

UM MÉTODO DE SINTONIA DE CONTROLADORES PID PARA SISTEMAS SOB RESTRIÇÕES BASEADO EM OTIMIZAÇÃO

Fábio Henrique de Carvalho Ferraz, fabioferraz88@gmail.com¹

José Kleiton Ewerton da Costa Martins, kleitonmartins@dca.ufrn.br¹

Carlos Eduardo Trabuco Dorea, cetdorea@dca.ufrn.br¹

¹ Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Departamento de Engenharia da Computação e Automação, UFRN-CT-DCA 59078-970, Natal - RN, Brasil

Resumo: Neste trabalho é proposto um método de sintonia de controladores PID, baseado em otimização, para sistemas lineares de tempo discreto sujeitos a restrições na variável de saída e saturação do atuador. A partir de uma modelagem politópica da saturação, são apresentadas condições para que um poliedro contido no conjunto de restrições seja positivamente invariante em relação a um sistema em malha fechada com um controlador PID sujeito a saturação. Tais condições são usadas na formulação de um problema de otimização não-linear, cuja solução fornece os parâmetros do controlador que satisfaz as restrições, garante estabilidade local e otimiza o desempenho do sistema em malha fechada. A eficácia do método é analisada a partir de resultados de simulação em um modelo de um motor CC usado em veículos elétricos.

Palavras-chave: Controlador PID, Saturação nos Atuadores, Sistemas sob Restrições, Conjuntos Invariantes, Otimização

1. INTRODUÇÃO

Estima-se que mais de 90% das malhas de controle encontradas em processos industriais operavam com controladores do tipo PI/PID, atingindo uma larga faixa de aplicações: indústria automobilística, controladores de voo, pilotos automáticos, instrumentação, dentre outras (Åström and Hägglund, 2001). No entanto, apesar de ser um controlador que vem sendo usado há mais de 70 anos, a sintonia do PID, ainda hoje, é uma tarefa desafiadora e responsável por parte dos problemas de controle encontrados na indústria. Inúmeras técnicas de sintonia vêm sendo desenvolvidas ao longo dos anos. A pioneira dessas técnicas de sintonia foi desenvolvida por Ziegler e Nichols (Ziegler *et al.*, 1942) que ainda surpreende por ser amplamente utilizada devido a sua simplicidade e eficiência. A partir dela, outras técnicas de sintonia de controladores PID foram sendo desenvolvidas, dentre elas: Cohen e Coon, Método da Integral do Erro, Método do Modelo Interno, etc. Mesmo com algumas variações, praticamente, nenhum desses métodos lida com uma necessidade natural dos processos industriais, que são as restrições (Tchamna and Lee, 2018).

O estudo de sistemas de controle com restrições tem sido impulsionado nos últimos anos visto que restrições estão sempre presentes em sistemas reais, seja por limitações físicas do sistema, limitações de energia para sua regulação, limites de segurança ou por causa do domínio no qual a linearização de um sistema não-linear é válida (Blanchini and Miani, 2015; Bak, 2000). Não tratar de forma adequada as restrições em problemas de controle pode trazer consequências indesejáveis. A saturação dos atuadores, por exemplo, pode levar o sistema em malha fechada até mesmo a instabilidade. Todo atuador é sujeito a saturação, fazendo com que o sinal de controle, que é efetivamente aplicado na planta, seja limitado entre valores máximos e mínimos. A modelagem do fenômeno de saturação permite considerá-la explicitamente no projeto do controlador e na análise de propriedades tais como estabilidade, desempenho e robustez do sistema em malha fechada (Tarbouriech *et al.*, 2011).

Problemas de controle sujeitos a restrições, seja nas variáveis de estado, entrada ou saída têm sido resolvidos a partir da abordagem de invariância de conjuntos (Blanchini and Miani, 2015). A violação de restrições pode ser evitada se o estado inicial do sistema pertencer a um conjunto *positivamente invariante* do sistema em malha fechada. Entre os trabalhos, dentro dessa abordagem que tratam de projeto de controladores da família PID para sistemas sob restrições, podem ser citados o de Dantas *et al.* (2018), que usa otimização multiparamétrica para obter um controlador PID com ganho escalonado, mas apenas para sistemas de segunda ordem, e o de dos Santos *et al.* (2021), que propõe o projeto de controladores PI com um termo *feedforward* usando otimização bilinear, mas evitando a saturação dos atuadores.

Neste trabalho é proposto um método de sintonia de controladores PID para sistemas de tempo discreto sujeitos a restrições na variável controlada e saturação do atuador. Usando a chamada *modelagem politópica* da saturação (Tarbouriech

et al., 2011), um modelo de estado em tempo discreto do sistema controlado por um controlador PID, aumentado com a inclusão no estado das variáveis correspondentes a integral do erro e derivada da saída, é obtido, incluindo um filtro de referência usado para regular a velocidade de mudança do *set-point* em função das restrições nas variáveis do sistema. Restrições nas variáveis correspondentes a integral do erro e derivada da saída são incluídas para facilitar a busca por um poliedro invariante. Condições são então estabelecidas para que um poliedro definido no espaço de estado aumentado seja positivamente invariante em relação ao sistema em malha fechada com o controlador PID, na forma de relações algébricas entre variáveis matriciais. Em seguida, usando a abordagem proposta por Brião *et al.* (2018, 2021), tais condições são traduzidas em um problema de otimização não-linear, cuja solução fornece os ganhos do controlador PID, juntamente com um poliedro invariante associado que garante o respeito as restrições. O método proposto é então avaliado por meio de simulações numéricas e análises comparativas usando o modelo de um motor CC (Dantas *et al.*, 2018).

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Sistemas Lineares sob Restrições

Considere o seguinte sistema de tempo discreto, linear e invariante no tempo SISO (do inglês, *Single-Input Single-Output*):

$$\begin{cases} x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] + Ed[k] \\ y[k] = Cx[k], \end{cases} \quad (1)$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (matriz de estado), $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ (matriz de entrada), $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ (matriz de saída), $E \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ (matriz de perturbação), $k \in \mathbb{N}$ (instante de tempo), $x[k] \in \mathbb{R}^n$ (vetor de estado), $u[k] \in \mathbb{R}$ (entrada de controle), $d[k] \in \mathbb{R}$ (perturbação) e $y[k] \in \mathbb{R}$ (saída do sistema). A perturbação $d[k]$ é desconhecida, porém, limitada ao seguinte conjunto poliédrico:

$$d[k] \in \Phi = \{d : |Wd| \leq 1\}, \quad (2)$$

sendo $W \in \mathbb{R}$ um escalar que define as restrições em $d[k]$. O sistema é também sujeito a saturação do atuador:

$$u[k] \in \Omega_u = \{u : |u[k]| \leq u_{max}\}, \quad (3)$$

de modo que, considerando a realimentação estática de saída ($u[k] = Ky[k]$), tem-se que:

$$u[k] = \text{sat}(Ky[k]) = \text{sat}(KCx[k]), \quad (4)$$

sendo K o ganho do controlador e $\text{sat}(\cdot)$ a função de saturação definida por:

$$\text{sat}(f) = \begin{cases} f, & \text{se } -u_{max} \leq f \leq u_{max} \\ u_{max}, & \text{se } f > u_{max} \\ -u_{max}, & \text{se } f < -u_{max}. \end{cases} \quad (5)$$

Com isso, tem-se o seguinte sistema em malha fechada:

$$x[k+1] = Ax[k] + B\text{sat}(KCx[k]) + Ed[k]. \quad (6)$$

Deseja-se projetar um controlador para o sistema acima de modo que a trajetória da variável controlada $y[k]$ respeite as seguintes restrições lineares: $y[k] \in \Omega_y = \{|Qy[k]| \leq \bar{1}\}$, sendo $Q \in \mathbb{R}$ um escalar que define as restrições sobre $y[k]$. A partir do modelo dado pela Eq. (1), estas restrições em $y[k]$ podem ser traduzidas nas seguintes restrições em $x[k]$:

$$x[k] \in \Omega_x = \{|QCx[k]| \leq \bar{1}\}, \quad (7)$$

sendo $\bar{1}$ um vetor de dimensões adequadas com todos os elementos iguais a 1. Tais restrições podem ser satisfeitas se o estado inicial $x[0]$ pertencer a um conjunto positivamente invariante contido em Ω_x .

Definição 1. (Blanchini and Miani, 2015) Um conjunto não vazio e fechado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, contendo a origem, é um conjunto positivamente invariante λ -contrativo em relação ao sistema (6) se, para um dado escalar $\lambda \in [0, 1)$, $x[k+1] \in \lambda\Omega$, $\forall x[k] \in \Omega$.

Observação 1. Se $\lambda = 1$, Ω é dito simplesmente positivamente invariante.

Observação 2. Restrições lineares resultam em conjuntos de restrições poliédricos. Este é o caso dos conjuntos Φ (Eq. (2)), Ω_u (Eq. (3)) e Ω_x (Eq. (7)).

Observação 3. Um conjunto poliédrico convexo pode ser representado na forma:

$$R[F, g] = \{x : Fx \leq g\} = \{x : F_i x \leq g_i, i = 1, 2, \dots, s\} \quad (8)$$

em que F_i denota a i -ésima linha da matriz F e g_i é o i -ésimo componente do vetor g . Um conjunto poliédrico inclui a origem em seu interior se, e somente se, $g_i > 0, \forall i$. Assim, sem perda de generalidade, um conjunto poliédrico contendo a origem pode ser representado da seguinte forma:

$$R[F, \bar{1}] = \{x : Fx \leq \bar{1}\} = \{x : F_i x \leq 1, i = 1, 2, \dots, s\} \quad (9)$$

Observação 4. Neste trabalho trataremos apenas de conjuntos poliédricos simétricos e contendo a origem em seu interior, como é também o caso dos conjuntos Φ (Eq. (2)), Ω_u (Eq. (3)) e Ω_x (Eq. (7)). No entanto, a técnica proposta pode facilmente ser estendida a poliedros não simétricos.

2.2 Modelagem Politópica da Saturação

Devido ao efeito da saturação nos atuadores, o sistema (6) torna-se não-linear, podendo apresentar fenômenos indesejáveis tais como ciclos limite e até instabilidade. Para evitar tais efeitos, é necessário considerar a saturação desde a fase de projeto do controlador. Com esse objetivo, diversos modelos matemáticos vêm sendo propostos para representar a saturação de modo a possibilitar o uso de ferramentas conhecidas de projeto de controladores (Tarbouriech *et al.*, 2011).

Neste trabalho é usado o modelo politópico II de Tarbouriech *et al.* (2011), no qual se escreve a saída da função de saturação (Eq. (5)) como uma combinação convexa do sinal de controle atual com uma variável auxiliar h .

Lema 1. (Tarbouriech *et al.*, 2011) Sejam dois escalares $f \in \mathbb{R}$ e $h_{sat} \in \mathbb{R}$. Se $-u_{max} \leq h_{sat} \leq u_{max}$, então $sat(f) \in Co\{f, h_{sat}\} = \{p : p = \lambda_1 f + \lambda_2 h_{sat}\}$ com $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Define-se, então, o seguinte poliedro:

$$S(H_{sat}, u_{max}) = \{x \in \mathbb{R}^n : -u_{max} \leq H_{sat}x[k] \leq u_{max}\}, \quad (10)$$

em que $H_{sat} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ é uma matriz auxiliar que compõe o modelo de saturação. A partir do Lema 1, visto que $f = Ky[k] = KCx[k]$, então, $\forall x[k] \in S(H_{sat}, u_{max})$, tem-se que $sat(KCx[k]) \in \{p : p = \lambda_1 KCx[k] + \lambda_2 H_{sat}x[k]\}$. Dessa forma, o sistema em malha fechada pode ser representado pelo seguinte modelo politópico:

$$x[k+1] = \lambda_1(x[k])(A + BKC) + \lambda_2(x[k])(A + BH_{sat})x[k] + Ed[k], \quad (11)$$

com $\lambda_1(x[k]) + \lambda_2(x[k]) = 1, 0 \leq \lambda_1(x[k]), \lambda_2(x[k]) \leq 1$.

Por meio desse modelo, é possível usar técnicas conhecidas de análise e projeto de sistemas de controle para modelos politópicos. Em particular, é possível estabelecer condições para a invariância positiva de um poliedro $\Omega = \{x : Lx \leq \bar{1}\}$,

em que, para uma matriz $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\|M\|_\infty = \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^n |M_{ij}|$, conforme consta na Proposição 1.

Proposição 1. O poliedro $\Omega = \{x : Lx \leq \bar{1}\}$ é positivamente invariante com taxa de contração λ ($0 \leq \lambda < 1$), em relação ao sistema (11), se houver matrizes Z, H_k, H_h, H_{sat} e J tais que:

$$\begin{cases} H_k L = L(A + BKC) \\ ZW = LE \\ \|[H_k \ Z]\|_\infty \leq \lambda \\ H_h L = L(A + BH_{sat}) \\ \|[H_h \ Z]\|_\infty \leq \lambda \end{cases} \quad \begin{cases} JL = H_{sat} \\ \|J\|_\infty \leq u_{max} \end{cases} \quad (12)$$

Essa proposição pode ser demonstrada a partir dos resultados de Milani and Carvalho (1995) que trata de invariância de poliedros de um modelo politópico em tempo discreto sem perturbações, e de Milani and Dórea (1996) que trata de sistemas de tempo contínuo sujeitos a perturbações limitadas. O conjunto de equações à esquerda na Eq. (12) implica a invariância positiva de Ω em relação ao modelo politópico da Eq. (11). No entanto, esse modelo só é válido para representar o sistema (6) se a condição (10) for satisfeita, ou seja, se $\Omega \subset S(H_{sat}, u_{max})$. Trata-se de uma condição de inclusão entre poliedros, que pode ser verificada por meio do chamado *Lema de Farkas estendido* (Castelan and Hennet, 1992), cuja aplicação resulta nas condições à direita da Eq. (12).

3. METODOLOGIA

3.1 Modelo da Planta com Controlador PI-D

Inspirado no modelo do controlador utilizado no trabalho de Martins *et al.* (2020), considere um controlador PI-D modificado com sinal de referência passando por um filtro de primeira ordem, conforme a Fig. 1, sendo T_s o período de

amostragem, δ o parâmetro do filtro ($0 \leq \delta \leq 1$), K_p o ganho proporcional, K_i o ganho integral e K_d o ganho derivativo do controlador. Considere também as seguintes transformadas Z: $r[z]$ da referência, $w[z]$ da referência filtrada, $e[z]$ da variável relativa ao erro de rastreamento, $v[z]$ da variável relativa a integral do erro, $p[z]$ da variável relativa a derivada da saída, $f[z]$ da saída do controlador, $u[z]$ do sinal de controle e $y[z]$ da saída do sistema.

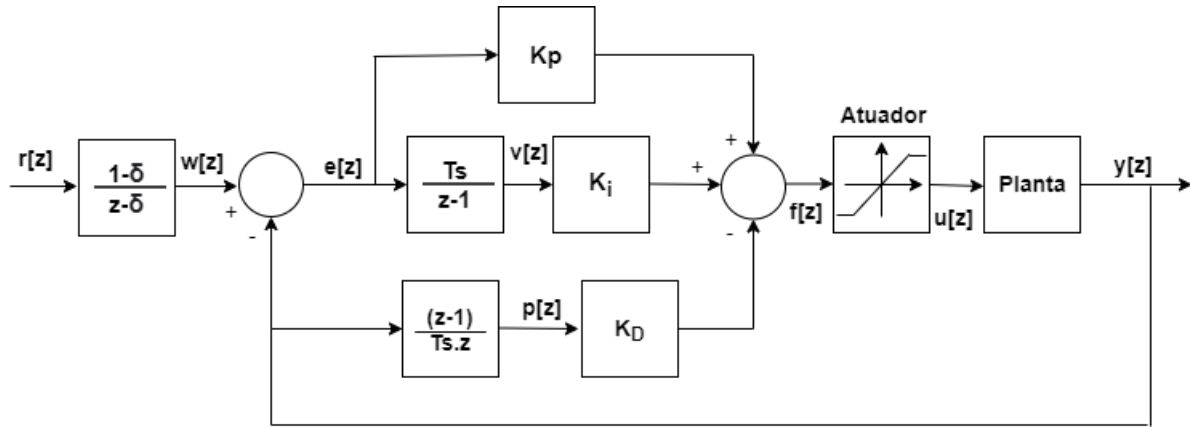


Figura 1: Sistema de malha fechada com controlador PI-D e saturação no atuador.

A técnica descrita a seguir pode ser estendida sem dificuldades à estrutura clássica do controlador PID, que usa a derivada do erro de rastreamento em lugar da derivada da saída. O filtro de primeira ordem na referência tem o objetivo de suavizar o sinal de referência para facilitar a obtenção de poliedros invariantes que forcem o respeito às restrições na variável controlada. Com isso, considere agora a planta do sistema dada pela Eq. (1), com $E = 0$, mais o controlador PI-D com a referência. Analisando o diagrama de blocos correspondente à dinâmica do controlador PI-D, podemos extrair as seguintes equações:

$$f[z] = K_p e[z] + K_i v[z] - K_D p[z] \quad (13)$$

$$v[z] = \left(\frac{T_s}{z-1} \right) e[z] \quad (14)$$

$$p[z] = \frac{1}{T_s} \left(\frac{z-1}{z} \right) y[z] \quad (15)$$

Analisando agora o bloco relativo ao filtro de referência, temos que $w[z] = \left(\frac{1-\delta}{z-\delta} \right) r[z]$. Com isso, aplicando a transformada Z inversa em cada equação e fazendo algumas manipulações, obtemos:

$$f[k] = K_p e[k] + K_i v[k] - K_D p[k] \quad (16)$$

$$v[k+1] = v[k] + T_s e[k] = v[k] + T_s (w[k] - y[k]) = -CT_s x[k] + v[k] + T_s w[k] \quad (17)$$

$$w[k+1] = \delta w[k] + (1-\delta)r[k] \quad (18)$$

Note que, a partir da Eq. (18), se o sistema for estável em malha fechada e a referência $r[k]$ tender a um valor constante r , então $w[k] \rightarrow r[k] = r$ em regime permanente.

De forma separada, detalhando a parte derivativa, temos que:

$$p[k+1] = \frac{1}{T_s} (y[k+1] - y[k]) = \frac{1}{T_s} (Cx[k+1] - Cx[k]) = \frac{1}{T_s} (C(Ax[k] + Bu[k]) - Cx[k]) \quad (19)$$

Finalmente:

$$p[k+1] = \frac{1}{T_s} (CA - C) x[k] + \frac{1}{T_s} CBu[k] \quad (20)$$

Além disso, como $y[k] = w[k] - e[k]$, tem-se que:

$$e[k] = w[k] - Cx[k] \quad (21)$$

Com isso, podemos representar o sistema (referência + controlador PI-D + planta) em espaço de estado aumentado, conforme as Eqs. (22) e (23) abaixo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x[k+1] \\ v[k+1] \\ p[k+1] \\ w[k+1] \end{bmatrix}}_{\bar{x}[k+1]} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -CT_s & 1 & 0 & T_s \\ \frac{1}{T_s}(CA-C) & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & \delta \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x[k] \\ v[k] \\ p[k] \\ w[k] \end{bmatrix}}_{\bar{x}[k]} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \\ \frac{1}{T_s}CB \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{B}} u[k] + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \\ (1-\delta)r \end{bmatrix}}_{\bar{E}} \quad (22)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} e[k] \\ v[k] \\ -p[k] \end{bmatrix}}_{\bar{y}[k]} = \underbrace{\begin{bmatrix} -C & 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} x[k] \\ v[k] \\ p[k] \\ w[k] \end{bmatrix}}_{\bar{x}[k]} \quad (23)$$

Reescrevendo, temos que:

$$\begin{cases} \bar{x}[k+1] = \bar{A}\bar{x}[k] + \bar{B}u[k] + \bar{E}r[k] \\ \bar{y}[k] = \bar{C}\bar{x}[k] \end{cases} \quad (24)$$

com a lei de controle dada por:

$$u[k] = \text{sat}(f[k]) = \text{sat}(K_p e[k] + K_i v[k] - K_D p[k]) = \text{sat}\left(\underbrace{\begin{bmatrix} K_p & K_i & K_D \end{bmatrix}}_{\bar{K}} \begin{bmatrix} e[k] \\ v[k] \\ -p[k] \end{bmatrix}\right) \quad (25)$$

e o modelo politópico:

$$\bar{x}[k+1] = \lambda_1 (\bar{A} + \bar{B}\bar{K}\bar{C}) \bar{x}[k] + \lambda_2 (\bar{A} + \bar{B}H_{sat}) \bar{x}[k] + \bar{E}r[k] \quad (26)$$

Nota-se que, na formulação proposta, por comparação ao modelo da Eq. (1), o sinal de referência $r[k]$ assume artificialmente o papel de uma perturbação. Para obter condições de invariância ao sistema aumentado, é necessário impor restrições à $r[k]$, conforme consta na Eq. (27), com $\bar{W} \in \mathbb{R}$ (escalar que define a restrição na referência):

$$r[k] \in \bar{\Phi} = \{r[k] : \bar{W}r[k] \leq \bar{1}\} \quad (27)$$

3.2 Invariância e Restrições

A partir da formulação acima, é possível aplicar a Proposição 1 para obter condições para a invariância positiva de um poliedro $\bar{\Omega}_s = \{\bar{x} : \bar{L}\bar{x} \leq \bar{1}\}$ definido no espaço de estado aumentado, chegando assim na Proposição 2.

Proposição 2. *O poliedro $\bar{\Omega}_s = \{\bar{x} : \bar{L}\bar{x} \leq \bar{1}\}$ é positivamente invariante com taxa de contração λ ($0 \leq \lambda < 1$), em relação ao sistema (26), se houver matrizes $\bar{Z}$, $\bar{H}_k$, $\bar{H}_h$, $\bar{H}_{sat}$ e $\bar{J}$ tais que:*

$$\begin{cases} \bar{H}_k \bar{L} = \bar{L} (\bar{A} + \bar{B}\bar{K}\bar{C}) \\ \bar{Z}\bar{W} = \bar{L}\bar{E} \\ ||[\bar{H}_k \ \bar{Z}]||_\infty \leq \lambda \\ \bar{H}_h \bar{L} = \bar{L} (\bar{A} + \bar{B}\bar{H}_{sat}) \\ ||[\bar{H}_h \ \bar{Z}]||_\infty \leq \lambda \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{J}\bar{L} = \bar{H}_{sat} \\ ||\bar{J}||_\infty \leq u_{max} \end{cases} \quad (28)$$

Tais condições garantem a invariância positiva de $\bar{\Omega}_s$, ou seja, que $\bar{x}[k] \in \bar{\Omega}_s \ \forall k = 0, 1, \dots$ se $\bar{x}[0] \in \bar{\Omega}_s$. Consideremos agora as restrições na saída controlada representada pela Eq. (7). O primeiro passo é estendê-la ao sistema aumentado da Eq. (24), no qual elas são representadas pelo seguinte poliedro, consistente com a Eq. (7):

$$\Omega_{\bar{x}} = \{|\bar{Q}\bar{x}| \leq \bar{1}\} \quad (29)$$

com $\bar{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (matriz de restrição de estado). Essas restrições são respeitadas se o poliedro invariante $\bar{\Omega}_s$ estiver contido em $\Omega_{\bar{x}}$. De acordo com o lema de Farkas estendido, $\bar{\Omega}_s \subset \Omega_{\bar{x}}$ se, e somente se, existe uma matriz $\bar{H}_s$ tal que:

$$\begin{cases} \bar{H}_s \bar{L} = \bar{Q} \\ ||\bar{H}_s||_\infty \leq 1 \end{cases} \quad (30)$$

3.3 Projeto via Otimização

Como exposto acima, se existirem ganhos de um controlador PI-D e um poliedro positivamente invariante $\bar{\Omega}_s$ que satisfaçam às condições (28) e (30), então este controlador garante o respeito às restrições na variável controlada, mesmo com a saturação no atuador. As condições (28) e (30) têm a forma de relações algébricas entre matrizes que são lineares ou *bilineares* (envolvendo o produto entre duas variáveis matriciais), que podem ser inseridas como restrições em um problema de otimização.

Neste trabalho, é usada a abordagem de otimização bilinear proposta por Brião *et al.* (2018, 2021), na qual poliedros positivamente invariantes e controladores por realimentação de estado e de saída são calculados para resolver problemas de regulação sob restrições nos estados e no controle, mas evitando a saturação dos atuadores. O modelo politópico de saturação aqui adotado foi usado para analisar a invariância positiva dos conjuntos poliédricos em tempo discreto no

contexto do operador delta (Pedrosa, 2018). Essas abordagens foram adaptadas à estrutura proposta para o controlador PI-D.

A estratégia de otimização visa garantir que a resposta do sistema seja a mais rápida possível. O parâmetro δ do filtro de referência regula a velocidade de mudança do *set-point*, podendo variar dentro do intervalo $[0, 1]$, sendo a mudança mais rápida com δ próximo de 0 e mais lenta com δ próximo de 1. Por outro lado, o aumento do ganho K_i da ação integral tende a diminuir o erro em problemas de rejeição de perturbações (Åström and Hägglund, 1995). Dessa forma, a função objetivo do problema de otimização pode ser escolhida de modo a ponderar a velocidade de resposta do sistema em malha fechada tanto para o problema de regulação, quanto para o problema de seguimento de referência.

Assim, é proposto o seguinte problema de programação não-linear para o cálculo dos ganhos do controlador PI-D:

$$\min_{\Gamma} \left(w_1 \delta + w_2 \frac{1}{K_i} \right), \quad \text{sujeito a: } \begin{cases} (28), (30) \\ f_l(\Gamma) \leq \varphi_l, \quad l = 1, \dots, \bar{l}, \end{cases} \quad (31)$$

sendo $\Gamma = \{\bar{H}_k, \bar{H}_h, \bar{H}_s, \bar{H}_{sat}, \bar{J}, \bar{Z}, \bar{L}, \bar{K}\}$ o conjunto de variáveis do problema de otimização e w_1 e w_2 fatores de ponderação escolhidos pelo projetista. As restrições adicionais $f_l(\cdot) \leq \varphi_l$ correspondem aos limites superiores e inferiores das variáveis do problema de otimização (Brião *et al.*, 2021).

4. IMPLEMENTAÇÕES E SIMULAÇÕES

Nesta seção, apresentamos a aplicação da técnica de otimização proposta a partir de alguns testes. Para a resolução do problema de otimização descrito na seção anterior, a exemplo de Brião *et al.* (2021), foi usado o solucionador gratuito de problemas de otimização numérica KNITRO, disponível *online* no servidor NEOS (Gropp and Moré, 1997), com sua configuração padrão juntamente com a opção multi-algoritmo.

4.1 Motor CC

Consideramos o modelo de um motor CC controlado por corrente de armadura com campo independente, conforme ilustrado na Fig. 2, utilizado no trabalho de Dantas *et al.* (2018).

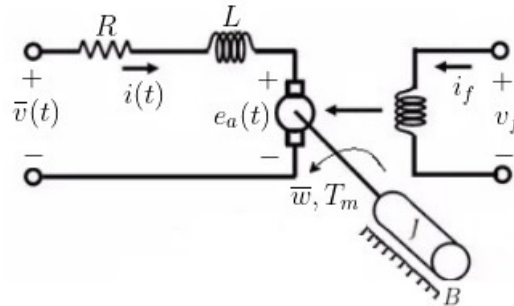


Figura 2: Motor CC com campo de enrolamento separado com corrente constante (i_f).

Sua função de transferência é dada por:

$$\frac{\bar{\Omega}(s)}{\bar{V}(s)} = \frac{K_a}{(Js + B)(Ls + R) + K_a K_b} \quad (32)$$

em que:

- $\bar{\Omega}(s)$ é a transformada de Laplace da velocidade angular do motor $\bar{\omega}(t)$;
- $\bar{V}(s)$ é a transformada de Laplace da tensão $\bar{v}(t)$ aplicada na armadura;
- K_a é a constante de torque;
- K_b é a constante de velocidade;
- J é o momento de inércia do rotor;
- B é o coeficiente de atrito do rotor com seu mancal;
- L é a indutância da armadura;
- R é a resistência da armadura.

Tabela 1: **Parâmetros do Motor.**

R	L	K_b	K_a	J	B
0,1 Ω	0,005 H	0,004 V.s/rad	0,0036 N.m/A	0,1 N.m ²	0,05 N.m.s/rad

Os parâmetros de um motor adequado para uso em carros elétricos são apresentados na Tab. 1 (Dantas *et al.*, 2018), o que resulta na seguinte função de transferência: $\frac{\Omega(s)}{V(s)} = G(s) = \frac{7,2}{s^2 + 20,5s + 10}$.

A velocidade angular do motor (saída do sistema) deve variar no intervalo $\pm 34,56$ (rad/s) e a tensão de armadura (sinal de controle do sistema) no intervalo de ± 48 V. Com isso, tem-se um motor que permite o movimento em dois sentidos, com tensões e velocidades positivas e negativas consideradas nas restrições. Os testes foram executados adotando-se para os fatores de ponderação os valores $w_1 = w_2 = 1$. O sistema foi discretizado com período de amostragem $T_s = 0,2$ s e um modelo de estado na forma canônica observável foi obtido para compor o problema de otimização. Com isso, obtemos a seguinte representação no espaço de estado aumentado:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \\ v[k+1] \\ p[k+1] \\ w[k+1] \end{bmatrix}}_{\bar{x}[k+1]} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -0,0166 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0,9233 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,2 & 1 & 0 & 0,2 \\ 5 & -0,3836 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ v[k] \\ p[k] \\ w[k] \end{bmatrix}}_{\bar{x}[k]} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0,0151 \\ 0,0522 \\ 0 \\ 0,2608 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{B}} u[k] + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (1-\delta) \end{bmatrix}}_{\bar{E}} r[k] \quad (33)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} e[k] \\ v[k] \\ -p[k] \end{bmatrix}}_{\bar{y}[k]} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ v[k] \\ p[k] \\ w[k] \end{bmatrix}}_{\bar{x}[k]} \quad (34)$$

Ao longo dos testes, analisam-se variações nos limites das restrições dos parâmetros integral do erro ($v[z]$) e da derivada da saída ($p[z]$) conforme realizado por Dantas *et al.* (2018). Note que, do ponto de vista do problema de controle, não é necessário, em princípio, impor restrições na integral do erro e na derivada da saída. No entanto, como já notado por Dantas *et al.* (2018), a imposição dessas restrições tem implicações nos resultados do problema de otimização e, consequentemente, na sintonia do controlador, como será exposto na sequência.

4.1.1 Teste 1: Efeito da alteração dos limites de $v[z]$

Tabela 2: **Variando os limites da integral do erro.**

Simulações	λ	Limites de ($v[z]$)	Limites de ($p[z]$)	δ	K_p	K_i	K_d
1	0,999	$\pm 34,56$	$\pm 172,80$	0,9049	17,8964	33,2020	1,3469
2	0,999	$\pm 172,80$	$\pm 172,80$	0,8987	21,4599	30,2540	0,4524
3	0,999	± 1728	$\pm 172,80$	0,8995	19,4126	28,3637	0,4863

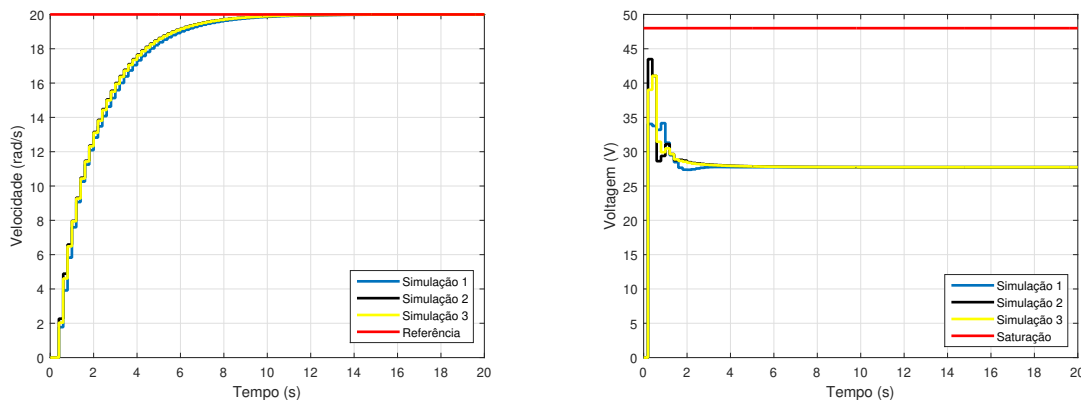


Figura 3: **Saídas (gráfico à esquerda) e Ações de Controle (gráfico à direita) do sistema para condições da Tabela 2.**

Os resultados obtidos nesse teste, mostrados na Tab. 2 e na Fig. 3, indicam um discreto efeito benéfico na resposta do sistema ao se restringir menos fortemente a integral do erro. Isso fez com que o sinal de controle pudesse assumir valores mais altos no transitório, levando a uma resposta mais rápida (menores valores do parâmetro δ do filtro de referência).

4.1.2 Teste 2: Efeito da alteração dos limites de $p[z]$

Tabela 3: Variando os limites da derivada da saída.

Simulações	λ	Limites de $(v[z])$	Limites de $(p[z])$	δ	K_p	K_i	K_d
1	0,999	$\pm 172,80$	$\pm 17,28$	0,9440	21,9600	54,1626	1,6718
2	0,999	$\pm 172,80$	$\pm 172,80$	0,8987	21,4599	30,2540	0,4524
3	0,999	$\pm 172,80$	$\pm 1728,0$	0,8985	21,1580	29,9743	0,4352

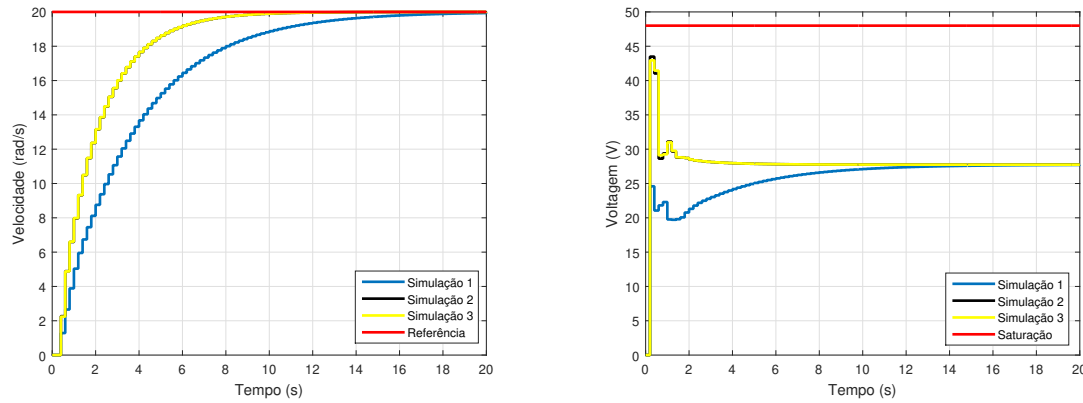


Figura 4: Saídas (gráfico à esquerda) e Ações de Controle (gráfico à direita) do sistema para condições da Tabela 3.

A partir dos resultados expostos na Tab. 3 e nos gráficos da Fig. 4, verifica-se que limites mais folgados na derivada da saída levaram também a uma resposta mais rápida, refletida pela diminuição do valor de δ entre a Simulação 1 e as seguinte. Verifica-se também que o filtro de referência tem o efeito de suavizar a resposta, impedindo que o sinal de controle atinja a saturação. Percebe-se também que o sistema não apresenta reposta inversa, característica de sistemas de fase não mínima, como ocorreu no trabalho de Dantas *et al.* (2018).

4.1.3 Teste 3: Efeito da alteração dos limites de $v[z]$ com $-36V \leq u[k] \leq 36V$

Tabela 4: Variando os limites da integral do erro com $-36V \leq u[k] \leq 36V$.

Simulações	λ	Limites de $(v[z])$	Limites de $(p[z])$	δ	K_p	K_i	K_d
1	0,999	$\pm 34,56$	$\pm 172,80$	0,9093	17,3689	23,0154	1,0701
2	0,999	$\pm 172,80$	$\pm 172,80$	0,9066	19,0280	18,3082	0,3121
3	0,999	± 1728	$\pm 172,80$	0,9049	18,3544	19,1523	0,5009

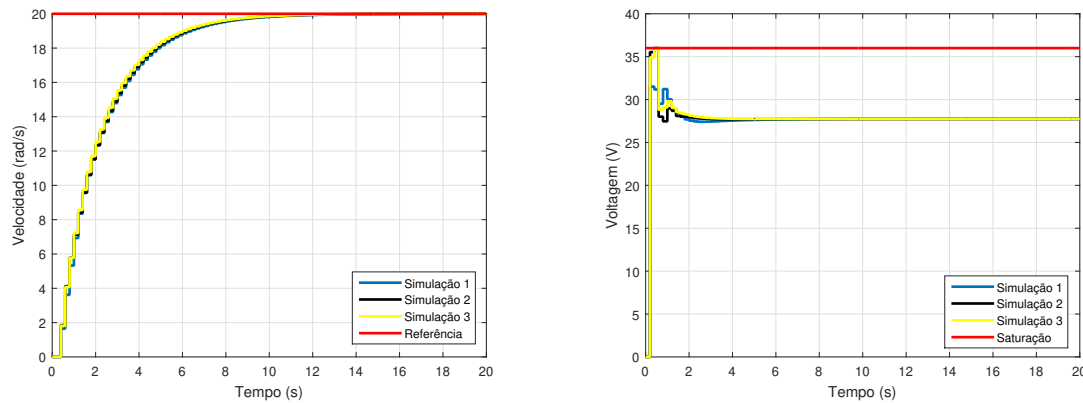


Figura 5: Saídas (gráfico à esquerda) e Ações de Controle (gráfico à direita) do sistema para condições da Tabela 4.

Nesse teste, os limites da saturação são reduzidos. Verifica-se na Tab. 4 e na Fig. 5 que com restrições mais folgadas em $v[z]$ o sinal de controle saturou, mas sem alterar significativamente a resposta do sistema.

4.1.4 Teste 4: Efeito da alteração dos limites de $p[z]$ com $-36V \leq u[k] \leq 36V$

Tabela 5: Variando os limites da derivada da saída com $-36V \leq u[k] \leq 36V$.

Simulações	λ	Limites de $(v[z])$	Limites de $(p[z])$	δ	K_p	K_i	K_d
1	0,999	$\pm 172,80$	$\pm 17,28$	0,9461	18,0669	32,4118	1,2720
2	0,999	$\pm 172,80$	$\pm 172,80$	0,9080	21,3823	17,4071	0,1074
3	0,999	$\pm 172,80$	$\pm 1728,0$	0,0000	22,3779	10,9965	-0,0269

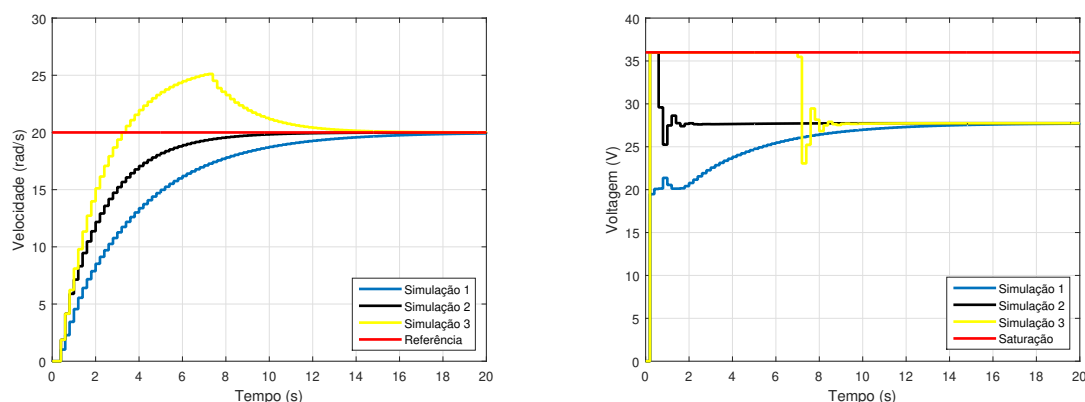


Figura 6: Saídas (gráfico à esquerda) e Ações de Controle (gráfico à direita) do sistema para condições da Tabela 5.

Neste caso, pode ser visto na Tab. 5 e nos gráficos da Fig. 6 que o limite excessivamente folgado para a ação derivativa resultou em um sinal de controle saturado por um tempo excessivo, provocando o fenômeno conhecido como *windup* e um *overshoot* muito grande na resposta. Mesmo assim, as restrições impostas para a variável controlada não foram violadas.

Conclui-se, portanto, que a definição das restrições nas ações integral e derivativa é fundamental para a obtenção de uma sintonia adequada. Ressalte-se, no entanto, que mesmo nas situações em que a resposta não se mostrou adequada (com *overshoot* alto ou tempo de assentamento excessivo), as restrições na variável controlada foram sempre respeitadas mesmo com a ocorrência de saturação no atuador, o que é garantido pela teoria que suporta a técnica proposta.

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentado um método de sintonia de controladores PID baseado em otimização para sistemas lineares de tempo discreto sob restrições na variável de saída e saturação do atuador. A partir de um modelo de estado do sistema com o controlador e da modelagem politópica da saturação, foram derivadas condições para que um poliedro contido no conjunto de restrições seja positivamente invariante em relação ao sistema em malha fechada. Tais condições foram usadas na formulação de um problema de otimização não-linear cuja solução fornece os ganhos do controlador e um poliedro invariante que garante o respeito às restrições. O uso de um filtro para a referência permite a obtenção de poliedros maiores junto com a otimização do tempo de resposta do sistema. A técnica proposta foi ilustrada por meio de simulações numéricas em cima de análises comparativas usando o modelo de um motor CC (Dantas *et al.*, 2018). A partir dos resultados das simulações, analisou-se a relação entre parâmetros do problema de otimização e o desempenho dos controladores projetados. Verificou-se também que um ajuste adequado dos parâmetros possibilita obter uma sintonia que respeite às restrições e um compromisso entre uma resposta rápida e um conjunto de condições iniciais admissíveis de tamanho aceitável. Em trabalhos futuros, pretende-se estender a técnica proposta a sistemas com múltiplas entradas e saídas, bem como ao projeto de controladores PID para sistemas não-lineares representados por modelos Fuzzy Takagi-Sugeno (Dórea *et al.*, 2020).

6. AGRADECIMENTOS

Este presente trabalho foi realizado com apoio parcial da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) - Código de Financiamento 001 e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) - Processo no. # 309862/2019-1.

7. REFERÊNCIAS

- Åström, K. and Hägglund, T., 1995. *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*. ISA - The Instrumentation, Systems and Automation Society. ISBN 1-55617-516-7.
- Åström, K.J. and Hägglund, T., 2001. "The future of pid control". *Control engineering practice*, Vol. 9, No. 11, pp. 1163–1175.

- Bak, M., 2000. *Control of systems with constraints*. Ph.D. thesis, Technical University of Denmark, Department of Automation.
- Blanchini, F. and Miani, S., 2015. "Set-theoretic estimation". In *Set-Theoretic Methods in Control*, Springer, pp. 527–551.
- Brião, S.L., Castelan, E.B., Camponogara, E. and Ernesto, J.G., 2021. "Output feedback design for discrete-time constrained systems subject to persistent disturbances via bilinear programming". *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 358, No. 18, pp. 9741–9770. doi:https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2021.10.024.
- Brião, S.L., Pedrosa, M.V., Castelan, E.B., Camponogara, E. and de Assis, L.S., 2018. "Explicit computation of stabilizing feedback control gains using polyhedral lyapunov functions". In *2018 IEEE International Conference on Automation/XXIII Congress of the Chilean Association of Automatic Control (ICA-ACCA)*. IEEE, pp. 1–6.
- Castelan, E.B. and Hennet, J.C., 1992. "Eigenstructure assignment for state constrained linear continuous time systems". *Automatica*, Vol. 28, No. 3, pp. 605–611.
- Dantas, A.D.O.d.S., Dantas, A.F.O.d.A., Campos, J.T.L., de Almeida Neto, D.L. and Dórea, C.E.T., 2018. "Pid control for electric vehicles subject to control and speed signal constraints". *Journal of Control Science and Engineering*, Vol. 2018.
- dos Santos, G.A.F., Castelan, E.B. and Ernesto, J.G., 2021. "Pi-controller design for constrained linear systems using positive invariance and bilinear programming". In *2021 IEEE International Conference on Automation/XXIV Congress of the Chilean Association of Automatic Control (ICA-ACCA)*. pp. 1–7.
- Dórea, C.E., Castelan, E.B. and Ernesto, J.G., 2020. "Robust positively invariant polyhedral sets and constrained control using fuzzy t-s models: a bilinear optimization design strategy". *IFAC-PapersOnLine*, Vol. 53, No. 2, pp. 8013–8018. 21st IFAC World Congress.
- Gropp, W. and Moré, J., 1997. "Optimization environments and the neos server. approximation theory and optimization, md buhmann and a. iserles, eds".
- Martins, J.K., Araújo, F.M. and Dórea, C.E., 2020. "Um método baseado em otimização para sintonia de controladores pi para sistemas sujeitos a restrições". In *Congresso Brasileiro de Automática-CBA*. Vol. 2.
- Milani, B.E. and Carvalho, A.N., 1995. "Robust linear regulator design for discrete-time systems under polyhedral constraints". *Automatica*, Vol. 31, No. 10, pp. 1489–1493.
- Milani, B.E. and Dórea, C.E., 1996. "On invariant polyhedra of continuous-time systems subject to additive disturbances". *Automatica*, Vol. 32, No. 5, pp. 785–789.
- Pedrosa, M., 2018. *Invariância Positiva de Domínios Polédricos para Sistemas Lineares na Perspectiva do Operador Delta*. Master's thesis, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC).
- Tarbouriech, S., Garcia, G., da Silva Jr, J.M.G. and Queinnec, I., 2011. *Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators*. Springer Science & Business Media.
- Tchamna, R. and Lee, M., 2018. "Analytical design of an industrial two-term controller for optimal regulatory control of open-loop unstable processes under operational constraints". *ISA transactions*, Vol. 72, pp. 66–76.
- Ziegler, J.G., Nichols, N.B. et al., 1942. "Optimum settings for automatic controllers". *trans. ASME*, Vol. 64, No. 11.

8. RESPONSABILIDADE AUTORAL

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho.

AN OPTIMIZATION-BASED METHOD FOR TUNING PID CONTROLLERS FOR CONSTRAINED SYSTEMS

Fábio Henrique de Carvalho Ferraz, fabioferraz88@gmail.com¹

José Kleiton Ewerton da Costa Martins, kleitonmartins@dca.ufrn.br¹

Carlos Eduardo Trabuco Dorea, cetdorea@dca.ufrn.br¹

¹Department of Computer Engineering and Automation, Federal University of Rio Grande do Norte, UFRN-CT-DCA 59078-970, Natal-RN, Brazil

Abstract: In this paper we propose a method based on optimization for tuning PID controllers for linear discrete-time systems subject to constraints on the output variable and actuator saturation. Starting from a polytopic model of saturation, conditions are presented such that a polyhedron contained in the set of constraints is positively invariant with respect to a closed-loop system with a PID controller subject to saturation. Such conditions are used in the formulation of a nonlinear optimization problem, whose solution provides the parameters of the controller that satisfies the constraints, ensures local closed-loop stability and optimizes the performance of the closed-loop system. The efficiency of the method is analysed from simulation results over the model of a CC motor used in electrical vehicles.

Keywords: PID Controller, Actuator Saturation, Systems with Constraints, Invariant Sets, Optimization