistemas periódicos no tempo. Um estudo sobre a técnica de Sinha e Butcher também pode ser encontrado em Mesquita (2007) e Peruzzi (2005).

## 3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Em todos os resultados numéricos apresentados nesse trabalho, são adotados os seguintes valores nominais para os parâmetros:  $\mu_1 = 0.01$ ,  $\mu_2 = 0.01$ ,  $\alpha = 0.001$ ,  $\beta = 0.001$ ,  $\theta = 0.05$ ,  $K = 0.05$  e  $R_{eq} = 20$ . Foram variados os parâmetros  $F$  e  $\Omega$  que determinam respectivamente amplitude e frequência da força paramétrica. Todos os resultados numéricos foram obtidos por simulações no software Matlab. A condição inicial de integração é definida como  $(x_0, \dot{x}_0, v_0) = (0.1, 0, 0)$ .

Para a análise de sensibilidade global é assumido que os parâmetros físicos do sistema são independentes e é adotada uma distribuição uniforme sobre os seus valores nominais com coeficiente de variação de até 20%. Todos os resultados apresentados sobre essa análise, foram obtidos por códigos de programação adaptados dos códigos desenvolvidos por Fuzaro de Almeida *et al.* (2021).

Por fim, é apresentado os resultados numéricos de análise de estabilidade do sistema, baseados no método de Floquet (Meirovitch, 2010; Monteiro, 2011 e Naifeh and Balachandran, 1995) e em uma técnica de aproximação da matriz de transição de estados (Sinha and Butcher, 1997; Mesquita, 2007 e Peruzzi, 2005).

### 3.1 Análise de Sensibilidade

O primeiro passo para se fazer uma análise de sensibilidade global, é verificar se o modelo substituto (surrogate) representa uma boa aproximação para o modelo original do problema. O modelo substituto utilizado neste trabalho é baseado na expansão de polinômio caos da potência média de saída gerada pelo coletor de energia. Para isso, adotamos  $C_p = 20$  e os seguintes valores para os parâmetros da força paramétrica:  $F = 0.28$  e  $\Omega = 0.65$ .

Note que na Fig. 2 é apresentado os dados em forma de pares da forma (True Model, Surrogate Model), e quanto mais próximo da reta identidade estiverem os pares, melhores são as aproximações do modelo substituto em relação ao modelo real. Nota-se que o modelo substituto representa uma boa aproximação para o modelo real, validando o método. Pode-se então explorar cenários que podem influenciar sensivelmente na potência média de saída  $P$  (Eq. (3)) do coletor de energia.

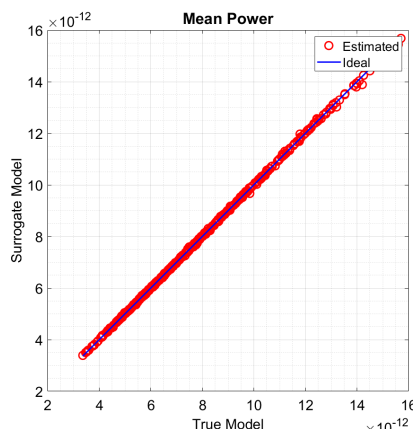


Figura 2: Potência média  $P$  : comparação entre o modelo substituto e o modelo real

Na Figura 3a é apresentada a análise de sensibilidade global via índices de Sobol para o coletor de energia, no intuito de analisar a influência dos parâmetros na potência média de saída. Para  $\Omega$  variando de 0.1 à 2.5, e admitindo uma variação de 20% da amplitude da força externa  $F$  em torno do valor nominal  $F = 0.4$ , nota-se que os parâmetros mais influentes são a capacitância  $C_p$  e o acoplamento eletromecânico  $\theta$ . Em torno da região de ressonância 1 : 1 ( $0.9 \leq \Omega \leq 1.2$ ), percebe-se certa sensibilidade em relação à frequência  $\Omega$  e em uma escala um pouco menor à amplitude  $F$ . Evidentemente há influência de índices de Sobol de segunda ordens, que não foram analisados aqui. Para  $\Omega$  igual a 1.3 e a 1.4 nota-se novamente as influências dos parâmetros  $\theta$  e  $C_p$ . Para  $1.6 \leq \Omega \leq 2.5$  é possível observar a influência predominante da frequência da força paramétrica  $\Omega$  na potência média de saída  $P$ . Observe ainda que na vizinhança da ressonância 2 : 1 ( $\Omega \approx 2$ ), o sistema é secundariamente sensível à variação da capacitância  $C_p$ . O caso em que  $\Omega = 1.5$  é melhor observado na Fig. 3b. Para  $F = 0.4$  não se percebe sensibilidade do sistema para os índices de Sobol de primeira ordem e para os de segunda ordem estudados. Para  $0.1 \leq F \leq 0.3$  predomina as influencias de  $C_p$  e  $\theta$  e para  $0.5 \leq F \leq 1$  o sistema é mais sensível à variação de  $\Omega$ .

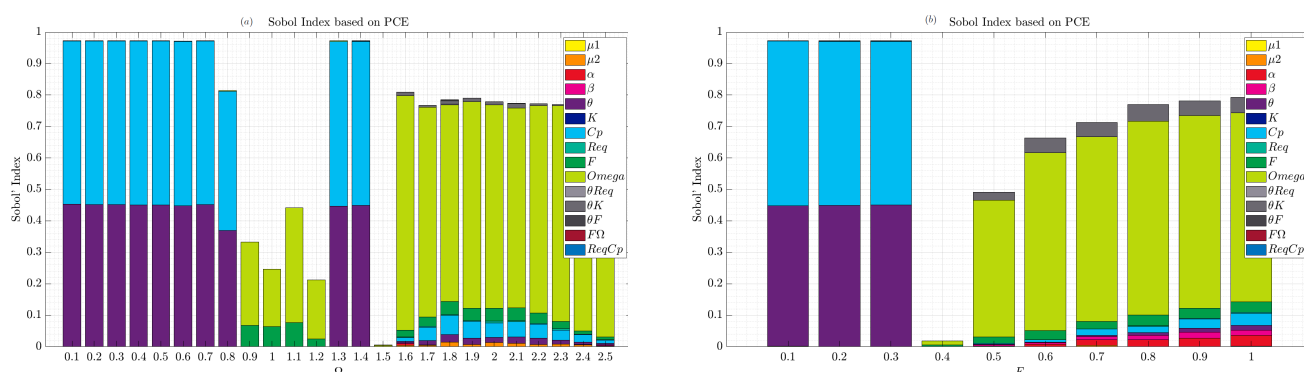


Figura 3: (a) Índices de Sobol para diversos valores da frequência  $\Omega$ ; (b) Índices de Sobol para diversos valores da amplitude  $F$  e para  $\Omega = 1.5$

Na Figura Fig. 4 é avaliada a sensibilidade do sistema quando é assumido dois valores para  $\Omega$ ,  $\Omega = 2.0$  (Fig. 4a) e  $\Omega = 1.0$  (Fig. 4b), considerando uma variação de até 20% sobre esses valores nominais. Além disso, na figura (Fig. 4a)  $F$  assume valores entre 0.1 e 1 com passo de 0.1 enquanto na figura (Fig. 4b)  $F$  varia no intervalo de 0.01 a 0.96 com passo de 0.05. Nota-se na figura (Fig. 4a) o predomínio de  $\Omega$  em todos os cenários e uma maior participação da capacitância  $C_p$  quando se aumenta a amplitude da força  $F$ . Na figura (Fig. 4b) observa-se que  $C_p$  e  $\theta$  exercem mais influência na potência média, enquanto a partir de  $\Omega = 0.36$ , há uma maior influência de  $\Omega$  e da amplitude  $F$ .

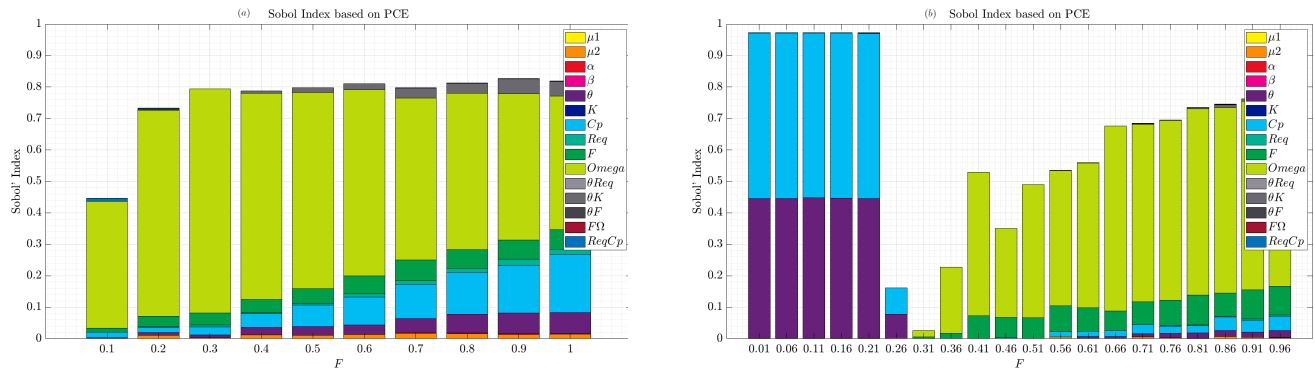


Figura 4: Índices de Sobol para diversos valores da amplitude  $F$

### 3.2 Análise de Estabilidade

Para investigar a estabilidade dinâmica do sistema e procurar possíveis soluções estáticas, reescrevemos as equações dinâmicas adimensionais do sistema (Eq. (2)) na forma de equações de estado. Para isto, introduzimos a mudança de variável  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$ ,  $x_3 = V$ , e desta forma, obtemos as equações de estado do sistema na seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{1 + 2\beta x_1^2} \left[ -2\mu_1 x_2 - x_1 - \mu_2 |x_2| x_2 - \alpha x_1^3 - 2\beta x_1 x_2^2 + x_1 F \cos(\Omega t) + \frac{\theta}{k} x_3 \right] \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{C_p \text{Req}} x_3 - \frac{\theta}{C_p} x_2 \end{cases} \quad (16)$$

O sistema possui três pontos de equilíbrio  $(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ , a saber,  $(0, 0, 0)$ ,  $(\sqrt{\frac{F-1}{\alpha}}, 0, 0)$  e  $(-\sqrt{\frac{F-1}{\alpha}}, 0, 0)$ . Note que os dois últimos pontos só fazem sentido quando  $\Omega = 0$ ,  $F \neq 1$ ,  $|F - 1| \leq |\alpha|$  e quando  $0 < F < 1$  devemos ter  $\alpha < 0$ , no entanto, se  $F > 1$  devemos ter  $\alpha > 0$ . Trataremos aqui apenas da estabilidade do ponto de equilíbrio  $(0, 0, 0)$ .

Para se usar as técnicas de Sinha e Butcher, a linearização das equações de estados (Eq. (16)) em torno do ponto de equilíbrio  $(0, 0, 0)$  é necessária. Assim, as equações do sistema podem ser escritas na forma  $\dot{x}(t, \mathcal{P}) = A(t, \mathcal{P})x(t, \mathcal{P})$ , em que  $\mathcal{P}$  representa os parâmetros do sistema. É fácil ver que  $A(t, \mathcal{P})$  é periódica no tempo de período  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ .

Da transformação  $t = \frac{2\pi}{\Omega}\tau$ , reescrevemos o sistema linearizado na forma  $\frac{dx}{d\tau} = \bar{A}(\tau, \mathcal{P})x(\tau, \mathcal{P})$  onde  $\bar{A}(\tau, \mathcal{P}) = \bar{A}_1(\mathcal{P})f_1(\tau) + \bar{A}_2(\mathcal{P})f_2(\tau)$ ,  $f_1(\tau) = 1$ ,  $f_2(\tau) = \cos(2\pi\tau)$ ,

$$\bar{A}_1(\mathcal{P}) = \frac{2\pi}{\Omega} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2\mu_1 & \frac{\theta}{k} \\ 0 & -\frac{\theta}{C_p} & -\frac{1}{C_p \text{Req}} \end{bmatrix}, \quad \bar{A}_2(\mathcal{P}) = \frac{2\pi}{\Omega} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para se analisar a estabilidade estrutural, investigamos se o módulo dos multiplicadores característicos  $\rho_j$  é maior ou igual a 1 para determinados valores dos parâmetros físicos. O cálculo desses multiplicadores característicos é feito por meio do cálculo da Matriz Fundamental Aproximada. Na aproximação, o grau do polinômio de Chebyshev alterado é  $m = 20$ , e o número de iterações de Picard é  $p = 40$ .

As Figuras 5a, 5b e 5c mostram diagramas de estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema quando se varia a amplitude da força externa  $F$ . Na Figura 5a foi adotado  $\Omega = 0.88$  e a amplitude  $F$  variando no intervalo  $[0.1, 1]$ . Percebe-se que existe um intervalo de valores de  $F$  para os quais o sistema é estável, ou seja, os multiplicadores característicos com módulo menores do que 1, e condição para instabilidade, multiplicadores característicos em módulos maiores do que 1. Na Figura 5b é apresentado o diagrama de estabilidade do sistema na região de ressonância 1 : 1 ( $\Omega = 1$ ). Pode-se notar que a mudança de estabilidade do sistema ocorre para menores valores da amplitude  $F$  quando se compara ao que se ocorre para  $\Omega = 0.88$ . Na Figura 5c é apresentado o diagrama de estabilidade quando o sistema em regime de ressonância 2 : 1 ( $\Omega = 2$ ). Nessa condição, a mudança de estabilidade ocorre para valores de  $F$  variando em uma pequena faixa de valores, isto é,  $F \in [0.001, 0.07]$ .

A Figura 5d mostra a região de estabilidade (em azul) do sistema no espaço de parâmetros  $\Omega F$ . Na região de estabilidade o sistema sempre converge ao ponto de equilíbrio  $(0, 0, 0)$ . Particularmente, quando  $F = 0.4$  e  $\Omega = 1.6$  temos que  $|\rho_1| = |\rho_2| = 0.9615$  e  $|\rho_3| = 0.9902$ , indicando estabilidade, enquanto se  $F = 0.056$  e  $\Omega = 2$ ,  $|\rho_1| = 1.0126$ ,  $|\rho_2| = 0.9274$  e  $|\rho_3| = 0.9922$  indicando que o sistema é instável, pois  $|\rho_1| > 1$ .

No sentido de observar a resposta do sistema em algumas situações específicas, foram geradas três figuras que correspondem ao histórico no tempo do deslocamento da viga (Fig. 6). Nas Figuras 6a e 6b, é possível ver duas situações distintas. Na Figura 6a os parâmetros  $F$  e  $\Omega$  foram adotados na região de estabilidade, a saber,  $F = 0.4$  e  $\Omega = 1.6$ . Nota-se que a viga converge para a posição de equilíbrio. Na Figura 6b é notado que o sistema é instável para  $\Omega = 2$

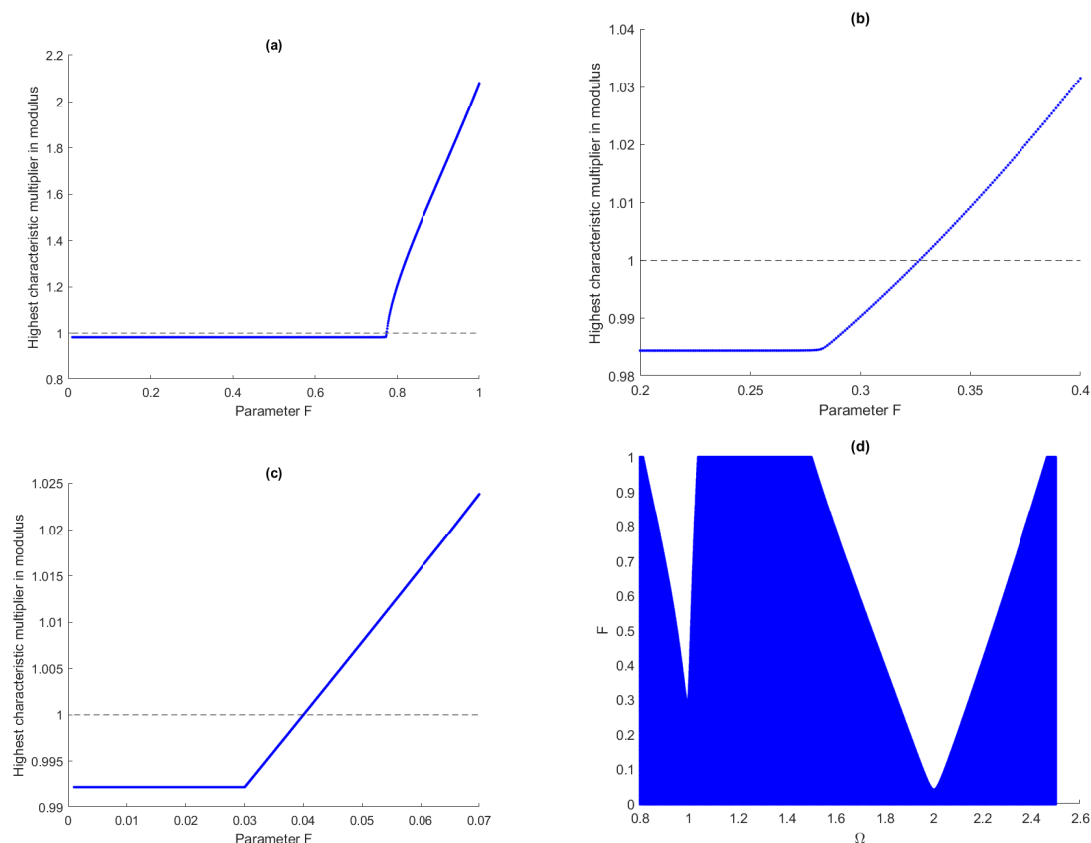


Figura 5: (a) Diagrama de estabilidade para  $\Omega = 0.88$ ; (b) Diagrama de estabilidade para  $\Omega = 1$ ; (c) Diagrama de estabilidade para  $\Omega = 2$ ; (d) Região de estabilidade:  $0.8 \leq \Omega \leq 2.5$  e  $0 \leq F \leq 1$

e  $F = 0.056$ , como anteriormente observado pelo cálculo dos multiplicadores característicos. Percebe-se que passada a fase transiente, o sistema entra em regime periódico. Na Figura 6c podemos ver o comportamento da viga no intervalo de tempo  $[7800, 8000]$  e as seções de Poincaré.

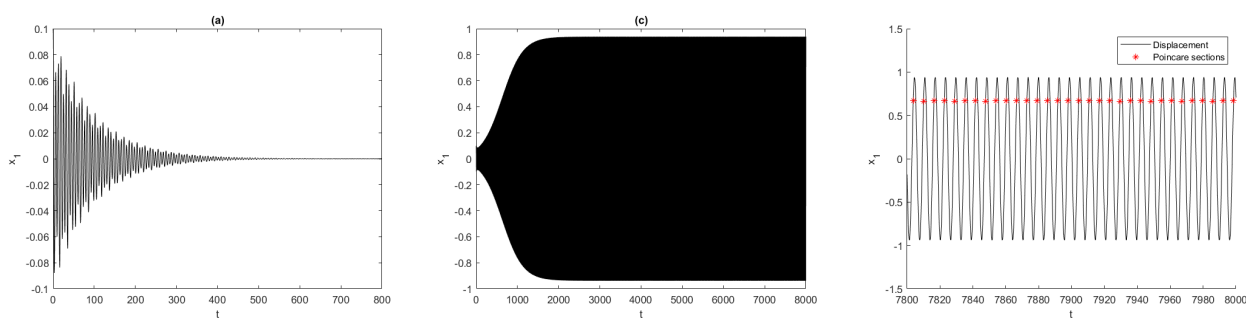


Figura 6: Histórico no tempo para o deslocamento da viga: (a)  $F = 0.4$  e  $\Omega = 1.6$ ; (b)  $F = 0.056$  e  $\Omega = 2$ ; (c)  $F = 0.4$  e  $\Omega = 1.6$  para  $7800 \leq t \leq 8000$

Levando-se em consideração à região de estabilidade (Fig. 5d) e a sensibilidade da potência média de saída do sistema em relação aos parâmetros  $\Omega$  e  $C_p$  na vizinhança de  $\Omega = 2$  (Fig. 3), é apresentado os históricos no tempo do deslocamento da vida  $x_1$  e da voltagem  $x_3$  (Fig. 7), e a potência média de saída (Fig. 8). Note que o sistema entra em um regime periódico (Figs. 7a e 7b).

A potência média de saída foi obtida através de uma aproximação polinomial conhecida na literatura como Polinômio Caos Kriging (processo de modelagem gaussiana). Polinômio caos Kriging é uma nova técnica de metamodelagem que combina modelagem de processos gaussianos e expansões de polinômio caos (Schöbi *et al.*, 2017).

Nas Figuras 8a e 8b é possível ver o comportamento da potência média de saída em função dos valores da capacitância  $C_p$ . Esses resultados foram obtidos na região de ressonância 2 : 1, para valores de  $\Omega$  e  $F$  de forma que o sistema fique próximo à fronteira de estabilidade conforme a Fig. 5d. A Figura 8a mostra a potência média para  $0 \leq C_p \leq 10$  enquanto que a Fig. 8b mostra a ampliação da Fig. 8a para  $0 \leq C_p \leq 2$ .

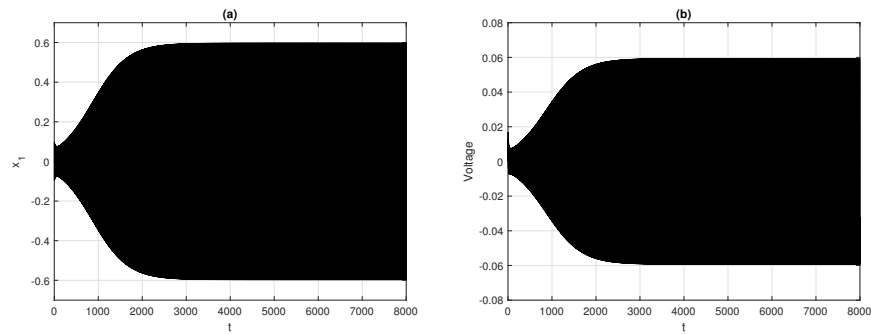
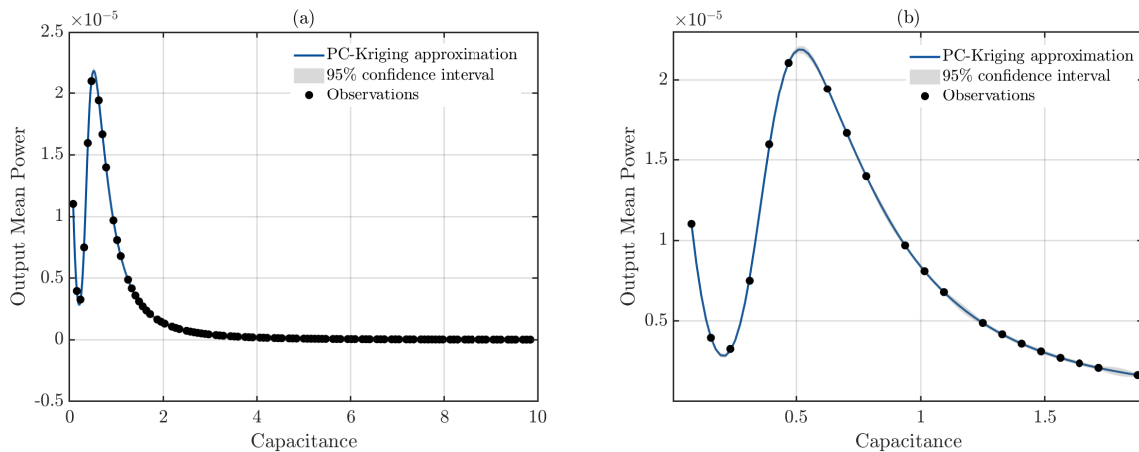
Figura 7: Sistema em regime periódico na vizinhança de  $\Omega = 2$ 

Figura 8: Potência média de saída via aproximação por PC-Kriging

#### 4. CONCLUSÕES

A análise de sensibilidade global via índices de Sobol mostrou que próximo da região de ressonância, o parâmetro mais influente para a captação de energia, é a frequência da força paramétrica. Pode-se concluir ainda, que na região de ressonância 2 : 1 o sistema também é sensível à variação da capacitância.

Da análise de estabilidade, observou-se que o sistema é instável uma região no espaço dos parâmetros referentes à frequência e amplitude da força paramétrica, isto é, na escolha desses parâmetros nessa região, o sistema converge para o ponto de equilíbrio na origem do sistema. Na fronteira da região de estabilidade, foi possível explorar regimes periódicos para o sistema.

Conclui-se ainda que a produção de energia em condição de ressonância 2 : 1 é melhor quando se considera menores valores para a capacitância.

#### 5. AGRADECIMENTOS

O autor Luiz Oreste Cauz, agradece à Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul pela concessão de afastamento integral para capacitação, em nível de doutorado em Engenharia Mecânica na Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", em Ilha Solteira - SP.

#### 6. REFERÊNCIAS

- Andrade, E.X.L., Bracciali, C.F. and Rafaeli, F.R., 2012. *Introdução aos Polinômios Ortogonais*. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, São Carlos - SP, Brazil. 144 p.
- Challa, V.R., Prasad, M., Shi, Y. and Fisher, F.T., 2008. "A vibration energy harvesting device with bidirectional resonance frequency tunability". *Smart Materials and Structures*, Vol. 17, pp. 15–35.
- Daqaq, M.F., Stabler, C., Qaroush, Y. and Seuaciuc-Osório, T., 2009. "Investigation of power harvesting via parametric excitations". *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 20, No. 5, pp. 545–557.
- Eichhorn, C., Goldschmidtboeing, F., Porro, Y. and Woias, P., 2009. "A piezoelectric harvester with an integrated frequency-tuning mechanism". *Power MEMS*, pp. 45–48.
- Fuzaro de Almeida, E., Fuzaro de Almeida, E., Salvador, J.P.F. and Ferreira, L.V.G., 2021. "insane\_hapex". URL [https://github.com/estevaofuzaro98/inSANE\\_HAPEX](https://github.com/estevaofuzaro98/inSANE_HAPEX).
- Marelli, S., Lamas, C., Sudret, B., Konakli, K. and Mylonas, C., 2019. "Uqlab user manual-sensitivity analysis".
- Marelli, S. and Sudret, B., 2015. "Uqlab user manual-polynomial chaos expansions".
- Meirovitch, L., 2010. *Methods of analytical dynamics*. Courier Corporation.



- Mesquita, A.J.N., 2007. “Análise da estabilidade de sistemas dinâmicos periódicos usando teoria de sinha”.
- Monteiro, L.H.A., 2011. *Sistemas Dinâmicos*. Editora Livraria da Física, São Paulo, Brazil. 670 p.
- Naifeh, A.H. and Balachandran, B., 1995. *Applied Nonlinear Dynamics*. John Wiley.
- Norenberg, J.P., Cunha Jr, A., da Silva, S. and Varoto, P.S., 2021. “Global sensitivity analysis of (a) symmetric energy harvesters”.
- Peruzzi, N., 2005. *Dinâmica não linear e controle de sistemas ideais e não-ideais periódicos*. Ph.D. thesis, PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas.
- Schöbi, R., Marelli, S. and Sudret, B., 2017. “Uqlab user manual-pc-kriging”.
- Sinha, S.C. and Butcher, E.A., 1997. “Symbolic computation of fundamental solution matrices for linear time-periodic dynamical systems”. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 206, No. 1, pp. 61–85.
- Zhu, D., 2011. “Vibration energy harvesting: machinery vibration, human movement and flow induced vibration”. *Sustainable Energy Harvesting Technologies-Past, Present and Future*, Vol. 1, pp. 22–54.

## 7. RESPONSABILIDADE AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho.

# Global Sensitivity and Stability Analysis of a Parametrically Excited Energy Harvesting System

Luiz Oreste Cauz, [cauz@uems.br](mailto:cauz@uems.br)<sup>1</sup>, [luiz.cauz@unesp.br](mailto:luiz.cauz@unesp.br)<sup>2</sup>  
Fábio Roberto Chavarette, [fabio.chavarette@unesp.br](mailto:fabio.chavarette@unesp.br)<sup>2</sup>

<sup>1</sup>UEMS - Mato Grosso do Sul State University, Nova Andradina, Mato Grosso do Sul, Brazil.

<sup>2</sup>São Paulo State University (FEIS-UNESP)- Ilha Solteira, São Paulo, Brazil

**Abstract:** Energy harvesting is the process by which ambient energy is captured and transformed into a usable form. There are many forms of energy harvesting systems, such as solar energy, thermal gradients, acoustical and mechanical vibrations. Systems that use vibrations as a source are called Vibration Energy Harvesting Systems (VEHS). VEHS-based energy harvesting is known as a supplementary power supply, which will provide small amounts of energy for slow-load applications or to power and maintain remote devices and sensors that require small amounts of energy to operate, such as: hearing aids, pacemaker, spinal cord stimulator, and microelectromechanical systems. The objective of this work is to analyze the stability of a parametrically excited energy harvesting system that uses piezoelectric materials as a transducer. The objective is to analyze the response of the system as the values of the physical parameters are modified, aiming to maximize the energy produced. In this sense, it is important to preliminarily perform a global sensitivity analysis of the physical parameters in order to identify which parameters, when varied, interfere more in energy production. The sensitivity analysis is done by calculating the Sobol indices. Then, the stability analysis is done based on results obtained from Floquet's Theory and by approximation techniques of the state transition matrix developed by Sinha and Butcher. The technique developed by Sinha and Butcher, based on Picard iterations and Chebyshev polynomial expansions, aims to find approximate solutions for periodic systems in time. An important aspect known in the literature, is that vibrational energy harvesting systems have efficient responses when the physical parameters of the system are tuned so that the system works in resonance regime with the parametric excitation source. Therefore, important system stability results are shown when the system is in resonance with the external excitation source.

**Palavras-chave:** stability analysis, sensitivity analysis, approximate fundamental matrix, resonance.