

DINÂMICA NÃO LINEAR DE DISPOSITIVOS PIEZELÉTRICOS DE COLHEITA DE ENERGIA MECÂNICA DO TIPO DUFFING

Fernando Savi Drummond, fernando.savi@mecanica.coppe.ufrj.br¹

Luciana L. da Silva Monteiro, lucianals.monteiro@gmail.com¹

Marcelo A. Savi, savi@mecanica.coppe.ufrj.br²

¹ CEFET/RJ, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e Tecnologia de Materiais (PPEMM), Rio de Janeiro, RJ, Brasil

² Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE – Engenharia Mecânica, Centro de Mecânica Não-Linear, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Resumo: A colheita de energia baseada em vibrações utilizando elementos piezelétricos tem despertado grande interesse nas mais variadas áreas. O grande desafio atual é otimizar o desempenho dos sistemas de geração de energia para viabilizar uma maior variedade de aplicações. Nesse sentido, não linearidades mecânicas, elétricas e do acoplamento eletromecânico têm sido estudadas. Este trabalho investiga os efeitos de não linearidades do tipo Duffing em dispositivos de colheita de energia considerando um sistema arquétipo composto de um oscilador mecânico acoplado a um circuito elétrico através de um elemento piezelétrico. O desempenho do sistema de colheita de energia é analisado através de diagramas de potência elétrica de saída, potência mecânica de entrada e de eficiência em função da frequência. Os resultados mostram que a amplitude de excitação e o tipo de resposta do sistema são determinantes para a colheita de energia. Variações na amplitude podem introduzir mudanças consideráveis no comportamento da potência elétrica coletada e da eficiência, definindo regiões de interesse para a melhoria do desempenho dos dispositivos de colheita de energia.

Palavras-chave: Materiais inteligentes, materiais piezelétricos, colheita de energia, dinâmica não linear.

1. INTRODUÇÃO

A colheita de energia baseada em vibrações utilizando elementos piezelétricos tem como ideia central a conversão de energia de vibração disponível no ambiente em energia elétrica para uso conveniente a partir de um dispositivo capaz de fazer a conversão eletromecânica. Além de gerar energia, pode-se imaginar situações em que a conversão de energia funciona como um absorvedor de vibração, eliminando situações indesejáveis (Erturk & Inman, 2011). A colheita de energia tem despertado grande interesse nas mais variadas áreas. Estruturas civis, estruturas aeroespaciais e automóveis são alguns exemplos onde a combinação da geração da energia e a redução de vibrações é explorada.

O carregamento de dispositivos móveis tem motivado o surgimento de soluções que exploram o movimento do caminhar humano, dentre outras situações que possam converter pequenas quantidades de energia para carregar baterias. Dentro dessa mesma linha, deve-se destacar os tênis que convertem energia do caminhar ou ainda pistas onde o caminhar das pessoas possa converter energia mecânica em elétrica (Yang *et al.*, 2018). A exploração de petróleo é outra aplicação importante onde a vibração da coluna de perfuração pode gerar a energia necessária para o funcionamento de sensores para monitorar a operação de perfuração e/ou produção (Talha *et al.*, 2013).

Deve-se chamar a atenção de que o nível de energia gerado por dispositivos de colheita de energia pode ser baixo, mas, ainda assim, possui utilidade para diversos propósitos. Desta forma, o grande desafio atual é melhorar o projeto e otimizar o desempenho dos dispositivos de colheita de energia, o que tem motivado várias pesquisas.

O desempenho de sistemas lineares é usualmente limitado a uma pequena faixa de frequência, sendo sensível ao ruído (Beeby *et al.*, 2013). Essas características podem inviabilizar a geração de energia e sua eventual aplicação. A não linearidade dos sistemas é um ponto de grande destaque no sentido de melhorar o desempenho dos sistemas de colheita de energia. Daqaq *et al.* (2014) fizeram uma revisão sobre o papel de diferentes não linearidades em sistemas para geração de energia utilizando diferentes condições de excitação. As não linearidades empregadas podem tornar o sistema banda larga e melhorar o desempenho desses dispositivos quando utilizados em condições reais de carregamentos mecânicos variáveis (amplitude e frequência).

Neste contexto, vale mencionar aspectos mecânicos que usualmente exploram o sistema mecânico como um oscilador tipo *Duffing* (Stanton *et al.*, 2009; Leadenham & Erturk, 2015; Chiacchiari *et al.*, 2018; Ghoulou *et al.*, 2018; Fan *et al.*,

2019; Yan *et al.*, 2019). Sistemas de colheita de energia biestáveis possuem um potencial do tipo duplo poço, que permitem alcançar movimentos em órbita de alta energia, entre as duas posições de equilíbrio estáveis, apresentando uma resposta periódica ou não periódica (caótica). Essas vibrações em órbitas de alta energia podem melhorar o desempenho do sistema, aumentando drasticamente a energia coletada (Cellular *et al.*, 2018).

Os dispositivos de colheita biestáveis são usualmente construídos experimentalmente utilizando atração magnética para induzir biestabilidade em sistemas mecânicos compostos de uma viga magneto-elasto-piezelétrica em balanço com uma massa magnética em sua extremidade livre e com a presença de ímãs nas proximidades da viga (Erturk e Inman, 2009; Staton *et al.*, 2010). Cammarano *et al.* (2014) exploraram uma comparação entre as larguras de banda dos sistemas de geração de energia linear e não linear, mostrando que a complexidade da resposta dinâmica não linear torna desafiador a comparação dos dispositivos.

A análise de não linearidades nos circuitos elétricos é outra linha de destaque na literatura (Shun & Lien, 2006). Diferentes tipos de circuitos têm sido investigados e a tendência é utilizar circuitos chaveados para melhorar o desempenho do sistema de colheita de energia.

Aspectos constitutivos do elemento piezelétrico também vêm sendo investigados (Triplett & Quinn, 2009; Stanton *et al.*, 2010). Silva *et al.* (2015) mostraram uma comparação entre dados experimentais e diferentes modelos para o acoplamento piezelétrico. Esse trabalho deixou claro que os modelos lineares não conseguem descrever com precisão os principais aspectos da colheita de energia. Silva *et al.* (2013) exploraram o comportamento histerético do acoplamento piezelétrico, mostrando outras possibilidades na otimização dos sistemas de colheita de energia.

Este trabalho propõe a investigação de sistemas de colheita de energia com um grau de liberdade incluindo uma não linearidade mecânica do tipo *Duffing*. O modelo arquétipo possui um oscilador mecânico ao qual se acopla um circuito eletrônico através de um elemento piezelétrico. A ideia é explorar diferentes características dinâmicas do sistema para definir situações de maior eficiência no sentido de gerar energia.

2. MODELO MATEMÁTICO

A colheita de energia de vibração converte a energia mecânica proveniente da vibração de um sistema mecânico em energia elétrica. A conversão eletromecânica pode ser realizada através de diferentes materiais inteligentes, dentre os quais destacam-se os materiais piezelétricos. O modelo arquétipo de um sistema de colheita de energia consiste de um oscilador mecânico acoplado a um circuito elétrico através de um elemento piezelétrico. O oscilador mecânico possui uma massa M que apresenta deslocamento z e uma excitação de base definida pelo deslocamento u . Além disso, o sistema possui forças de restituição definidas pela função $K(z)$, e uma dissipação viscosa linear definida pelo parâmetro b . O elemento piezelétrico promove a conversão eletromecânica, sendo definida pelo coeficiente θ . Utiliza-se um circuito elétrico caracterizado por uma tensão elétrica V , corrente i , resistência R e capacitância C . A dinâmica do sistema arquétipo é descrita a partir de equações de movimento do sistema mecânico e de equações do sistema elétrico, conforme se segue:

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + K(z) - \hat{\theta}V = -m\ddot{u} \quad (1)$$

$$\hat{\theta}\dot{z} + C\dot{V} + \frac{1}{R_l}V = 0 \quad (2)$$

A não linearidade mecânica é considerada através de uma força de restituição do tipo *Duffing* e está associada à força de restituição cúbica, apresentada a seguir:

$$K(z) = \hat{\beta}z + \hat{\alpha}z^3 \quad (3)$$

onde $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ caracterizam diferentes comportamentos de acordo com os seus sinais. Assumindo $\hat{\beta} > 0$, tem-se um elemento elástico linear para pequenos deslocamentos. Nesse caso, o sinal de $\hat{\alpha}$ define o que ocorre quando os deslocamentos aumentam. Se $\hat{\alpha} > 0$, tem-se o endurecimento; e, se $\hat{\alpha} < 0$ tem-se o amolecimento. Nessas condições o sistema apresenta características monoestáveis, indicando um único poço de energia potencial. Outro tipo de força de restituição está associado a uma energia potencial do tipo duplo poço. Nesse caso, tem-se $\hat{\beta} < 0$ e $\hat{\alpha} > 0$, apresentando características biestáveis (Savi, 2017).

Neste trabalho realiza-se uma análise adimensionalizada das equações de movimento, considerando as novas coordenadas $x = z/l$ e $v = V/\hat{V}$, sendo l um comprimento de referência e $\hat{V}$ a tensão elétrica de referência, $\omega_0 = \sqrt{|\hat{\beta}|/m}$ é a frequência de referência e a amplitude da excitação harmônica é dada por $-m\ddot{u} = A \sin(\omega t)$. Considera-se também $2\zeta = b/m\omega_0$, $\epsilon = \hat{V}^2 C/m\omega_0^2 l^2$, $\phi = (l/C\hat{V})\hat{\theta}$, $\rho = R_l C \omega_0$, $\bar{\omega} = \omega/\omega_0$, $\beta = \hat{\beta}/m\omega_0^2$, $\alpha = \hat{\alpha} l^2/m\omega_0^2$, $\theta = (l/C\hat{V})\mu$, e $\gamma = \frac{A}{m\omega_0^2 l}$. Dessa forma, as equações de movimento podem ser reescritas como se segue:

$$x'' + 2\zeta x' + \beta x + \alpha x^3 - \epsilon \phi v = \gamma \sin(\bar{\omega} \tau) \quad (4)$$

$$\phi x' + v' + v/\rho = 0 \quad (5)$$

onde $(\blacksquare)' \equiv d(\blacksquare)/d\tau$, e $\tau = \omega_0 t$ é o tempo adimensionalizado.

A potência gerada no sistema de colheita de energia pode ser avaliada considerando a potência instantânea de saída, $P = v^2/\rho$, ou a potência elétrica. A média dessas potências instantâneas é definida como a potência de saída, elétrica, P_{out} , da seguinte forma:

$$P_{out} = \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_0^\tau (v^2/\rho) d\tau} \quad (6)$$

O desempenho do sistema deve ser avaliado comparando a potência de saída, coletada, com a potência de entrada, mecânica, P_{in} :

$$P_{in} = \sqrt{\frac{1}{\tau} \int_0^\tau (x'(\gamma \sin(\bar{\omega}\tau)))^2 d\tau} \quad (7)$$

A eficiência do sistema de colheita de energia deve ser avaliada a partir de uma comparação entre as potências de saída e de entrada. Dessa forma, define-se o índice de eficiência:

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} \quad (8)$$

3. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

A partir do monitoramento da energia gerada e da eficiência, apresenta-se uma análise do comportamento geral do sistema com o objetivo de avaliar as condições dinâmicas mais apropriadas para a geração de energia. Os resultados foram obtidos a partir do método de Runge-Kutta de quarta ordem com um passo menor do que 10^{-4} . Parâmetros típicos de um sistema de colheita de energia biestável são utilizados e apresentados na Tabela 1 (Cellular *et al.*, 2018). Os parâmetros de forçamento, frequência $\bar{\omega}$ e amplitude γ , assumem valores diferentes de forma a avaliar condições distintas de estímulo externo que representam a energia disponível para ser coletada.

Tabela 1. Parâmetros do sistema de colheita de energia.

ζ	ϵ	ϕ	$1/\rho$	α	β
0,01	0,05	0,5	0,05	0,5	-0,5

As não linearidades associadas ao sistema mecânico do tipo *Duffing* proporcionam uma dinâmica rica ao sistema. Desta forma, a análise da capacidade de colheita de energia deve levar em consideração diferentes tipos de respostas do sistema a partir da variação dos estímulos externos. Por meio de uma amostra estroboscópica da resposta em relação a uma variação quasi-estática da frequência de forçamento pode-se obter o diagrama de bifurcação a partir da seção de Poincaré. As simulações consideram as mesmas condições iniciais ($x = 1, x' = 0$ e $v = 0$), não sendo atualizadas com a mudança da frequência. O diagrama de bifurcação fornece um panorama geral da dinâmica do sistema de colheita de energia, permitindo que se identifiquem os diferentes tipos de respostas. A Figura 1a apresenta um diagrama de bifurcação na frequência assumindo uma amplitude de forçamento $\gamma = 0,1$, denotando a posição do oscilador. O resultado mostra uma região com uma nuvem de pontos associados a respostas complexas.

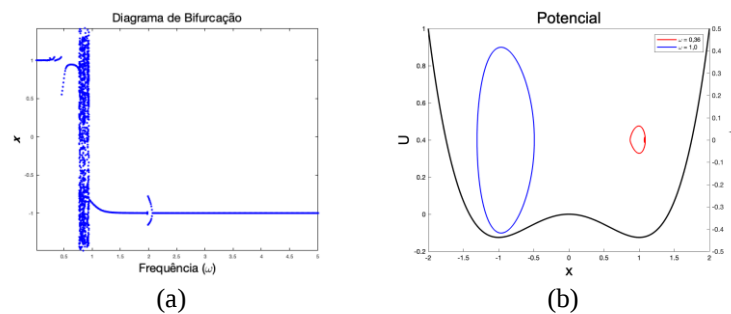


Figura 1. (a) Diagrama de bifurcação do sistema de colheita de energia considerando $\gamma = 0,1$. (b) Resposta do sistema para $\gamma = 0,1$ mostrando simultaneamente dois comportamentos periódicos envolvendo a parte negativa ($\bar{\omega} = 1,0$), a parte positiva ($\bar{\omega} = 0,36$) e a curva de energia potencial.

Algumas respostas particulares são consideradas para mostrar a riqueza de possibilidades do sistema. A Figura 1b apresenta as respostas para $\bar{\omega} = 1,0$ e $\bar{\omega} = 0,36$, mostrando o espaço de fase e a curva de energia potencial juntas, ilustrando a ideia de oscilação em torno dos pontos de equilíbrio e a sua correlação com os poços de energia potencial. Para $\bar{\omega} = 1,0$ tem-se uma resposta de período-1, associada a um dos poços do oscilador de *Duffing*, lado negativo do espaço de fase. Desta forma, as pequenas amplitudes tendem a gerar pouca energia, $P_{in} = 0,0151$ e $P_{out} = 0,0013$. Para $\bar{\omega} = 0,36$, a resposta passa a apresentar outros harmônicos, mas ainda está associada a um único poço, no lado positivo, com $P_{in} = 0,0013$ e $P_{out} = 1,0245 \times 10^{-4}$. Deve-se notar que a redução da amplitude está diretamente relacionada a redução da potência gerada, o que explica a questão da diferença da energia coletada. Outro ponto que deve ser observado é que a resposta pode alterar o poço em que oscila, mas continua contida em um único poço. Essa mudança pode estar associada a uma mudança das condições iniciais.

Quando $\bar{\omega} = 0,79$, o sistema passa a apresentar uma resposta caótica, conforme ilustrado na Figura 2. Note que esse tipo de resposta apresenta oscilações entre os três pontos de equilíbrio, visitando os dois poços de energia potencial, o que tende a gerar uma potência maior quando comparado aos casos anteriores ($P_{in} = 0,0254$ e $P_{out} = 0,0118$). Observe que a potência de saída é bem superior aos casos anteriores, da ordem de 10 vezes maior em relação a $\bar{\omega} = 1,0$.

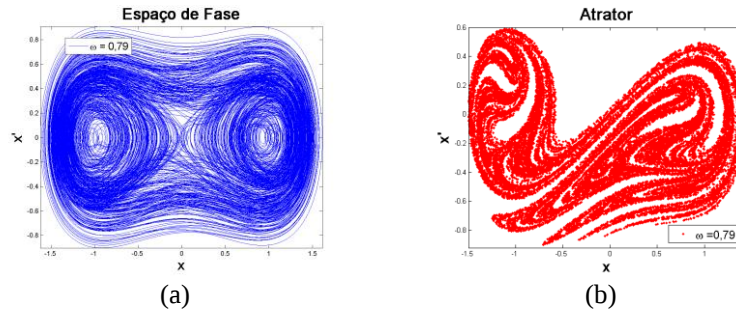


Figura 2. (a) Resposta caótica associada aos dois poços do oscilador de *Duffing*. (b) Seção de Poincaré apresentando atrator estranho.

Ao aumentar a amplitude de forçamento para $\gamma = 0,5$, as características do sistema fazem com que as respostas assumam valores bastante diferentes, o que afeta a dinâmica do sistema de maneira significativa, como se pode ver no diagrama de bifurcação da Figura 3a. Nessas condições, quando $\bar{\omega} = 0,36$, o sistema apresenta uma resposta caótica, conforme ilustrado na Figura 3b. Novamente, esse tipo de resposta está associado a oscilações em torno dos três pontos de equilíbrio, com uma potência de entrada $P_{in} = 0,2650$; enquanto a potência de saída é $P_{out} = 0,0209$. Para esse nível de estímulo externo, existem órbitas de alta energia associadas aos dois pontos de equilíbrio estável, visitando os dois poços de energia potencial. As respostas periódicas associadas aos dois poços é a melhor estratégia no que diz respeito à colheita de energia. A Figura 3c mostra um caso desse tipo, considerando $\bar{\omega} = 3,5$, em que as potências são dadas por: $P_{in} = 5,3539$ e $P_{out} = 0,2581$. Observe que a potência gerada é ainda maior do que a da resposta caótica. Contudo, a potência mecânica de entrada é, também, maior do que a da resposta caótica.

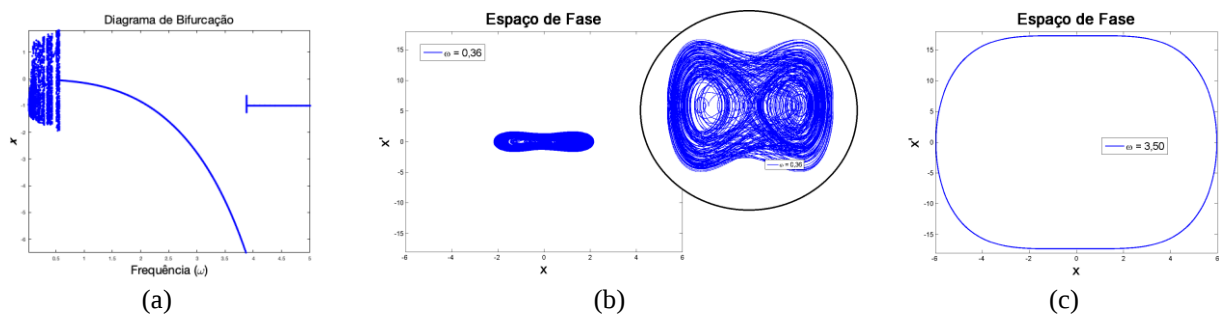


Figura 3. (a) Diagrama de bifurcação do sistema de colheita de energia ($\gamma = 0,5$). (b) Resposta caótica associada aos dois poços do oscilador de *Duffing*. (c) Resposta periódica associada aos dois poços do oscilador de *Duffing*.

Investigar as diferentes características dinâmicas do oscilador de *Duffing* pode indicar direções para as condições mais apropriadas à colheita de energia vibracional. Nesse contexto, apresenta-se uma análise da variação dos parâmetros α e β , ainda explorando o comportamento biestável, enquanto os parâmetros do acoplamento piezelétrico são mantidos os mesmos, conforme a Tabela 2.

Tabela 2. Parâmetros do sistema de colheita de energia variando os parâmetros do oscilador de *Duffing*.

ζ	ϵ	ϕ	$1/\rho$	α	β
0,01	0,05	0,5	0,05	0,3	-1,2

A Figura 4a apresenta um digrama de bifurcação considerando $\gamma = 0,1$ que mostra que o sistema possui um comportamento mais bem comportado para esse nível de excitação quando comparado ao diagrama da Figura 1. Observam-se apenas as regiões de ressonância, sem regiões caóticas. Para $\gamma = 0,5$, a Figura 4b apresenta o diagrama de bifurcação na frequência mostrando alguns saltos dinâmicos.

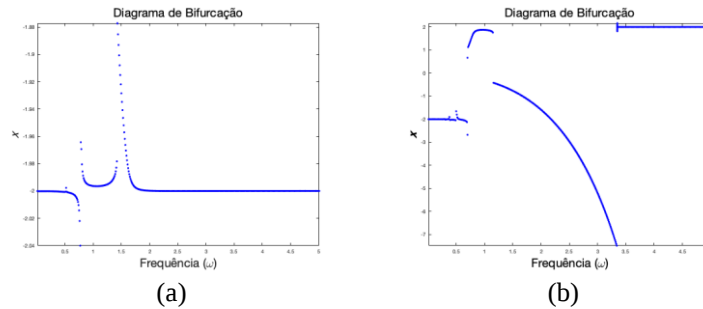


Figura 4. Diagrama de bifurcação do sistema de colheita de energia: (a) $\gamma = 0,1$; (b) $\gamma = 0,5$.

A Figura 5 apresenta a curva de energia potencial em conjunto com resposta do sistema para três frequências diferentes: $\bar{\omega} = 0,45$, $\bar{\omega} = 1,0$ e $\bar{\omega} = 3,28$. O sistema apresenta uma resposta de período-1 para as três condições, no entanto, as duas primeiras situações estão associadas às órbitas de baixa energia, que não são capazes de vencer a barreira energética e, portanto, oscilam em um único ponto de equilíbrio. Para $\bar{\omega} = 3,28$, a resposta continua sendo de período-1, mas a oscilação se dá em torno dos dois pontos de equilíbrio estáveis, visitando os dois poços de energia potencial, caracterizando uma órbita de alta energia.

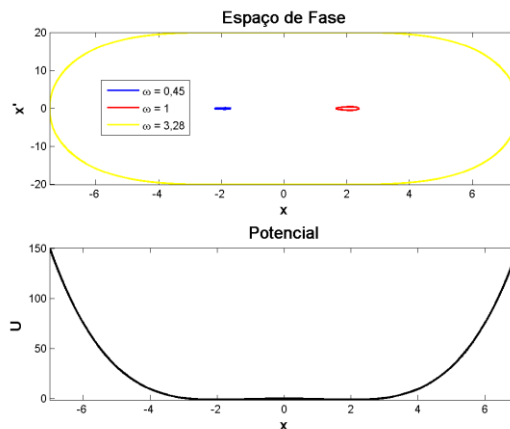


Figura 5. Resposta do sistema para $\gamma = 0,5$ incluindo o comportamento de período-1 referente à $\bar{\omega} = 3,28$ associado à energia potencial do sistema de colheita de energia.

Baseado nestas análises, pode-se concluir que a potência gerada pelo sistema de colheita de energia está relacionada com o tipo de resposta e com a amplitude do movimento. Assim, fica clara a importância de definir índices que avaliem a eficiência do sistema para gerar energia. O tipo de resposta é um fator essencial nesse sentido e deve ser incluído na análise de alguma forma. Na sequência, as análises levam em consideração a eficiência do sistema, definida como a relação entre a potência de saída e de entrada (8).

3.1. Análise da Eficiência do Sistema

A seção anterior mostra que a capacidade de colheita de energia de um sistema varia de acordo com a amplitude e com o tipo de resposta. A resposta periódica tende a coletar mais energia do que a caótica. Contudo, isso depende da amplitude, podendo existir situações em que a órbita caótica coleta mais energia. Tal característica aponta para a necessidade de uma análise mais cuidadosa a fim de estabelecer a eficiência do sistema. Esta seção apresenta uma discussão sobre a eficiência do sistema.

Considere inicialmente os casos associados à Tabela 1. A Figura 6 mostra o comportamento global do sistema quando $\gamma = 0,1$ e $\gamma = 0,5$, introduzindo a avaliação das máximas potências e eficiências para cada valor de frequência por meio de uma superposição das duas curvas. Observa-se que, para $\gamma = 0,1$, a eficiência do sistema segue a mesma tendência geral da potência de saída. Essa tendência semelhante é alterada quando $\gamma = 0,5$, que apresenta uma situação na qual ocorre uma evolução concorrente entre eficiência e potência, definindo um ponto de ótimo.

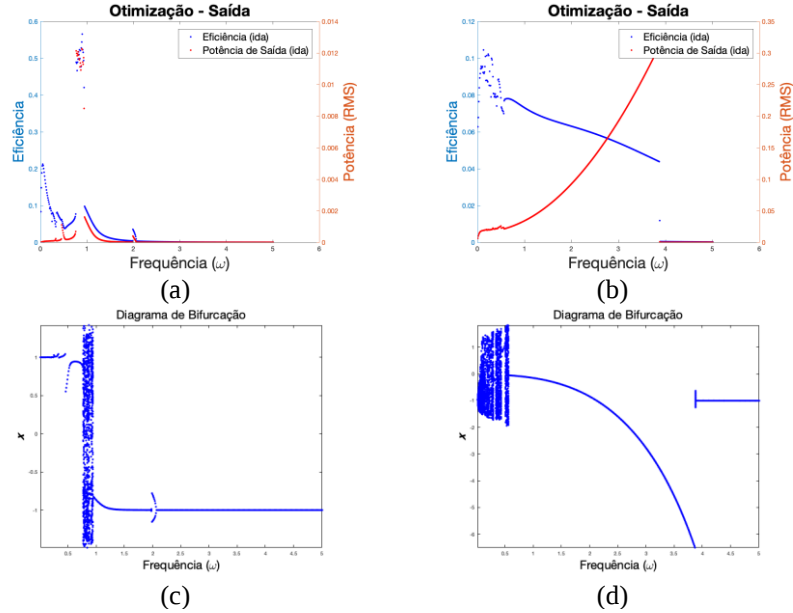


Figura 6. Resposta do sistema de colheita de energia para diferentes valores da amplitude de forçamento. Diagramas de resposta em frequência: (a) $\gamma = 0,1$; (b) $\gamma = 0,5$. Diagramas de bifurcação: (c) $\gamma = 0,1$; (d) $\gamma = 0,5$.

Para interpretar a simetria de tendência entre a potência gerada e a eficiência do sistema, observada quando $\gamma = 0,1$, é interessante avaliar os tipos de resposta envolvidos em cada caso. Para isso, alguns valores de frequência são considerados. A Figura 7 apresenta a resposta para $\bar{\omega} = 0,3$, $\bar{\omega} = 0,5$, $\bar{\omega} = 0,8$ e $\bar{\omega} = 4$, mostrando o espaço de fase. Observe que, primeiramente, o sistema apresenta uma resposta de período-1, restrita à parte positiva do espaço de fase e, portanto, oscilando em torno de um único ponto de equilíbrio (Figura 7a). Aumentando a frequência para $\bar{\omega} = 0,5$, o sistema passa a apresentar novos harmônicos, mas ainda oscilando em torno de um único ponto de equilíbrio, como exposto na Figura 7b. Em seguida, o sistema passa a responder de forma caótica em torno dos 3 pontos de equilíbrio (Figura 7c). Aumentando ainda mais a frequência para $\bar{\omega} = 4$, o sistema volta a oscilar em torno do ponto de equilíbrio com uma resposta de período-1, conforme mostrado na Figura 7d.

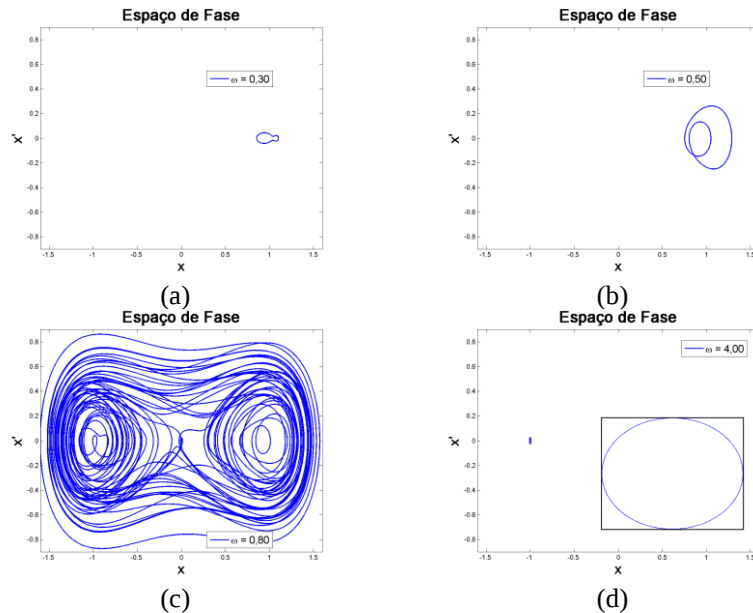


Figura 7. Análise detalhada do comportamento do sistema para algumas situações dos diagramas de resposta em frequência e de bifurcação em referência à Figura 6a e Figura 6c, considerando $\gamma = 0,1$.

Ao aumentar o forçamento para $\gamma = 0,5$, a resposta passa a contemplar a situação em que os diagramas de potência gerada e eficiência deixam de apresentar a mesma tendência (Figura 6b) e passam a apresentar um ponto de ótimo associado ao cruzamento das curvas. Uma análise detalhada de algumas respostas relacionadas a essas curvas mostra que o ponto de ótimo está relacionado a oscilações envolvendo os dois poços, confirmando o mesmo resultado mostrado para situações similares e outras amplitudes de forçamento. A Figura 8 apresenta a resposta para $\bar{\omega} = 0,25$, $\bar{\omega} = 0,5$, $\bar{\omega} = 3,01$ e $\bar{\omega} = 4$, mostrando a órbita referente às oscilações no espaço de fase. Nesse caso, o sistema responde de forma caótica, oscilando em torno dos 3 pontos de equilíbrio (Figura 8a). Em seguida, quando $\bar{\omega} = 0,5$ (Figura 8b), o sistema

passa a uma resposta periódica, abrangendo os lados negativo e positivo do espaço de fase e, portanto, oscilando em torno dos dois pontos de equilíbrio estáveis. Quando a frequência passa a ser $\bar{\omega} = 2,75$, nas vizinhanças do ponto de ótimo (Figura 8c), o sistema apresenta uma resposta de período-1, oscilando em torno dos 2 pontos de equilíbrio estável, mas com uma amplitude ainda maior. Em seguida, aumentando ainda mais a frequência para $\bar{\omega} = 4$, o sistema passa a uma resposta de período-1, restrita à parte negativa do espaço de fase, oscilando portanto, em torno de um único ponto de equilíbrio e com uma amplitude significativamente menor, conforme mostrado na Figura 8d. Esse caso está após o salto dinâmico e, portanto, possui uma redução dramática de amplitude comparado ao caso anterior.

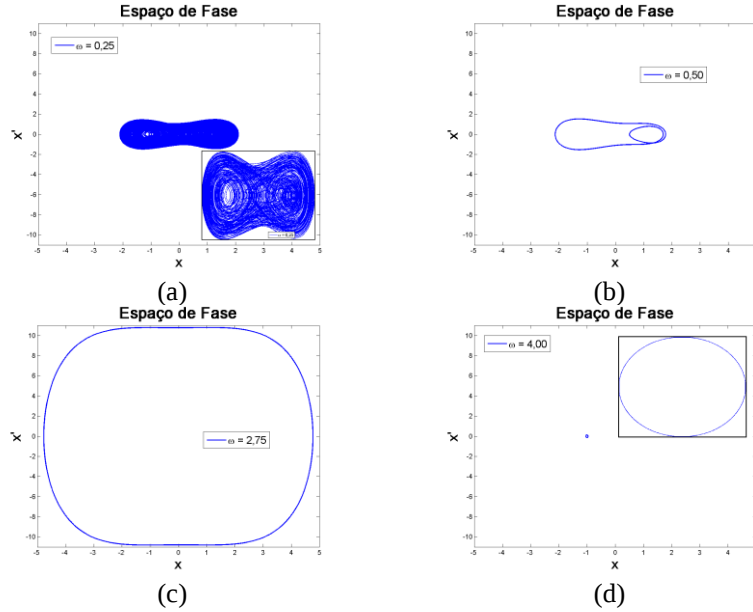


Figura 8. Análise detalhada do comportamento do sistema para algumas situações dos digramas de resposta em frequência e de bifurcação referentes à Figura 6b e à Figura 6d, considerando $\gamma = 0,5$.

Considera-se, agora, a variação dos parâmetros do oscilador de *Duffing*, utilizando os valores da Tabela 2 que altera os parâmetros α e β , associados à força de restituição. A Figura 9 mostra 3 situações de excitação externa: $\gamma = 0,1$; $\gamma = 0,5$ e $\gamma = 1,2$. Na primeira situação (Figura 9a e Figura 9d), observa-se que potência e eficiência seguem a mesma tendência. Isso se altera nos casos em que se aumentam os valores do forçamento. Com $\gamma = 0,5$ (Figura 9b e Figura 9e), e com $\gamma = 1,2$ (Figura 9c e Figura 9f), observa-se uma evolução concorrente, definindo um ponto de ótimo.

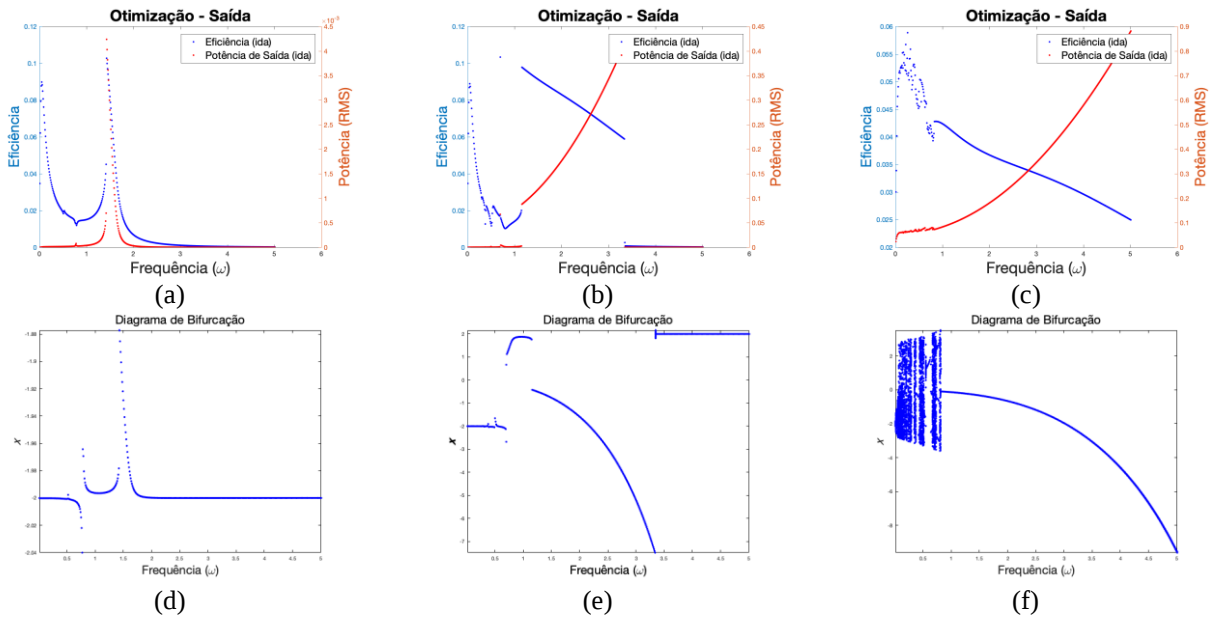


Figura 9. Resposta do sistema de colheita de energia para diferentes valores da amplitude de forçamento. Digramas de resposta em frequência: (a) $\gamma = 0,1$; (b) $\gamma = 0,5$; (c) $\gamma = 1,2$. Diagramas de bifurcação: (d) $\gamma = 0,1$; (e) $\gamma = 0,5$; (f) $\gamma = 1,2$.

Aumentando a amplitude para $\gamma = 0,5$, a resposta do sistema passa a contemplar a situação em que os diagramas de potência gerada e eficiência deixam de apresentar a mesma tendência, evidenciando novamente um ponto de ótimo associado ao cruzamento das curvas. A Figura 10 compara a resposta para as frequências $\bar{\omega} = 0,5$, $\bar{\omega} = 0,75$, $\bar{\omega} = 2,65$ e $\bar{\omega} = 4$, mostrando o espaço de fase. Observe que, para $\bar{\omega} = 0,5$ o sistema apresenta uma resposta periódica (período-3), restrita à parte positiva do espaço de fase e, portanto, oscilando em torno de um único ponto de equilíbrio (Figura 10a). Aumentando a frequência para $\bar{\omega} = 0,75$, o sistema passa a oscilar em torno de dois pontos de equilíbrio, como exposto na Figura 10b. Em seguida, nas vizinhanças do ponto de ótimo ($\bar{\omega} = 2,65$), associado ao cruzamento das curvas (Figura 9b), a resposta continua a ser de período-1, em torno dos 3 pontos de equilíbrio (Figura 10c), mostrando que o ponto de ótimo está relacionando com a oscilação envolvendo os dois poços, confirmando os resultados anteriores. Aumentando ainda mais a frequência para $\bar{\omega} = 4$ (Figura 10d), o sistema se mantém com uma resposta de período-1, mas restrita à região negativa do espaço de fase, oscilando, portanto, com uma amplitude muito pequena, em torno de um único poço, ou ponto de equilíbrio.

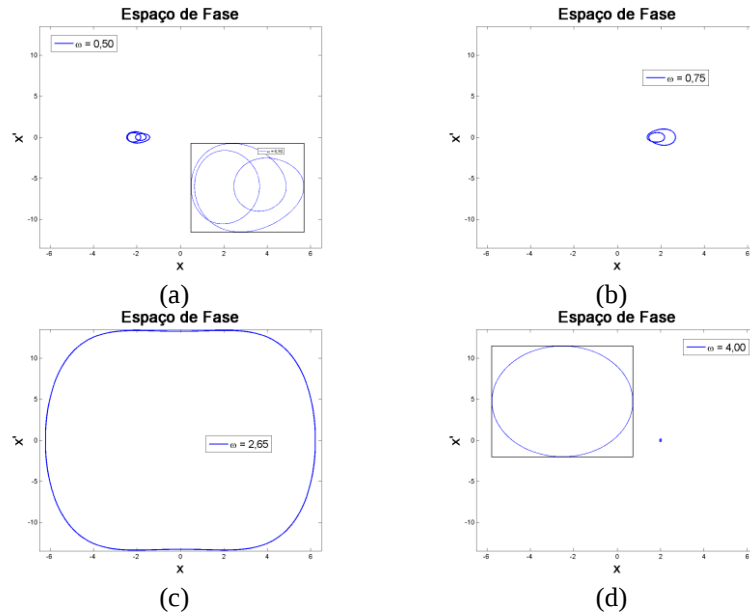


Figura 10. Análise detalhada do comportamento do sistema para algumas situações dos digramas de resposta em frequência e de bifurcação referentes à Figura 9b e Figura 9e, considerando $\gamma = 0,5$.

A Figura 11 mostra uma análise detalhada de algumas respostas do sistema para $\gamma = 1,2$, apresentando os resultados para $\bar{\omega} = 0,5$, $\bar{\omega} = 0,75$, $\bar{\omega} = 2,8$ e $\bar{\omega} = 4$, e evidencia as órbitas no espaço de fase. Nesse caso, quando $\bar{\omega} = 0,5$ o sistema responde de forma caótica, oscilando em torno dos 3 pontos de equilíbrio (Figura 11a). Em seguida, quando $\bar{\omega} = 0,75$ (Figura 11b), o sistema passa a uma resposta periódica, mas apresentando outros harmônicos e ainda abrangendo todo o espaço de estado e, portanto, oscilando em torno dos dois polos. Quando a frequência passa a ser $\bar{\omega} = 2,8$, nas redondezas do ponto de ótimo (Figura 11c), o sistema apresenta uma resposta de período-1, oscilando em torno dos 2 pontos de equilíbrio estável e com uma amplitude um pouco maior do que na situação da Figura 11b. Em seguida, aumentando ainda mais a frequência para $\bar{\omega} = 4$, o sistema continua com uma resposta de período-1, em torno dos 3 pontos de equilíbrio e com uma amplitude significativamente maior, conforme mostrado na Figura 11d. Contudo, a eficiência do sistema passa a ser menor, uma vez que o ponto de ótimo foi ultrapassado, o que significa que, apesar da potência coletada ser maior, a potência de entrada também é alta. Desta forma, respostas que visitem os dois pontos de equilíbrio estáveis são capazes de gerar mais energia. A eficiência possui a mesma correlação geral. O ponto de ótimo da curva de energia gerada e eficiência têm relação a uma resposta que visita os dois pontos de equilíbrio.

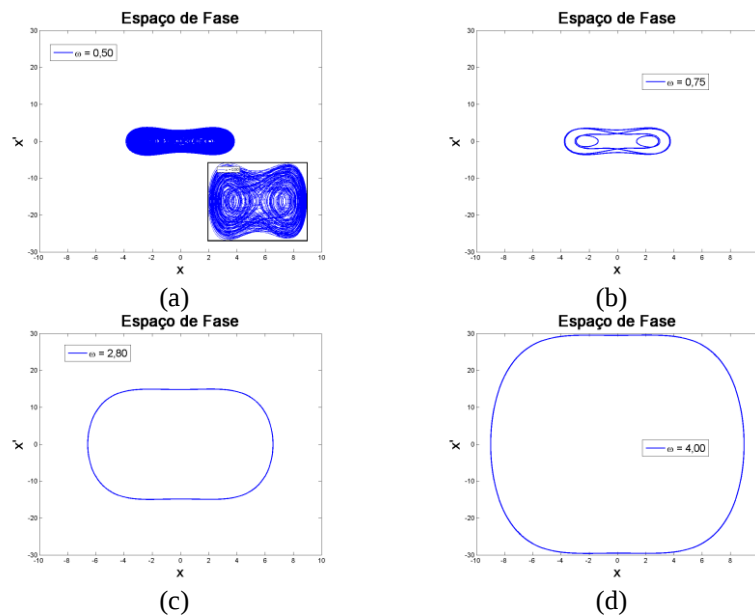


Figura 11. Análise detalhada do comportamento do sistema para algumas situações dos diagramas de resposta em frequência e de bifurcação em referência à Figura 9c e Figura 9f, considerando $\gamma = 1, 2$.

4. CONCLUSÕES

Este trabalho apresenta uma investigação sobre o efeito das não linearidades do tipo *Duffing* na colheita de energia de vibrações baseada em elementos piezelétricos. Basicamente, considera-se um modelo arquétipo composto de um oscilador mecânico acoplado a um circuito elétrico através de um elemento piezelétrico. Simulações numéricas são desenvolvidas considerando o método de Runge-Kutta de quarta ordem para um sistema biestável. O desempenho do sistema de colheita de energia é analisado monitorando as potências de saída, elétrica; potência de entrada, mecânica; e a eficiência. Os resultados mostram que a amplitude e o tipo de resposta do sistema são determinantes para a capacidade de colheita de energia. Como conclusões, verifica-se que a amplitude da resposta é mais determinante que o tipo de resposta para definir a capacidade de coletar energia de vibração. Respostas periódicas tendem a ser mais eficientes do que as caóticas. No entanto, órbitas periódicas de baixa energia apresentam desempenho pior do que órbitas caóticas. Diagramas de resposta em frequência mostram que a potência coletada e a eficiência do sistema podem seguir a mesma tendência ou apresentar características concorrentes, definindo pontos de ótimo. De uma maneira geral, o ponto de ótimo está associado a uma resposta em que o sistema visita os dois poços, possuindo uma oscilação entre os dois pontos de equilíbrio estável.

5. AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer o suporte das Agências Brasileiras CNPq, CAPES e FAPERJ.

6. REFERÊNCIAS

- Beeby S. P., Wang L., Dabin Z., Weddell A., Merrett G. V., Stark B., Szarka G. Andal-Hashimi M. B. M., 2013, "A comparison of power output from linear and non-linear kinetic energy harvesters using real vibration data", *Smart Materials and Structures*, v. 22 (7), pp.075022.
- Cammarano A., Neild S. A., Burrow S. G. And Inman D. J., 2014, "The bandwidth of optimized nonlinear vibration-based energy harvesters", *Smart Materials and Structures* v.23, pp: 055019-055028.
- Cellular, A. C., Da Silva Monteiro L. L., Savi A. A., 2018, "Numerical investigation of nonlinear mechanical and constitutive effects on piezoelectric vibration-based energy harvesting", *tm-Technisches Messen*, v. 85, pp. 565-579.
- Chiacchiari S., Romeo F., Mcfarland D. M., Bergman L. A., Vakakis A. F., 2018, "Vibration energy harvesting from impulsive excitations via a bistable nonlinear attachment—Experimental study", *Mechanical Systems and Signal Processing*, In press.
- Daqaq M. F., Masana R., Erturk A. And Quinn D. D., 2014, "On the role of nonlinearities in vibratory energy harvesting: a critical review and discussion". *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 66-040801, pp. 1-23.
- Erturk A., Hoffmann J., And Inman D. J., 2009, A piezomagnetoelastic structure for broadband vibration energy harvesting, *Applied Physics Letters*, v. 94(25), pp: 254102.
- Erturk A. & Inman D.J., 2011. **Piezoelectric energy harvesting**, John Wiley & Sons, Chichester, UK.
- Fan K., Tan Q., Liu H., Zhang Y., Cai M., 2019, Improved energy harvesting from low-frequency small vibrations through a monostable piezoelectric energy harvester, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v.117, pp. 594-608.

- Leadenham S. & Erturk A., 2015. Unified nonlinear electroelastic dynamics of a bimorph piezoelectric cantilever for energy harvesting, sensing and actuation, *Nonlinear Dynamics*, v.79, pp.1727–1743.
- Savi M. A., 2017, *Dinâmica não-linear e caos*, Rio de Janeiro: E-papers.
- Shun Y. C. & Lien I. C., 2006. Analysis of power output for piezoelectric energy harvesting systems, *Smart Materials and Structures*, v.15, 1499–1512.
- Silva L.L., Oliveira S.A., Pacheco P.M.C.L. & Savi M.A., 2015. Synergistic use of smart materials for vibration-based energy harvesting, *European Physical Journal – Special Topics*, v.224, n.14-15, pp.3005-3012.
- Silva L. L., Monteiro P. C. C., Savi M. A. & Netto T. A., 2015. On the nonlinear behavior of the piezoelectric coupling on vibration-based energy harvesters, *Shock and Vibration*, v. 2015, Article ID 739381.
- Silva L.L., Savi M.A., Monteiro Jr, P.C.C & Netto T.A., 2013. On the effect of the piezoelectric hysteretic behavior in the vibration-based energy harvesting, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v.24, 1278-1285.
- Stanton S.C., McGehee C.C. & Mann B.P., 2009, Reversible hysteresis for broadband magnetopiezoelectric energy harvesting, *Applied Physics Letters*, v.95 (17), 174103.
- Stanton S.C., Erturk A., Mann B. P. & Inman D. J., 2010. Nonlinear piezoelectricity in electroelastic energy harvesters: modeling and experimental identification, *Journal of Applied Physics*, v.108(7), 074903.
- Talha J. A., Mehidi N., Noui M. N., 2013, *Energy Harvesting Powered Wireless Monitoring and Control in Oil and Gas*, Society of Petroleum Engineers, SPE-167486-MS, SPE.
- Triplett A. & Quinn D.D., 2009. The effect of non-linear piezoelectric coupling on vibration-based energy harvesting, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v.20, 1959-1967.
- Yan L., Lallart M., Karami A., 2019, Low-cost orbit jump in nonlinear energy harvesters through energy-efficient stiffness modulation, *Sensors and Actuators A: Physical*, v. 285, pp.676-684.
- Yang Z., Zhou S., Zu J., Inman D., 2018, High-performance piezoelectric energy harvesters and their applications, *Joule*, v. 2 (4), pp. 642-697

7. RESPONSABILIDADE AUTORAL

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho.

NONLINEAR DYNAMICS OF DUFFING-TYPE PIEZOELECTRIC ENERGY HARVESTING DEVICES

Fernando Savi Drummond, fernando.savi@mecanica.coppe.ufrj.br¹

Luciana Loureiro da Silva Monteiro, lucianals.monteiro@gmail.com¹

Marcelo A. Savi, savi@mecanica.coppe.ufrj.br²

¹ CEFET/RJ, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica e Tecnologia de Materiais (PPEMM), Rio de Janeiro, RJ, Brasil

² Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE – Engenharia Mecânica, Centro de Mecânica Não-Linear, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Abstract. *Piezoelectric vibration-based energy harvesting has developed an increasing interest in different fields. The great nowadays challenge is to enhance and improve the energy harvesting capacity in order to turn feasible several applications. In this regard, mechanical, electrical and electro-mechanical coupling nonlinearities have been studied. This work investigates the effect of Duffing-type nonlinearities on energy harvesting devices by considering an archetypal system composed by a mechanical oscillator coupled to an electric circuit through a piezoelectric element. The performance of the energy harvesting system is analyzed through diagrams of electrical output power, mechanical input power and efficiency as a function of frequency. Results show that the excitation amplitude and the type of system response are essential for energy harvesting. Amplitude variations can introduce considerable changes in the behavior of the harvested electrical power and efficiency, defining regions of interest to improve the performance of energy harvesting devices.*

Keywords: *Smart materials, piezoelectric materials, Energy harvesting, nonlinear dynamics.*