

RELAÇÕES DE ACOPLAMENTOS EM VIGAS RAMIFICADAS

Cássio Bruno Florêncio Gomes, cassio.bruno@discente.ufma.br¹

Dalmo Inácio Galdez Costa, dalmo.costa@ufma.br¹

Vilson Souza Pereira, vilson.sp@ufma.br¹

¹Universidade Federal do Maranhão, Av. dos Portugueses, 1966, Bacanga, CEP 65080-805, São Luís-MA

Resumo: *Processos de fabricação de estruturas acopladas, deslocamentos angulares nos acoplamentos ou descontinuidades geométricas, em muitos casos, são responsáveis pelo comportamento sensível à vibração não sendo facilmente detectáveis. Para elementos estruturais que apresentam descontinuidades geométricas, ainda se faz necessário a implementação de modelos matemáticos que expressem os efeitos desses acoplamentos, com a finalidade de ajudar a prever quais faixas de frequências, ângulos ou regiões estruturais, são responsáveis pela hipersensibilidade. No presente trabalho estruturas acopladas unidimensionais são estudadas com a finalidade de analisar as condições nas quais esta descontinuidade geométrica podem causar alterações no comportamento vibratório das estruturas. Tal formulação permite identificar variações com alto grau de sensibilidade. Para isso, foi utilizada uma metodologia baseada na decomposição clássica de ondas, para um elemento de viga ramificado semi-infinito. Através desse estudo, observamos que os ângulos de acoplamento nas descontinuidades considerados críticos podem ser identificados. Foram observados também as variações das amplitudes de ondas incidentes que são refletidas e transmitidas na descontinuidade em função do ângulo de acoplamento. Além disso, foram observadas as parcelas propagantes das amplitudes de ondas longitudinais e de flexão, transmitidas e refletidas no acoplamento do elemento de viga ramificado. Os coeficientes de transmissão, reflexão e suas combinações, para um elemento de viga semi-infinito ramificado também são investigados. O modelo proposto é apresentado e os resultados são verificados usando o método decomposição clássica de ondas.*

Palavras-chave: *Viga ramificada, Propagação de ondas, Coeficientes de transmissão e reflexão, Relação de acoplamento*

1. INTRODUÇÃO

Estruturas acopladas estão sujeitas a um certo grau de incerteza para determinados valores do ângulo de acoplamento. Essa sensibilidade toma maiores proporções à medida que a complexidade do sistema aumenta, como por exemplo, a presença de ramificações na estrutura. Portanto, é necessário prever o comportamento dinâmico de elementos estruturais de várias configurações utilizados na engenharia, tais como: barras, vigas, placas planas, cascas, etc, de forma rápida, precisa e eficiente. De acordo com a literatura, valores particulares de pequenos deslocamentos dos ângulos de acoplamentos podem induzir variações muito grandes na resposta, além de não serem facilmente detectadas em sistemas complexos e sensíveis (Ouisse and Guyader, 2003a; Bernhard, 1996). Essas descontinuidades geométricas ou deslocamentos angulares no acoplamento são, em muitos casos, responsáveis pela sensibilidade do sistema. Além disso, a literatura dispõe de estudos que aplicam métodos matemáticos para prever configurações responsáveis pela hipersensibilidade em sistemas de placas e vigas (Ouisse and Guyader, 2003b; Rebillard and Guyader, 1997).

Diante disso, o avanço tecnológico e aprimoramento de ferramentas computacionais tem motivado cada vez mais estudos em análise estrutural. Desse modo, o desenvolvimento de novas metodologias que prevejam e identifiquem danos tem ganhado bastante atenção de pesquisadores com o objetivo de proporcionar ambientes que ofereçam conforto e segurança (Santos, 2018; Li *et al.*, 2012).

Sendo assim, a academia tem alcançado significativos avanços ao investigar novas ferramentas de engenharia que satisfaçam o propósito de encontrar métodos de diagnósticos rápidos e precisos com aplicações práticas na indústria e cotidiano da sociedade (Klikowicz *et al.*, 2016; Mohan *et al.*, 2014).

Dessa forma, o objetivo deste trabalho consiste em estudar e descrever o comportamento vibracional de uma estrutura de viga semi-infinita ramificada em "Y" com angulação arbitrária do tipo Bernoulli-Euler. Assim como analisar os coeficientes de reflexão e transmissão na estrutura, ou seja, as relações de acoplamento, além de mostrar a sensibilidade do modelo à descontinuidade apresentada e os ângulos críticos de acoplamento. Esse estudo foi realizado através da decomposição de ondas refletidas e transmitidas devidas à incidência de uma potência de flexão no acoplamento da estrutura.

2. METODOLOGIA

2.1 Relações de Continuidade e Compatibilidade em uma Viga Ramificada Semi-Infinita

Na Figura 1, é mostrado uma viga ramificada semi-infinita de material homogêneo, isotrópico e de propriedade geométrica idêntica. Para descrever o comportamento vibracional da estrutura é utilizado a teoria da viga de Bernoulli-Euler (Xu and Li, 2008; Cho, 1993). Na região do acoplamento ou descontinuidade, a origem dos sistemas de coordenadas no ponto O, são coincidentes ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$) e os ângulos de acoplamento ϕ_2 e ϕ_3 , são medidos a partir do eixo x_1 da viga incidente (1), o sentido anti-horário é considerado positivo, como mostrado na Figura 1.

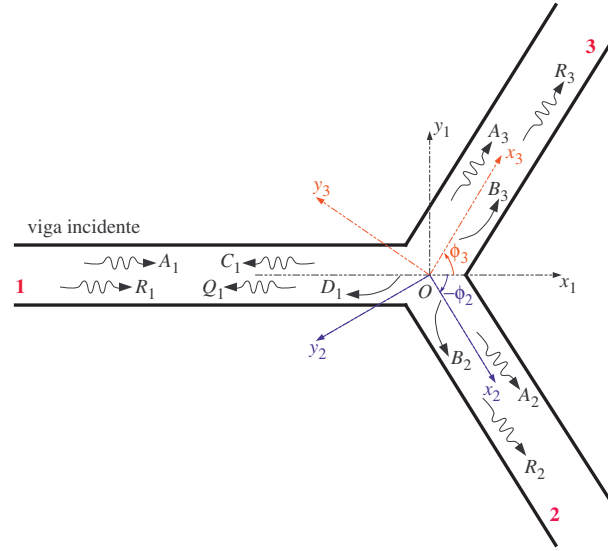


Figura 1: Acoplamento de uma viga ramificada semi-infinita.

Para o modelo de viga ramificado são considerados ondas incidentes de flexão e longitudinal no acoplamento da viga incidente, com amplitudes, A_1 e R_1 , respectivamente. Devido as ondas incidente, atuando na descontinuidade, implicará no surgimento de ondas longitudinais e flexão, transmitidas e refletidas em cada ramificação semi-infinita da viga, como mostrado na Figura 1. O deslocamento transversal da viga 1, pode ser representado por

$$w_1(x_1) = A_1 e^{-ikx_1} + C_1 e^{ikx_1} + D_1 e^{kx_1}, \quad (1)$$

onde, $k = \sqrt{\omega(\rho S/EI)^{1/4}}$, é o número de onda de flexão da viga ramificada, C_1 e D_1 são as amplitudes complexas das ondas de flexão propagante e evanescente da viga 1, respectivamente. O deslocamento longitudinal da viga 1 é dado por,

$$u_1(x_1) = R_1 e^{-i\beta x_1} + Q_1 e^{i\beta x_1}, \quad (2)$$

onde, $\beta = \omega\sqrt{\rho/E}$, é o número de onda longitudinal, Q_1 é a amplitude complexa da onda longitudinal propagante da viga 1. O deslocamento transversal da viga 2 é representado por,

$$w_2(x_2) = A_2 e^{-ikx_2} + B_2 e^{-kx_2}, \quad (3)$$

no qual, A_2 e B_2 são as amplitudes complexas das ondas de flexão propagante e evanescente da viga 2. O deslocamento longitudinal da viga 2 é dado por,

$$u_2(x_2) = R_2 e^{-i\beta x_2}, \quad (4)$$

onde, R_2 é a amplitude complexa da onda longitudinal propagante da viga 2. O deslocamento transversal da viga 3 é representado por,

$$w_3(x_3) = A_3 e^{-ikx_3} + B_3 e^{-kx_3}, \quad (5)$$

no qual, A_3 e B_3 são as amplitudes complexas das ondas de flexão propagante e evanescente da viga 3. O deslocamento longitudinal da viga 3 é dado por,

$$u_3(x_3) = R_3 e^{-i\beta x_3}, \quad (6)$$

onde, R_3 é a amplitude complexa da onda longitudinal propagante da viga 3.

Uma vez conhecido os campos de deslocamentos, as forças generalizadas podem ser determinadas usando as leis constitutivas, que estabelecem as ligações entre esforços e deslocamentos, que podem ser escritas para o momento fletor $M(x)$, força de cisalhamento $V(x)$ e força normal $N(x)$ das seguintes formas:

$$M(x_i) = EI \frac{d^2 w_i}{dx_i^2}, \quad V(x_i) = -EI \frac{d^3 w_i}{dx_i^3} \quad e \quad N(x_i) = ES \frac{du_i}{dx_i} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (7)$$

Também é possível definir a inclinação da seção transversal da viga ramificada, dada por:

$$\theta(x_i) = \frac{dw_i}{dx_i} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (8)$$

No acoplamento são consideradas nove equações de condições de equilíbrio, sendo quatro de continuidade de deslocamento transversal e axiais, duas de inclinação, três condições de equilíbrio de forças axiais, transversais e momentos aplicados no acoplamento. A continuidade do deslocamento transversal entre as vigas 1 e 2, e as vigas 1 e 3, são representadas pelas seguintes expressões:

$$w_1 = u_2 \sin(\phi_2) + w_2 \cos(\phi_2) \quad (9)$$

e,

$$w_1 = u_3 \sin(\phi_3) + w_3 \cos(\phi_3). \quad (10)$$

A continuidade do deslocamento axial entre as vigas 1 e 2 e as vigas 1 e 3, são expressas por

$$u_1 = u_2 \cos(\phi_2) - w_2 \sin(\phi_2) \quad (11)$$

e,

$$u_1 = u_3 \cos(\phi_3) - w_3 \sin(\phi_3). \quad (12)$$

As relações de inclinação no acoplamento entre as vigas 1 e 2, e as vigas 1 e 3 são representadas como,

$$\frac{dw_1}{dx_1} = \frac{dw_2}{dx_2}, \quad \frac{dw_1}{dx_1} = \frac{dw_3}{dx_3}. \quad (13)$$

Assumido o equilíbrio no acoplamento, temos a equação da força na direção axial, expressa por

$$-N_1 + N_2 \cos(\phi_2) + N_3 \cos(\phi_3) - V_2 \sin(\phi_2) - V_3 \sin(\phi_3) = 0, \quad (14)$$

onde N_1 , N_2 e N_3 são as forças axiais das vigas 1, 2 e 3, respectivamente, V_1 , V_2 e V_3 são as forças cortantes das vigas 1, 2 e 3, respectivamente. As forças no acoplamento na direção vertical são expressas pela equação do equilíbrio dada por,

$$-V_1 + N_2 \sin(\phi_2) + N_3 \sin(\phi_3) + V_2 \cos(\phi_2) + V_3 \cos(\phi_3) = 0, \quad (15)$$

o equilíbrio do momento no acoplamento, temos

$$-M_1 + M_2 + M_3 = 0. \quad (16)$$

Escrevendo na forma matricial as nove equações para $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, obtemos o seguinte sistema:

$$[H] \{C\} = \{p\}, \quad (17)$$

onde $[H]$ é a matriz do número de ondas, $\{C\}$ é o vetor de amplitudes das ondas e $\{p\}$ é o vetor de incidência, representados da seguinte forma:

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & -\cos(\phi_2) & 0 & 1 & -\cos(\phi_2) & 0 & 0 & -\sin(\phi_2) & 0 \\ 1 & 0 & -\cos(\phi_3) & 1 & 0 & -\cos(\phi_3) & 0 & 0 & -\sin(\phi_3) \\ 0 & \sin(\phi_2) & 0 & 0 & \sin(\phi_2) & 0 & 1 & -\cos(\phi_2) & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\phi_3) & 0 & 0 & \sin(\phi_3) & 1 & 0 & -\cos(\phi_3) \\ i & i & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & i & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\phi_2)i & \sin(\phi_3)i & 0 & -\sin(\phi_2) & -\sin(\phi_3) & -\mu i & -\mu \cos(\phi_2)i & -\mu \cos(\phi_3)i \\ -i & -\cos(\phi_2)i & -\cos(\phi_3)i & 1 & \cos(\phi_2) & \cos(\phi_3) & 0 & -\mu \sin(\phi_2)i & -\mu \sin(\phi_3)i \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

e,

$$\{C\} = \begin{bmatrix} C_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ D_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ Q_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix}, \quad \{p\} = \begin{bmatrix} -A_1 \\ -A_1 \\ -R_1 \\ -R_1 \\ A_1 i \\ A_1 i \\ -R_1 \mu i \\ -A_1 i \\ -A_1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

onde a variável μ é um parâmetro estrutural adimensional, que pode ser representado como sendo uma frequência adimensional (Ouisse and Guyader, 2003a). No qual, pode ser expressa pela razão entre o número de onda de flexão e longitudinal, dado por:

$$\mu = \frac{S\beta}{Ik^3} = \left(\frac{ES}{\rho I \omega^2} \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{k}{\beta}. \quad (20)$$

2.2 Coeficiente de Transmissão e Reflexão Para uma Viga Ramificada

Para calcularmos os coeficientes de transmissão e reflexão é necessário obtermos a potência média temporal da viga ramificada (Cho, 1993). Dada um excitação harmônica de flexão, a potência incidente de flexão (P_{in}) de uma viga é representada por:

$$P_{in} = \frac{1}{2} \Re \left\{ -V \frac{dw^*}{dt} - M \frac{d^2 w^*}{dx dt} \right\}, \quad (21)$$

onde dw^*/dt é o conjugado complexo da velocidade transversal da onda incidente e $d^2 w^*/dx dt$ é o conjugado complexo da velocidade angular da onda incidente. Para uma onda incidente de flexão com amplitude unitária $A_1 = 1$ e $R_1 = 0$, temos a potência incidente de flexão expressa por:

$$P_{in} = EIk^3 \omega. \quad (22)$$

Aplicando o princípio da conservação de energia para um modelo de acoplamento de uma viga semi-infinita ramificada, temos:

$$P_{in} = P_{fr1} + P_{ft2} + P_{ft3} + P_{lr1} + P_{lt2} + P_{lt3}, \quad (23)$$

onde P_{fr1} é a potência de flexão da onda refletida na viga 1, P_{ft2} é a potência de flexão da onda transmitida para viga 2, P_{ft3} é a potência de flexão da onda transmitida para viga 3, P_{lr1} é a potência longitudinal da onda refletida na viga 1, P_{lt2} é a potência longitudinal da onda transmitida para viga 2 e P_{lt3} é a potência longitudinal da onda transmitida para viga 3. O coeficientes de transmissão e reflexão da viga ramificada são calculados a partir das potências médias incidente, transmitidas e refletidas no acoplamento da seguinte forma:

$$1 = \frac{P_{fr1}}{P_{in}} + \frac{P_{ft2}}{P_{in}} + \frac{P_{ft3}}{P_{in}} + \frac{P_{lr1}}{P_{in}} + \frac{P_{lt2}}{P_{in}} + \frac{P_{lt3}}{P_{in}} \implies 1 = r_{fr1} + t_{ft2} + t_{ft3} + r_{lr1} + t_{lt2} + t_{lt3}. \quad (24)$$

3. RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção mostraremos o comportamento da estrutura ramificada com relação a sensibilidade aos ângulos de acoplamento. O primeiro passo é encontrar um indicador que possa determinar em qual intervalo de ângulos, a estrutura é considerada com alta sensibilidade ou nenhuma sensibilidade. Para essa análise as vigas escolhidas possuem as mesmas características: área da seção transversal quadrada $S = 1 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, momento de inércia $I = 8,3333 \times 10^{-10} \text{ m}^4$, módulo de Young's $E = 210 \text{ GPa}$, densidade $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, frequência $f = 100 \text{ Hz}$, ângulo de acoplamento $\phi_3 = |-\phi_2|$ e o parâmetro estrutural adimensional $\mu = 53,486$. Para as análises a seguir, uma investigação da evolução das amplitudes das ondas propagantes é realizada, como mostrado na Figura 1. As ondas ditas propagantes são responsáveis pelo comportamento da vibração estrutural de campo distante, que será o foco dessa análise.

Figura 2, é observado o comportamento das amplitudes das ondas propagantes transmitidas e refletidas de flexão e longitudinal, devido a uma onda incidente de flexão de amplitude unitária. Nesta figura, observamos regiões distintas de acordo com ângulo de acoplamento. Quando o ângulo for igual a zero, a onda incidente não é transmitida totalmente, pois existe no acoplamento uma ramificação, provocando uma descontinuidade geométrica. A medida que o ângulo de acoplamento aumenta as ondas transmitidas diminuem, para este caso, a sensibilidade da resposta ao ângulo de acoplamento tem um valor considerável na faixa de 0-20°. Após essa faixa, definimos uma grande região em que as ondas transmitidas e a refletida, possuem um comportamento uniforme, a sensibilidade terá valores baixos devido a regularidade da resposta. Por fim, os valores teóricos de máxima reflexão e mínima transmissão são atingidos em 180°. A figura também mostra as amplitudes das ondas longitudinais transmitidas. Essas curvas apresentam regiões de alta sensibilidade quando o ângulo de acoplamento é próximo de 0° e 180°.

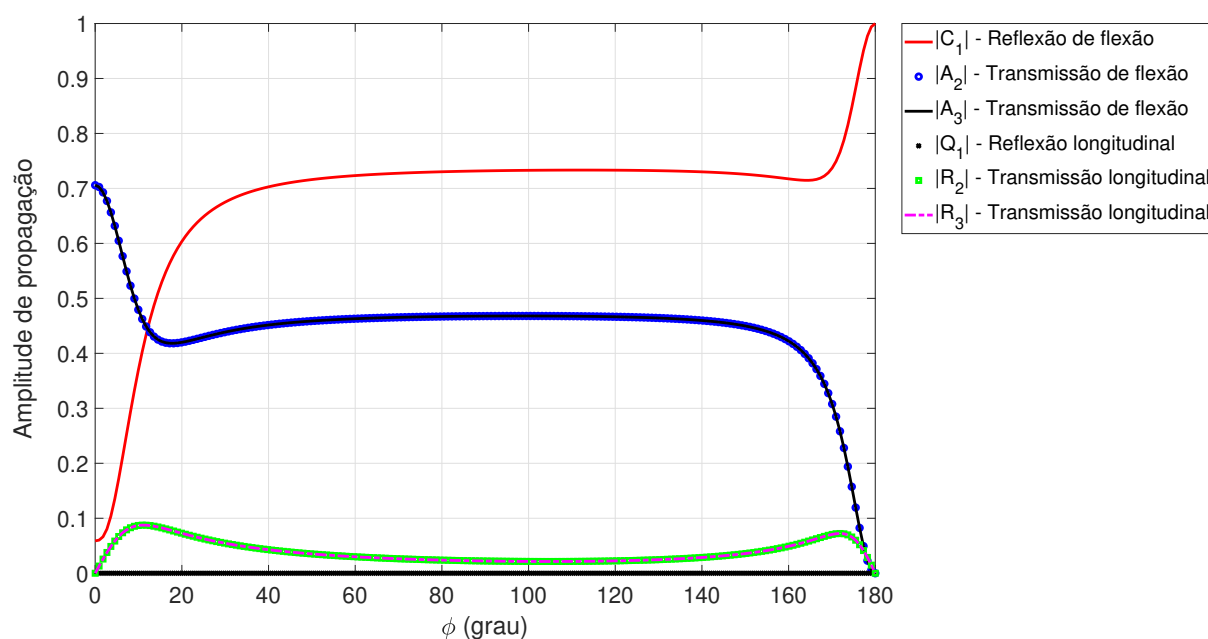


Figura 2: Amplitudes das ondas de propagação de flexão e longitudinal.

Para melhor a visualização das regiões de sensibilidade e estabelecer ângulos de acoplamento crítico, as derivadas das amplitudes de propagação das ondas de flexão são calculadas e mostradas na Figura 3. As regiões de alta sensibilidade pode ser observadas nesta figura. A primeira está centrada em um ângulo de 7°, enquanto o segundo está centrado em um ângulo teórico de 175°. Para cada região de sensibilidade é possível definir um valor preciso do ângulo crítico, por exemplo na faixa de 0-20°, pois tanto as ondas transmitidas quanto a refletida atingem sua máxima sensibilidade para o mesmo ângulo de acoplamento.

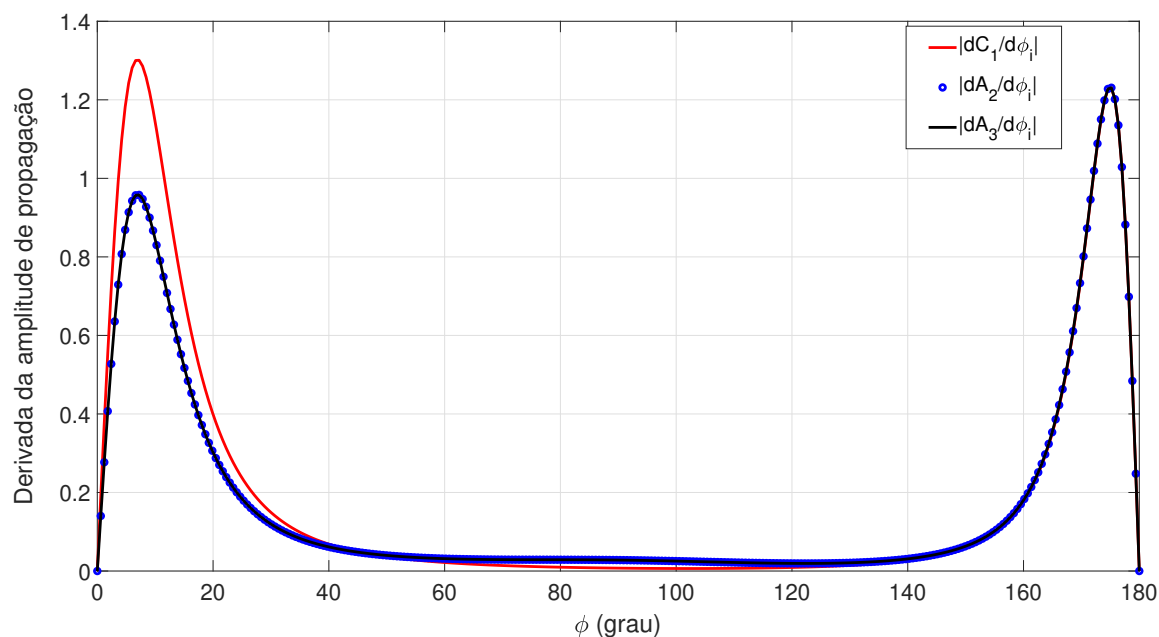


Figura 3: Derivadas das amplitudes das ondas de propagação de flexão.

Na Figura 4, são mostrados os coeficientes de transmissão e reflexão de uma viga ramificada. Para essa análise é importante lembrar que, para o cálculo dos coeficientes, foi utilizado o princípio da conservação de energia e uma onda incidente de flexão de amplitude unitária. Nesta figura, as regiões de sensibilidade também podem ser identificadas.

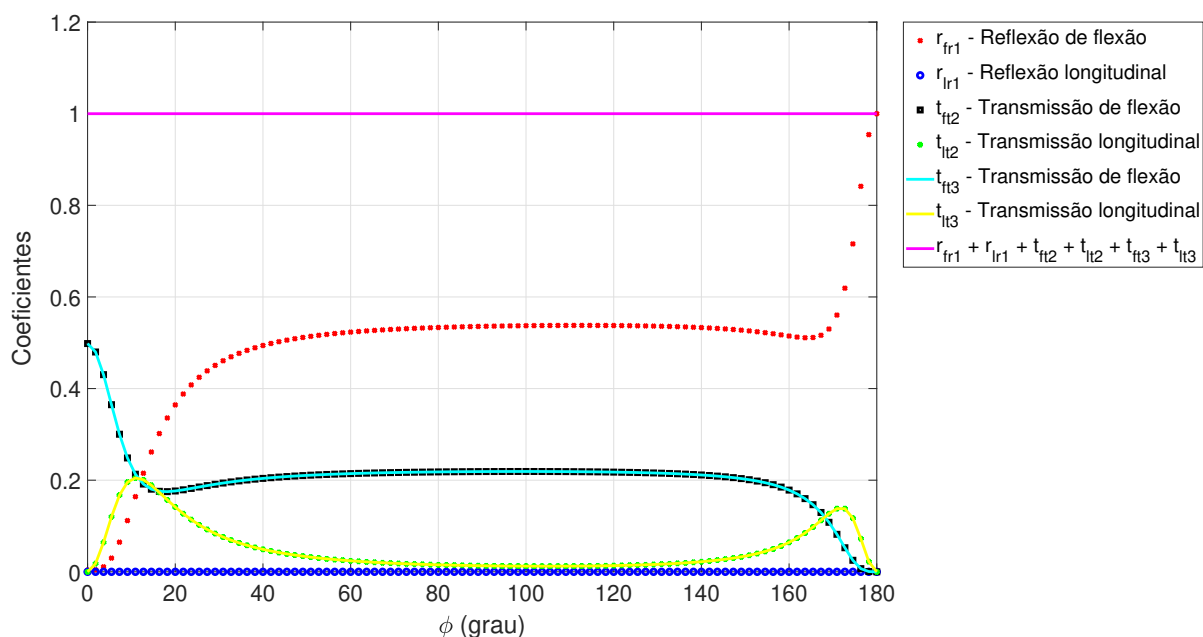


Figura 4: Coeficientes de transmissão e reflexão.

4. CONCLUSÃO

Para os resultados apresentados de uma viga ramificada, podemos definir um ângulo crítico, para o qual a sensibilidade da onda transmitida e refletida em relação ao ângulo de acoplamento. Seus valores máximos estão relacionados pela mudança rápida dos caminhos de transmissão, que são claramente identificados por uma análise de propagação de ondas. O valor deste ângulo depende do número de ramificações da estrutura e excitação, mas para o modelo estudado os valores são menores que 10° ou próximo de 180° . Esses resultados podem ser usados para entender o comportamento de estruturas finitas, nas quais existem vários tipos de ondas, com muitas incidências, e os resultados apresentados indicam a existência de um ângulo crítico cujo valor é inferior a 10° .

5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a FAPEMA, FAPEMIG e UFMA pelo financiamento desta pesquisa.

6. REFERÊNCIAS

- Bernhard, R.J., 1996. "The limits of predictability due to manufacturing and environmentally induced uncertainty". *Proceedings INTER-NOISE96*, pp. 2867–2872.
- Cho, P.E.H., 1993. *Energy Flow Analysis of Coupled Structures*. PhD Thesis - Purdue University.
- Klikowicz, P., Salamak, M. and Poprawa, G., 2016. *Structural Health Monitoring of Urban Structures*, Vol. 161. doi: <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.08.833>. World Multidisciplinary Civil Engineering-Architecture-Urban Planning Symposium 2016, WMCAUS 2016.
- Li, W.L., Bonilha, M.W. and Xiao, J., 2012. "Vibrations of two beams elastically coupled together at an arbitrary angle". *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 25, No. 1, pp. 61–72.
- Mohan, V., Parivallal, S., Kesavan, K., Arunsundaram, B., Ahmed, A.K.F. and Ravisankar, K., 2014. *Studies on Damage Detection Using Frequency Change Correlation Approach for Health Assessment*, Vol. 86. doi: <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2014.11.074>. Structural Integrity.
- Ouisse, M. and Guyader, J., 2003a. *Vibration sensitive behaviour of a connecting angle. Case of coupled beams and plates*, Vol. 267. doi: [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00179-2](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00179-2).
- Ouisse, M. and Guyader, J.L., 2003b. "Localization of structural zones producing hypersensitive behavior". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, p. 5001–5020. doi: [10.1016/S0045-7825\(03\)00462-6](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(03)00462-6).
- Rebillard, E. and Guyader, J., 1997. "Vibrational behaviour of lattices of plates: Basic behaviour and hypersensitivity phenomena". *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 205, No. 3, pp. 337–354.
- Santos, R.B., 2018. *An alternative approach to design periodic rods*. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia.
- Xu, H. and Li, W.L., 2008. "A revisit of the coupling loss factors in determining power flows in structures". doi: [10.1115/ncad2008-73048](https://doi.org/10.1115/ncad2008-73048).

COUPLING RELATIONSHIPS IN BRANCHED BEAMS

Cássio Bruno Florêncio Gomes, cassio.bruno@discente.ufma.br¹

Dalmo Inácio Galdez Costa, dalmo.galdez@ufma.br¹

Vilson Souza Pereira, vilson.sp@ufma.br¹

¹Universidade Federal do Maranhão, Av. dos Portugueses, 1966, Bacanga, CEP 65080-805, São Luís-MA

Resumo: Manufacturing processes of coupled structures, angular displacements in couplings or geometric discontinuities, in many cases, are responsible for the vibration sensitivity and are not easily detectable. For structural elements that present geometric discontinuities, it is still necessary to implement mathematical models that express the effects of these couplings, in order to help predict which frequency ranges, angles or structural regions are responsible for hypersensitivity. In the present work one-dimensional coupled structures are studied, in order to analyze the conditions under which the effects of geometric discontinuity can induce in the structures a vibratory behavior with a high degree of sensitivity. For this, a methodology based on classical wave decomposition was used for a semi-infinite branched beam element. Through this study, we observed that the coupling angles in the discontinuities considered critical can be defined. It was also observed the variations in the amplitudes of the incident waves that are reflected and transmitted in the discontinuity as a function of the coupling angle. Furthermore, the propagating parcels of the amplitudes of longitudinal and bending waves, transmitted and reflected in the coupling of the branched beam element, were observed. The transmission and reflection coefficients and their combinations for a branched semi-infinite beam element are also investigated. The proposed model is presented and the results are verified using the classical wave decomposition method.

Palavras-chave: Branched beam, Wave propagation, Transmission and reflection coefficients, Coupling relationship