

APLICAÇÃO DA TEORIA DAS VIBRAÇÕES MECÂNICAS NO CÁLCULO DAS TENSÕES INDUZIDAS NA ARMADURA EM UMA COLUNA ESBELTA DE CONCRETO ARMADO

Kaique Moreira Matos Magalhães, kaiquemagalhaes@usp.br¹

Alexandre de Macêdo Wahrhaftig, alixa@ufba.br²

Reyolando Manoel Lopes Rebello da Fonseca Brasil, reyolando.brasil@ufabc.br³

¹Universidade de São Paulo (USP), Av. Prof. Almeida Prado, trav.2, 83, Cidade Universitária, 05508-900, São Paulo, Brasil

²Universidade Federal da Bahia (UFBA), Rua Aristides Novis, 02, 5º andar, Federação, 40210-630, Salvador, Brasil

³Universidade Federal do ABC (UFABC), Rua Arcturus, 03, Jardim Antares, São Bernardo do Campo, 09606-070, São Paulo, Brasil

Resumo: Este artigo apresenta uma aplicação matemática, baseada nos conceitos das vibrações mecânicas, para avaliação das tensões induzidas nas armaduras de uma coluna esbelta de concreto armado devido ao comportamento diferido no tempo do concreto. Tal análise se dará na condição próxima à eminência do colapso por bifurcação do equilíbrio. Para tal, será determinado o valor da carga crítica da estrutura, definida com base na nulidade da rigidez estrutural para diferentes períodos. Foi incorporado na formulação analítica a parcela correspondente à fluência e retração do concreto de acordo com os procedimentos descritos pela norma americana ACI 209R (2008). Ao fim, foi possível avaliar as máximas tensões induzidas nas armaduras, que para o caso investigado neste estudo não apresentou risco ao escoamento do material, sendo o valor máximo correspondente a 1,15% da tensão de escoamento do aço. Para 7500 dias, período total investigado, constatou-se que a estrutura perdeu aproximadamente 40% da sua capacidade de carga, uma vez que para o instante que marca o início da contagem do tempo, a capacidade da coluna era de 293,88 kN e após decorridos 7500 dias passou a ser 176,65 kN.

Palavras-chave: vibrações mecânicas, tensões induzidas, colunas de concreto armado, estruturas esbeltas

1. INTRODUÇÃO

Uma coluna pode ser definida como um elemento estrutural contínuo, normalmente submetido ao esforço de compressão axial, cujas vibrações mecânicas podem ser determinadas por Equações Diferenciais Parciais (EDP) para as quais soluções analíticas exatas não podem ser determinadas (Awrejcewicz *et al.* 2015). Considerando esse aspecto, a teoria das vibrações mecânicas pode ser adotada para avaliação do colapso das colunas de concreto armado através da determinação da nulidade de sua frequência de vibração, conforme os estudos realizados por Wahrhaftig (2019). Vale a pena observar que em se tratando de colunas com elevado índice de esbeltez, seu colapso acontece pela perda da estabilidade por bifurcação do equilíbrio, antes mesmo da seção atingir sua resistência última, o que torna a carga crítica de flambagem um importante parâmetro no projeto das colunas esbeltas.

No que tange à verificação da integridade de colunas esbeltas, projetadas em concreto armado, observa-se uma relação direta entre o comportamento não-linear do compósito e sua capacidade de carregamento (Fenollosa *et al.* (2014). Nesse aspecto, Weng *et al.* (2019) realizaram investigações onde foram propostos métodos alternativos, ainda simplificados, para a identificação do instante da flambagem de colunas de concreto armado. Embora o estudo da flambagem tenha se iniciado na Estática, na Mecânica Racional, esse é um fenômeno de características eminentemente dinâmicas, pois envolve o equilíbrio dos sistemas mecânicos. Maiores detalhes sobre a estabilidade de colunas esbeltas, em concreto armado, podem ser encontrados nos trabalhos desenvolvidos por Sharma *et al.* (2017a e 2017b).

Considerando que as estruturas fabricadas em concreto armado são elementos formados a partir da utilização em conjunto de dois materiais, o concreto (um material de comportamento viscoelástico), e o aço (de comportamento elastoplástico), tornam-se complexas as investigações para determinação de formulações analítico-matemáticas para prever seu comportamento, seja no caminho da estática ou da dinâmica. Sabe-se que a partir da hipótese de aderência perfeita entre os dois materiais, aço e concreto, pode-se aplicar equações de compatibilidades de deslocamentos a fim de se determinar importantes parâmetros de dimensionamento, como as deformações e tensões finais em cada material. Neste sentido, esse estudo investigou uma coluna esbelta, não prismática, submetida a um carregamento externo que variou de zero até a carga crítica de flambagem. Um modelo matemático baseado no conceito das vibrações mecânicas é proposto para a definição do limite de carregamento vertical do sistema. Ao fim, determinou-se as tensões induzidas no aço devido ao comportamento reológico do concreto, na iminência do colapso da estrutura, com o intuito de avaliar a condição de

escoamento do material. As propriedades reológicas do concreto foram incorporadas na análise através dos procedimentos previstos pela norma americana para o dimensionamento das estruturas de concreto armado, ACI 209R (2008).

2. ESTABILIDADE DE COLUNAS ESBELTAS POR VIA DINÂMICA

A formulação matemática utilizada para a determinação da carga crítica de flambagem compreende as não linearidades, material e geométrica, do sistema estrutural, incluindo a fluência e a fissuração do concreto, através do método de Rayleigh. Para tanto, seja considerado o modelo da Figura 1, que representa uma coluna engastada na base e livre na extremidade superior, para o qual a função de forma, $\varphi(x)$, da Equação (1), é utilizada para descrever seu primeiro modo de vibração e de flambagem.

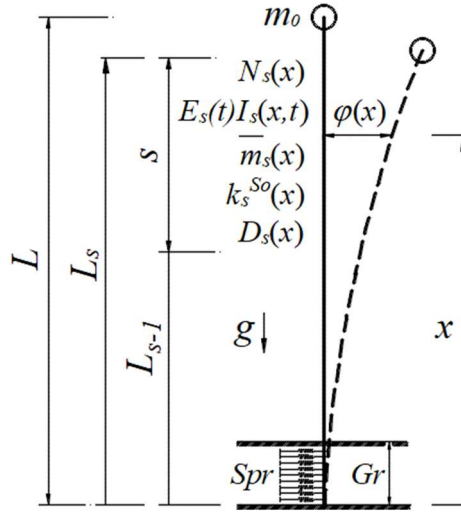


Figura 1. Modelo matemático

$$\varphi(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \quad (1)$$

Os parâmetros presentes na Figura 1 são: a variável geométrica independente do problema, x ; a aceleração da gravidade g ; a massa concentrada na extremidade livre, m_0 ; e o comprimento total da coluna, L . Em relação a um determinado segmento s , L_s , L_{s-1} , N_s , $E_s(t)$, $I_s(x,t)$, $m_s(x)$, $D_s(x)$ e $K_s^{So}(x)$ dizem respeito aos limites superior e inferior do intervalo, à força axial, ao módulo de elasticidade/viscoelasticidade do concreto, à inércia da seção transversal, à massa por unidade de comprimento, ao diâmetro externo da seção, e à participação do solo, cuja representação está associada a molas de translação, Spr , distribuídas na parte enterrada, Gr , da coluna.

Aplicando o princípio dos trabalhos virtuais e o da conservação da energia, a parcela da rigidez flexional é dada por:

$$K_0(t) = \sum_{s=1}^n \int_{L_{s-1}}^{L_s} E_s(t) \cdot I_s(x,t) \cdot \left(\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \right)^2 dx, \quad (2)$$

onde $E_s(t)$ representa o módulo de deformação do concreto no segmento s , que pode ser ou não viscoelástico. Se for o caso, dependerá do tempo, sendo definido conforme as recomendações do ACI 209R (2008), na forma de:

$$E_s(t) = \frac{1}{\frac{1}{E_{mct0}} + \frac{\phi(t, t_0)}{E_{mct0}}}, \quad (3)$$

onde E_{mct0} é o módulo elasticidade do concreto no instante inicial do carregamento e $\phi(t, t_0)$ o coeficiente final de fluência. A parcela da rigidez geométrica é determinada por:

$$K_g(m_0) = \sum_{s=1}^n \int_{L_{s-1}}^{L_s} \left[N_0(m_0) + \sum_{s+1}^n N_{s+1} + \bar{m}_s(x) \cdot (L_s - x) g \right] \left(\frac{d\varphi(x)}{dx} \right)^2 dx, \quad (4)$$

sendo

$$N_0(m_0) = m_0 \cdot g, e \quad (5)$$

$$N_s = \int_{L_{s-1}}^{L_s} \bar{m}_s(x) \cdot g dx, \quad (6)$$

com $\bar{m}_s(x)$ representando a massa distribuída no segmento s , que leva em conta o peso próprio da coluna e o de massas distribuídas adicionadas ao elemento estrutural. A parcela da rigidez devida ao solo é dada por:

$$K_{So} = \sum_{s=1}^n \int_{L_{s-1}}^{L_s} D_s(x) \cdot S_s^{sp}(x) (\varphi(x))^2 dx, \quad (7)$$

onde, $D_s(x)$ é a dimensão externa da fundação e S_s^{sp} o parâmetro relativo ao solo. Portanto, a rigidez total da coluna é:

$$K(m_0, t) = K_0(t) - K_g(m_0) + K_{So}, \quad (8)$$

considerando a força de compressão positiva. A massa generalizada do sistema pode ser determinada por:

$$M(m_0) = m_0 + \sum_{s=1}^n \int_{L_{s-1}}^{L_s} \bar{m}_s(x) \cdot (\varphi(x))^2 dx. \quad (9)$$

Uma vez obtidas a rigidez e a massa generalizadas do sistema, a frequência estrutural pode ser calculada por:

$$\omega^2(m_0, t) = \frac{K(m_0, t)}{M(m_0)}. \quad (10)$$

Levando em consideração as equações anteriores e assumindo a massa concentrada como a variável independente do problema, uma vez definido o instante de interesse, a carga crítica de flambagem N_{cr} pode ser determinada usando o conceito matemático presente na Equação (11), que define a perda de equilíbrio, ou a capacidade de carregamento vertical da coluna, para o momento em que a estrutura perde sua rigidez.

$$N_{cr}(t) \Rightarrow K(m_0, t) = 0. \quad (11)$$

3. DETERMINAÇÃO DAS TENSÕES INDUZIDAS NA ARMADURA

Para determinar as tensões transferidas para a armadura devido à fluência do concreto, um problema prático foi selecionado para estudo. A estrutura analisada é um poste real, extremamente esbelto, de concreto armado, tendo 46 m de altura, incluindo a superestrutura de 40 m, com seção circular vazada e a fundação com 6 m de profundidade, do tipo tubulão. As dimensões, alturas e o arranjo estrutural são apresentados na Figura 2, (a) e (b), onde g é a aceleração gravitacional; $S1, S2, S3, S4$, e $S5$ são as seções transversais de 1 a 5; D e th indicam o diâmetro externo e a espessura da parede, respectivamente; d_b e n_b representam o diâmetro e o número de barras da armadura; c' é o cobrimento do concreto nas respectivas seções transversais e “ Var ” indica seção variável no segmento. Na geração dos resultados, todos os aspectos relacionados à geometria da estrutura, condições de carregamento e as propriedades dos materiais foram incorporadas na formulação apresentada no item precedente. A Tabela 1 e a Tabela 2 apresentam as dimensões e seções transversais e as massas e densidades dos materiais, respectivamente.

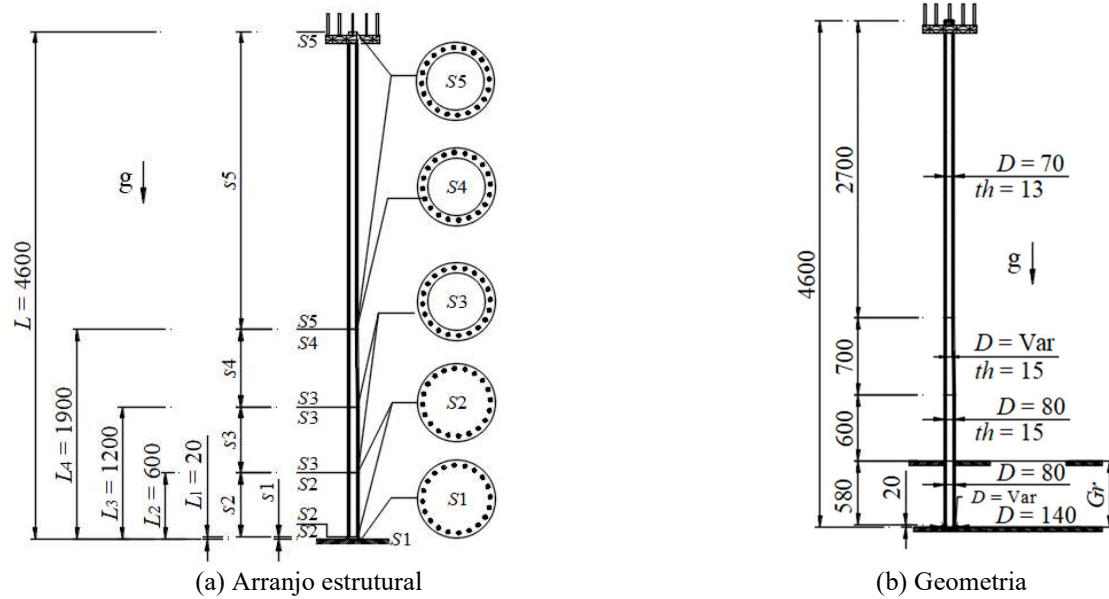


Figura 2. Estrutura investigada

Tabela 1. Dimensões e seções transversais

Comprimento L_{s-1}/L_s (mm)	Seção Transversal	Parâmetro				
		D (mm)	th (mm)	d_b (mm)	n_b (unit)	c' (mm)
0/0	$S1$	1400	-	12,5	20	25
200/6000	$S2$	800	-	12,5	20	25
6000/12000	$S3$	800	150	12,5	20	25
19000/19000	$S4$	700	130	12,5	20	25
19000/46000	$S5$	700	130	12,5	20	25

Tabela 2. Massas e Densidades

Dispositivos	Comprimentos	Densidades/Massas
Fundação	0 m até 6 m	2500 kg/m ³
Superestrutura	6 m até 46 m	2600 kg/m ³
Massa distribuída	6 m até 46 m	40 kg/m
Massa concentrada	46 m	A ser determinada

Os cálculos para a determinação das tensões axiais na armadura foram realizados considerando-se o ganho de resistência do concreto e a homogeneização das seções transversais ao longo do tempo. Assumindo a hipótese de aderência perfeita entre o concreto e o aço. A determinação das tensões induzidas na armadura é feita por:

$$\sigma_s^{st}(m_0, t) = \varepsilon_s^c(m_0, t) \cdot E^{st}, \quad (12)$$

em que $\varepsilon_s^c(m_0, t)$ é a deformação total do concreto e E^{st} o módulo de elasticidade do aço. Assim, a tensão relativa em cada barra da armadura é:

$$\nu_s^{st}(m_0, t) = \frac{1.15 \cdot \sigma_s^{st}(m_0, t)}{n_b f_{yk}}, \quad (13)$$

em que n_b é o número de barras da armadura da seção S e f_{yk} é a tensão de escoamento do aço.

A Figura 4 apresenta um fluxograma com a rotina de programação elaborada para obtenção do cálculo da transferência de tensões para a armadura.

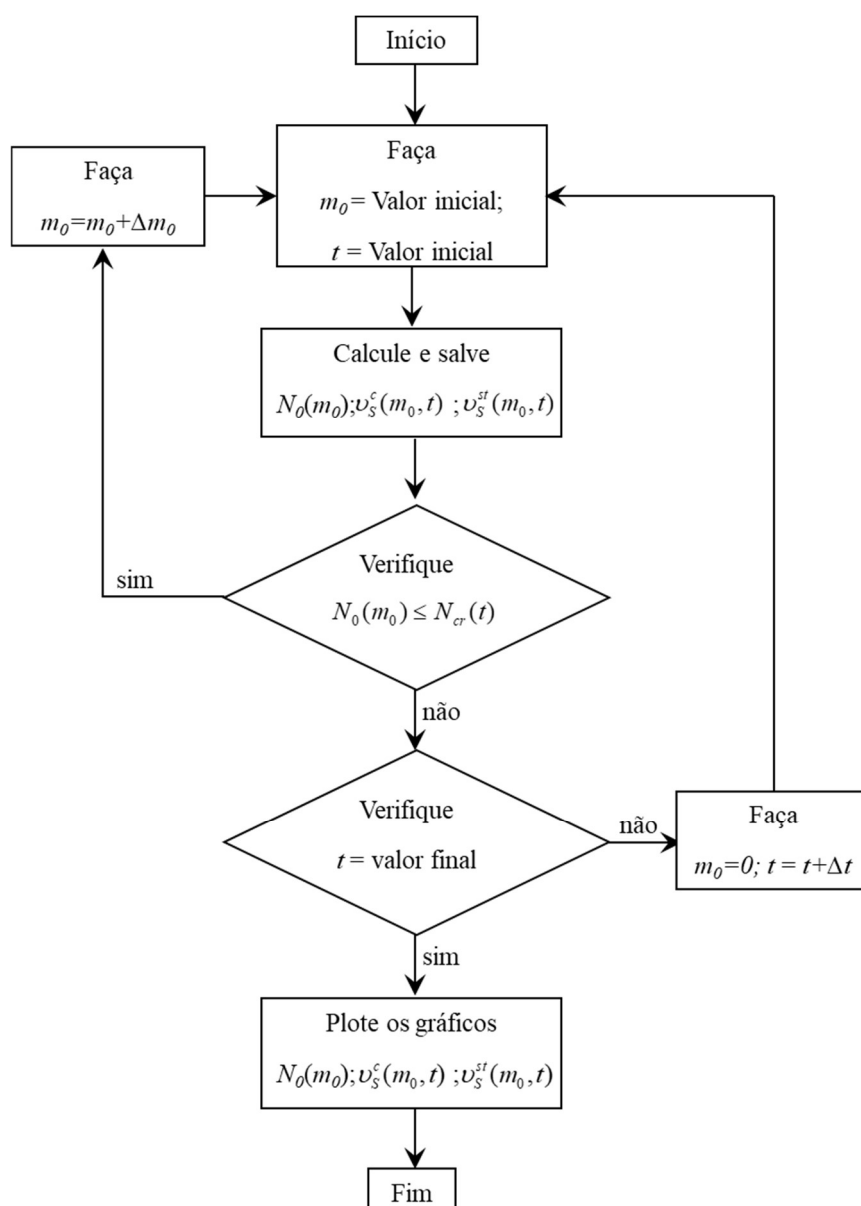


Figura 3. Fluxograma da rotina de cálculo

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A Figura 3 apresenta a variação da frequência do primeiro modo de vibração, conforme Equação (11), para um intervalo de 7500 dias após a entrada em serviço da estrutura. Portanto, a carga crítica de flambagem, fica definida para diferentes instantes de tempo, na nulidade da frequência estrutural, como disposto na Tabela 3

Tabela 3. Resultados da carga de flambagem

Tempo (dia(s))	$N_{cr}(\text{kN})$	$\Delta(\%)$
0	293,88	-
90	224,32	23,7
500	188,92	15,8
1000	182,68	3,3
2000	179,28	1,8
3000	178,10	0,7
4000	177,50	0,3
5000	177,14	0,2
7500	176,65	0,3

Δ = Variação em relação ao valor anterior.

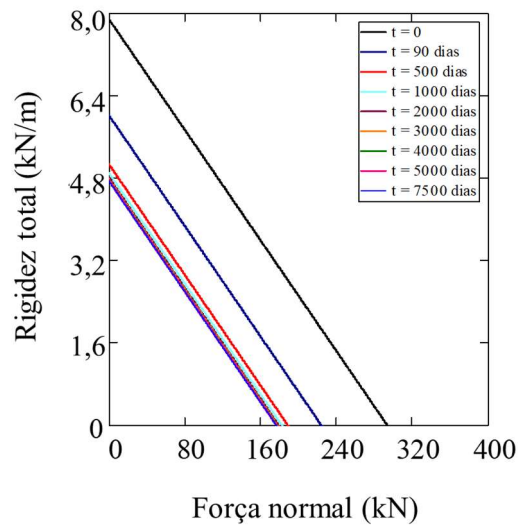


Figura 4. Variação da rigidez estrutural

Na Figura 5 são apresentadas as tensões induzidas em cada seção transversal analisada (S3, S4 e S5), onde o ponto de inflexão nos gráficos representa a iminência da perda de equilíbrio, ou falha por flambagem

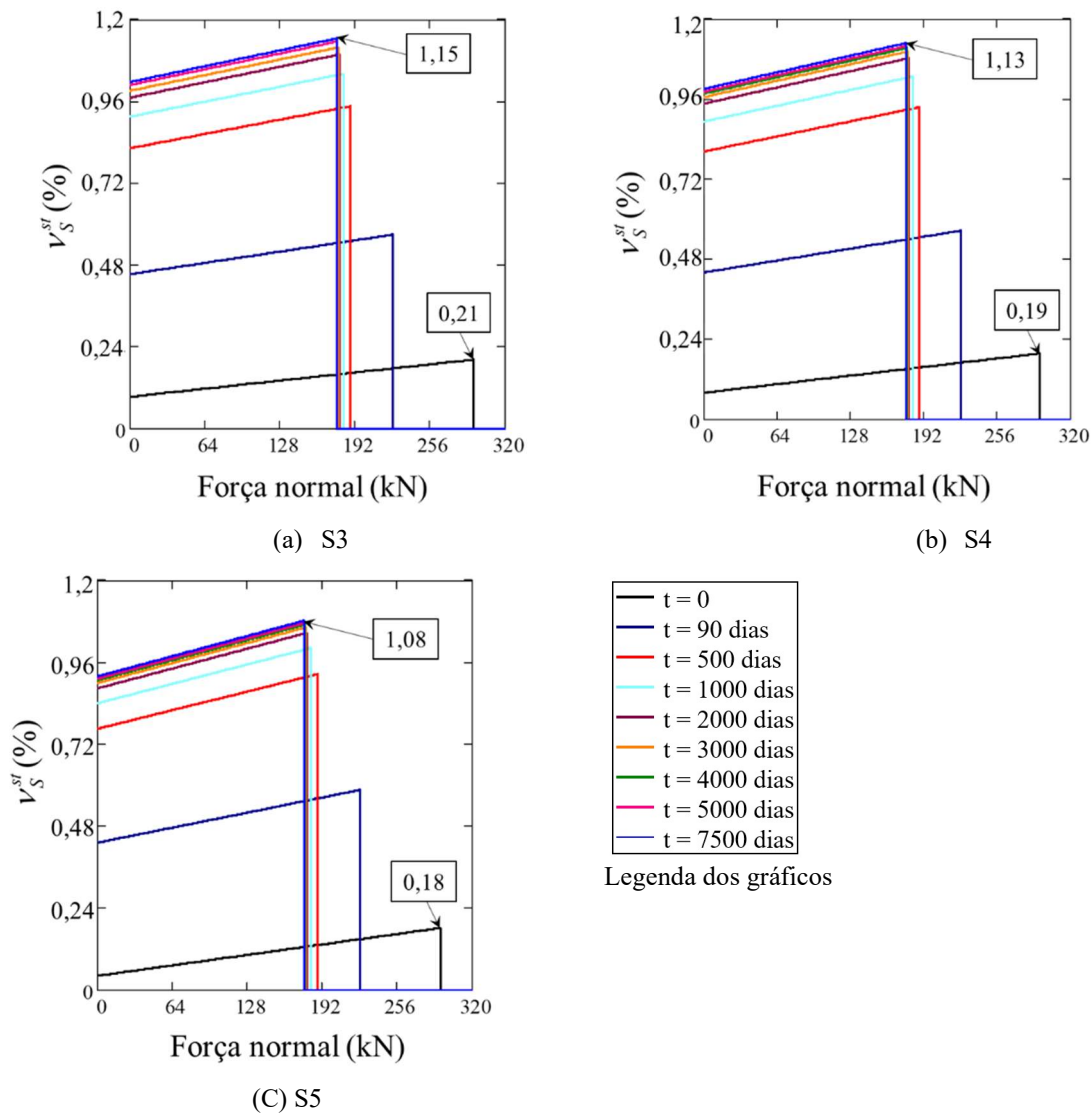


Figura 5. Tensão normalizada na armadura

Nota-se que, com a consideração das propriedades reológicas do concreto, há uma transferência temporal de tensão para as barras de aço da armadura, sem que isso, no entanto, produza o escoamento do material. Salienta-se que os pontos de inflexão existentes em cada gráfico representam a iminência da perda de estabilidade por flambagem, definindo o limite de carregamento vertical da coluna, nos respectivos instantes. De fato, a tensão transferida para o aço apresenta um crescimento linear, chegando a um valor máximo juntamente na carga crítica de flambagem da coluna.

5. CONCLUSÕES

Nesta pesquisa foi investigada a transferência de tensões para a armadura longitudinal de uma coluna extremamente esbelta de concreto armado considerando as propriedades reológicas do concreto, fluência e retração. Na modelagem matemática do problema, utilizou-se princípios da mecânica racional, onde foi aplicado uma adaptação do método de Rayleigh para avaliação da resposta temporal da estrutura, *i.e.*, através da teoria das vibrações mecânicas. Destaca-se que todas as informações relevantes na modelagem do problema foram descritas nas seções precedentes, tais como, a inserção da imperfeição geométrica da estrutura, inserida na parcela da rigidez geométrica, e as propriedades reológicas, que foram modeladas analiticamente pelas recomendações descritas na ACI 20R (2008), e incorporadas na parcela da rigidez convencional.

Com base nos resultados encontrados nas análises matemáticas desenvolvidas neste estudo verificou-se que os valores máximos da tensão normalizada na armadura para as seções S3, S4 e S5 foram 1,15%, 1,13% e 1,08% respectivamente, o que afasta qualquer possibilidade de escoamento do material. Observou-se ainda a existência de uma convergência dos resultados para a carga crítica da estrutura após decorridos 3000 dias do tempo inicial do carregamento, considerando a diferença ao instante anterior menor que 1%. Sendo que neste período foi encontrada uma redução de 38,99% do seu valor inicial. Para 7500 dias a estrutura perdeu aproximadamente 40% da sua capacidade de carga, uma vez que para o momento inicial do carregamento da estrutura, a capacidade da coluna era de 293,88 kN e em 7500 dias passou a ser 176,65 kN.

Destaca-se que o método analítico apresentado neste artigo é livre da aplicação de métodos iterativos ou processos de discretização, com uma solução obtida diretamente no contínuo. Este método pode ser adaptado para incluir diferentes geometrias, sem nenhuma, uma ou algumas massas concentradas, e forças ao longo da altura, e, ainda, tornando-o capaz de resolver qualquer problema que pode ser modelado como elementos unidimensionais, incluindo edifícios.

6. AGRADECIMENTOS

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro dado por meio de outorga de número 161952/2021-6, relativo à bolsa de doutorado do autor Kaique Magalhães.

7. REFERÊNCIAS

- American Concrete Institute ACI, 2008. Prediction of creep, shrinkage, and temperature effects in concrete structures. ACI-209R-08, ACI Committee 209.
- Awrejcewicz, J., Krysko, A.V., Zagniboroda N.A., Dobriyan, V.V. and Krysko, V.A., 2015. "On the general theory of chaotic dynamics of flexible curvilinear Euler–Bernoulli beams". *Nonlinear Dynamics*, Vol. 79, No. 01, pp. 11-29. doi:10.1007/s11071-014-1641-5.
- Fenollosa, E., Cabrera, I. and Almerich, C. A., 2014. "Non-Linear Analysis of Rheological Effects in Slender Composite Columns". *Applied Mechanics and Materials*, Vol. 578–579, pp. 389–395. doi:10.4028/www.scientific.net/amm.578-579.389.
- Sharma, M. R.; Singh, A. K. and Benipal, G. S., 2017. "Elastic Stability of Concrete Beam-Columns Part II: Dynamic Stability." *International journal of structural stability and dynamics*, Vol. 17, No. 01, pp. 1750095-1–1750095-20. doi:10.1142/S021945541750095X.
- Sharma, M. R., Singh, A. K. and Benipal, G. S., 2017. "Elastic Stability of Concrete Beam-Columns Part I: Static Stability". *International journal of structural stability and dynamics*, Vol. 17, No. 01, pp. 1750095-1–1750095-20. doi:10.1142/S0219455417500948.
- Wahrhaftig, A.M., Silva, M.A. and Brasil, R.M.L.R.F., 2019. "Analytical determination of the vibration frequencies and buckling loads of slender reinforced concrete towers", *Latin American Journal of Solids and Structures*, Vol. 16, No. 5, pp. 1-22. doi:10.1590/1679-78255374.
- Weng, J., Tan, K. H. and Lee, C. K., 2019. "Identifying buckling resistance of reinforced concrete columns during inelastic deformation". *International journal of structural stability and dynamics*, Vol. 20, No. 3, pp. 2050029-1–2050029-25. doi:10.1142/s0219455420500297.

8. RESPONSABILIDADE AUTORAL

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho.

THEORY OF MECHANICAL VIBRATIONS APPLICATION IN THE ESTIMATE OF INDUCED STRESS IN THE REINFORCEMENT IN A SLENDER COLUMN OF REINFORCED CONCRETE

Kaique Moreira Matos Magalhães, kaiquemagalhaes@usp.br¹

Alexandre de Macêdo Wahrhaftig, alixa@ufba.br²

Reyolando Manoel Lopes Rebello da Fonseca Brasil, reyolando.brasil@ufabc.br³

¹Universidade de São Paulo (USP), Av. Prof. Almeida Prado, trav.2, 83, Cidade Universitária, 05508-900, São Paulo, Brazil

²Universidade Federal da Bahia (UFBA), Rua Aristides Novis, 02, 5º andar, Federação, 40210-630, Salvador, Brazil

³Universidade Federal do ABC (UFABC), Rua Arcturus, 03, Jardim Antares, São Bernardo do Campo, 09606-070, São Paulo, Brazil

Abstract. *This paper presents a mathematical application, based on the concepts of mechanical vibrations, to evaluate the induced stresses in the reinforcement of a slender reinforced concrete column due to the time-dependent behavior of the concrete. Such analysis will take place in the condition close to the imminence of collapse by bifurcation of the equilibrium, for which the value of the critical load of the structure will be determined, defined based on the nullity of the structural stiffness for different periods. The portion corresponding to the creep of the concrete was incorporated from the analytical formulation, following the procedures described by the American standard ACI 209R (2008). In the end, it was possible to evaluate the maximum stresses induced in the reinforcements, which for the case investigated in this study did not present a risk to the yield of the material, with the maximum value corresponding to 1.15% of the yield stress of the steel. For 7500 days, the total period of investigation, it was found that the structure lost approximately 40% of its load capacity, since for 0 days, the beginning of the structure loading consideration, the column capacity was 293.88 kN and at 7500 days became 176.65 kN.*

Keywords: *mechanical vibrations, induced stress, reinforced concrete column, slender structures*