

ESTABILIZAÇÃO DE UM MECANISMO *BALL-AND-WHEEL* UTILIZANDO O MÉTODO DE CONTROLE COM REJEIÇÃO ATIVA DE DISTÚRBIOS

Lúcio Mascarenhas Fernandes, lucio.fernande3s@aluno.cefet-rj.br¹

Indiara Firmino Brito, indiara.brito@aluno.cefet-rj.br¹

Josiel Alves Gouvêa, josiel.gouvea@cefet-rj.br²

Wallace Moreira Bessa, wallace.moreirabessa@utu.fi³

Alessandro Rosa Lopes Zachi, alessandro.zachi@cefet-rj.br¹

Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca (CEFET/RJ)

¹Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica (PPEEL) - Laboratório de Controle e Automação (LACEA)

Avenida Maracanã 229, Bairro Maracanã

CEP 20.271-110 - Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

²Coordenação de Engenharia de Controle e Automação (COENCA) - Núcleo de Pesquisa em Mecatrônica (NUPEM)

Estrada de Adrianópolis 1317, Bairro Santa Rita, Nova Iguaçu

CEP 26.041-271 - Nova Iguaçu, Rio de Janeiro, Brasil.

³University of Turku

Department of Mechanical and Materials Engineering

Joukahaisenkatu 3, 20520 Turku, Finland.

Resumo: Este trabalho versa sobre o projeto de um controlador robusto para a estabilização de um sistema bola-sobre-roda. Trata-se de um mecanismo composto por uma bola que rola livremente sobre o arco de circunferência de uma roda, estando esta última fixada ao eixo de um motor elétrico de corrente contínua (DC). A função do motor DC é atuar na roda, fazendo-a desenvolver uma dada velocidade angular que será responsável por posicionar a bola em uma dada posição de equilíbrio sobre a circunferência da roda. Para atingir tal objetivo de estabilização, este trabalho descreve o projeto e a implementação de uma lei de controle para gerar a tensão elétrica adequada para o motor DC, que é baseada no método de controle com rejeição ativa de distúrbios (ADRC). Uma das principais motivações para a escolha e utilização desta técnica está na sua capacidade de compensar as variações paramétricas do modelo matemático e lidar com a natureza não linear do mesmo. Esta variação paramétrica citada pode ocorrer por vários motivos: envelhecimento de componentes, mudança de características estruturais durante sua operação, variação de massa/carga, falta de conhecimento exato dos valores, por imperfeições na modelagem, dentre outras. A abordagem discutida neste trabalho considera uma versão linear do método ADRC que apresenta a característica adicional de simplicidade de implementação. Como forma de ilustrar a utilização do controlador proposto e seu desempenho na estabilização do sistema bola-sobre-roda, são apresentados e discutidos alguns resultados de simulação, nos quais são realizadas comparações com outros métodos de controle reportados na literatura.

Palavras-chave: Método ADRC, controle robusto, sistemas incertos, ball-on-wheel, estabilização dinâmica.

1. INTRODUÇÃO

O controle de sistemas mecânicos subatuados é um assunto que vem despertando o interesse de vários pesquisadores ao longo dos anos (Chen and Huang, 2012; Chen *et al.*, 2020; da Silva Lima and Bessa, 2022). Na literatura técnica, há uma série de trabalhos publicados que discutem e apresentam técnicas de controle aplicadas em vários destes sistemas como, por exemplo, no pêndulo invertido (Wang, 2011; Waszak and Łangowski, 2020), no *ball-and-beam* (Keshmiri *et al.*, 2012; Mehedi *et al.*, 2019), no *ball-and-plate* (Wang *et al.*, 2007; Bang and Lee, 2018), no mecanismo de suspensão magnética (Pan *et al.*, 2018; Wei *et al.*, 2019), nos drones de decolagem/aterrisagem vertical (VTOL) (Snyder *et al.*, 2021; Betancourt *et al.*, 2020), e no mecanismo *ball-and-wheel* (Ho *et al.*, 2009; Yazdi Mirmokhalesouni and Yazdanpanah, 2015; Pezhman *et al.*, 2020). O fato de estes sistemas dinâmicos não lineares apresentarem um número menor de atuadores do que graus de liberdade, torna as soluções para o problema de controle mais desafiadoras, indo ao encontro de várias aplicações reais nas áreas de sistemas aeroespaciais (Yang, 2016), transporte de cargas, robôs humanóides (Liu *et al.*, 2020), modelagem e estabilização de foguetes (Zhao *et al.*, 2022), simuladores, dentre outras.

No caso do sistema *ball-and-wheel*, alguns trabalhos já utilizaram o método de linearização por realimentação (Ho *et al.*, 2009; Yazdi Mirmokhalesouni and Yazdanpanah, 2015; Pezhman *et al.*, 2020). Este método mostra-se bastante preciso quando o modelo matemático do sistema é perfeitamente conhecido, isto é, suas equações e parâmetros. Porém, quando ocorrem incertezas paramétricas e erros na modelagem, o desempenho em malha fechada é afetado de forma negativa, em geral. Esta falta de robustez pode levar a instabilidade do sistema, que é uma situação indesejável. Em (Neves *et al.*, 2020; Pezhman *et al.*, 2020), os autores aplicam o método de controle por modos deslizantes por se tratar de uma técnica robusta a erros na modelagem. Contudo, o esquema proposto pelos autores envolve uma implementação complexa envolvendo a combinação de outras estratégias como linearização por realimentação, adaptação de parâmetros e controle PD.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Neste trabalho, considera-se o problema de controle e estabilização de movimento de um mecanismo bola-sobre-roda, que é mais conhecido na literatura pelo termo em inglês *Ball-on-Wheel* Pezhman *et al.* (2020). Trata-se de um mecanismo composto por uma roda giratória de raio r_R que mantém contato com uma bola (esfera) de raio r_B , conforme ilustrado na Figura 1. O centro da roda é fixado ao eixo de um motor de corrente contínua (*Direct-Current* - DC) responsável por girar a mesma e equilibrar a Bola que se desloca livremente sobre sua circunferência. Na configuração ilustrada na Fig. 1, O_R representa a origem do sistema de coordenadas (fixo) da Roda, m_B [Kg] representa a massa da Bola, θ_1 [rad] representa o ângulo de deslocamento do eixo da Bola em relação ao eixo Y , θ_2 [rad] representa o ângulo de rotação da Roda em relação ao eixo Y . A constante g é a aceleração da gravidade em m/s^2 . O objetivo de controle é atuar na variável θ_2 (Roda), via o motor DC, para estabilizar a Bola na posição vertical $\dot{\theta}_1 = \theta_1 = 0$.

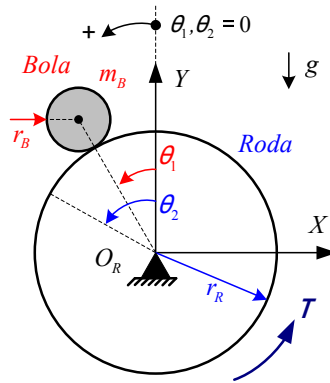


Figura 1: Diagrama do sistema Bola-sobre-Roda.

Tendo em vista que o ângulo θ_2 e a velocidade $\dot{\theta}_2$ [rad/s] da Roda (e do motor DC) são controlados por uma tensão elétrica V_m [Volts], então o objetivo de estabilização do mecanismo pode ser atingido pela escolha de uma lei de formação conveniente para V_m .

3. MOTIVAÇÃO E METODOLOGIA ADOTADA

Para atingir objetivo de controle formulado na seção anterior, este trabalho descreve o projeto de uma lei de controle para V_m utilizando uma variante do Método de Controle com Rejeição Ativa de Distúrbios Linear (*Linear Active Disturbance Rejection Control* - LADRC) (Han, 1998, 2009). As principais motivações para a escolha deste método estão relacionadas às suas conhecidas propriedades de robustez em malha fechada (Madoński *et al.*, 2015): (i) contra incertezas paramétricas do modelo matemático; (ii) contra distúrbios externos; (iii) contra dinâmicas não modeladas. A variante proposta neste trabalho consiste numa estratégia ADRC que utiliza um estimador (ou observador) de estados estendido (ESO), de ordem reduzida, para gerar uma lei de controle com apenas um único estado estimado. A implementação deste método ADRC proposto segue ilustrada no diagrama da Figura 2, e é inspirada na método MP-ADRC (*Modified-Plant ADRC*) discutido na referência (Zachi *et al.*, 2019).

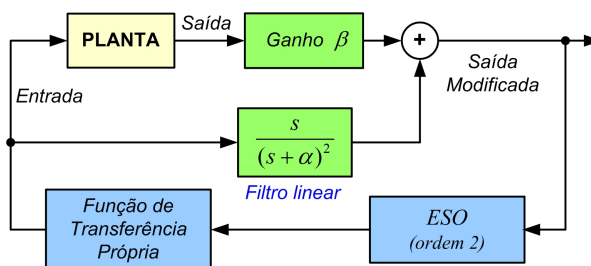


Figura 2: Diagrama do LADRC proposto.

Como pode se observado no diagrama da Fig. 2, a solução proposta consiste em modificar convenientemente a

dinâmica de entrada/saída da planta da Eq. (17) pela inserção de um ganho constante β em série com a saída da planta, e um filtro linear e estável em paralelo com o sistema resultante. Em (Zachi *et al.*, 2019), foi demonstrado que a adoção de tal configuração, além de manter as propriedades de robustez já conhecidas do método LADRC tradicional (Zheng *et al.*, 2011; Madoński *et al.*, 2015), introduz uma habilidade adicional de compensação de incertezas de larga escala no ganho de controle da planta. Neste sentido, consegue-se relaxar a hipótese de conhecimento exato sobre o ganho de controle da planta, passando a requerer apenas o conhecimento a priori do seu sinal (+/-).

4. MODELAGEM MATEMÁTICA

Nesta seção, as equações dinâmicas do sistema bola-sobre-roda são obtidas utilizando o formalismo de Lagrange-Euler (Ho *et al.*, 2009; Pezhman *et al.*, 2020) que é descrito pela seguinte equação básica:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial L}{\partial q} = Q, \quad (1)$$

sendo $L \in \mathbb{R}$ a função de Lagrange, $q = [\theta_1; \theta_2]^T$ o vetor de coordenadas generalizadas do sistema, e $Q = [0; \tau]^T$ o vetor de torques e forças generalizadas. A função L é definida como sendo $L = T - V$, sendo $T \in \mathbb{R}$ a energia cinética total (Bola + Roda) e $V \in \mathbb{R}$ a energia potencial total (Bola + Roda) do sistema. Neste caso, tem-se

$$T_R = \frac{1}{2} I_R \dot{\theta}_2^2, \quad T_B = \frac{1}{2} m_B (r_R + r_B)^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_B \dot{\theta}_2^2, \quad T = T_R + T_B, \quad V = m_B g (r_B + r_R) \cos(\theta_1). \quad (2)$$

Nas notações da Eq. (2), foram utilizados os sub-índices 'B' e 'R' para denotarem as variáveis e os parâmetros associados às componentes 'bola' e 'roda', respectivamente. Na Eq. (2), as constantes escalares I_R e I_B representam os momentos de inércia da roda e da bola, respectivamente. A partir das expressões matemáticas das Eq. (2), a função L pode ser calculada como sendo:

$$L = T - V = \frac{1}{2} I_R \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m_B (r_R + r_B)^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_B (r_R \dot{\theta}_2 - r_B \dot{\theta}_1)^2 - m_B g (r_R + r_B) \cos(\theta_1). \quad (3)$$

Assim, após substituir a função de Lagrange da Eq. (3) na definição da Eq. (18), obtém-se as seguintes equações dinâmicas¹:

$$7(r_B + r_R) \ddot{\theta}_1 - 2r_R \ddot{\theta}_2 - 5g \sin(\theta_1) = 0, \quad -\frac{2}{5} r_R m_B (r_R + r_B) \ddot{\theta}_1 + \left(I_R + \frac{2}{5} r_R^2 m_B \right) \ddot{\theta}_2 = \tau. \quad (4)$$

Nas expressões da Eq. (4), $\tau \in \mathbb{R} [Nm]$ é o torque gerado pelo motor na roda, para equilibrar a bola sobre a circunferência da roda. A relação entre o torque τ gerado pelo motor e a tensão elétrica V_m [Volts] aplicada em seus terminais, pode ser descrita pela seguinte expressão (Pezhman *et al.*, 2020):

$$\tau = \frac{K_m}{R_a} V_m - \frac{K_m^2}{R_a} \dot{\theta}_2, \quad (5)$$

na qual $K_m > 0 \in \mathbb{R}$ é a constante mecânica do motor, e $R_a > 0 \in \mathbb{R}$ é o valor da resistência elétrica da armadura do motor. Observe que, para fins de simplificação dos desenvolvimentos, as expressões da Eq. (4) podem ser rescritas em termos das constantes

$$k_{11} := 7(r_B + r_R), \quad k_{12} := -2r_R, \quad k_{21} := -\frac{2}{5} r_R m_B (r_R + r_B), \quad k_{22} := \left(I_R + \frac{2}{5} r_R^2 m_B \right), \quad (6)$$

isto é,

$$k_{11} \ddot{\theta}_1 + k_{12} \ddot{\theta}_2 = 5g \sin(\theta_1), \quad k_{21} \ddot{\theta}_1 + k_{22} \ddot{\theta}_2 = \tau. \quad (7)$$

ou então, no seguinte formato matricial:

$$K \ddot{q} = h(q) + b \tau, \quad K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}, \quad \ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad h(q) = \begin{bmatrix} 5g \sin(\theta_1) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Na Eq. (8), se a matriz K for inversível então é possível isolar, no primeiro membro, o vetor $\ddot{q}$ das acelerações angulares. De acordo com as expressões matemáticas da Eq. (6), o valor numérico do determinante da matriz K é dado por

$$k_{11} k_{22} - k_{12} k_{21} = [2(r_R^2 m_B) + 7I_R] (r_R + r_B), \quad (9)$$

que é sempre positivo, uma vez que os valores dos parâmetros dinâmicos r_B , r_R , m_B , I_R do mecanismo são todos positivos. Logo, a partir da Eq. (9), conclui-se que K é inversível e a Eq. (8) pode ser reescrita na forma:

$$\ddot{q} = K^{-1} h(q) + K^{-1} b \tau, \quad K^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} k_{22} & -k_{12} \\ -k_{21} & k_{11} \end{bmatrix}}{k_{11} k_{22} - k_{21} k_{12}}. \quad (10)$$

¹Os desenvolvimentos matemáticos realizados para se obter as expressões das Eqs. (4) e (9) são extensos e não serão apresentados neste trabalho. Contudo, para acompanhar o passo-a-passo, o leitor pode consultar a referência (Ho *et al.*, 2009).

não mensuráveis do sistema, além dos parâmetros dinâmicos do mecanismo que aparecem nas definições das constantes λ_1, λ_2 . A característica principal do formalismo LADRC básico é que, diante do formato da planta da Eq. (17), é possível projetar um estimador de estados estendido ou ESO (do termo original, *Extended State Observer*), cujo vetor de estados $\hat{X} = [\hat{X}_1; \hat{X}_2; \hat{X}_3]^T$ é escolhido de acordo com a definição do vetor de estados da planta, a saber, $X = [X_1; X_2; X_3]^T = [\theta_1; \dot{\theta}_1; F(t)]^T$. Nesta abordagem, a função do ESO é produzir uma estimativa $\hat{X}_3$ do distúrbio generalizado $F(t)$ e utilizar esta estimativa para compensar o termo real via uma lei de controle V_m conveniente. Uma outra característica do método LADRC básico merece destaque aqui. Observe que por conta da inserção da variável de estado adicional X_3 , a dinâmica resultante do estimador (ESO) passa a ser de terceira ordem, enquanto que a planta possui uma dinâmica de segunda ordem. Este aumento de uma unidade na ordem do ESO é uma característica comum encontrada em várias estratégias propostas na literatura (Zheng *et al.*, 2011; Madoński *et al.*, 2015; Zachi *et al.*, 2019), baseadas no ADRC. No método MP-ADRC apresentado neste trabalho, propõe-se uma estratégia um pouco diferente da metodologia discutida em (Zachi *et al.*, 2019). Trata-se de uma abordagem na qual o ESO possui ordem menor ou igual a ordem da planta. Nas próximas seções, esta variante MP-ADRC é descrita em detalhes.

5.1 Desenvolvimentos iniciais

Como pode ser observado no diagrama da Fig. 2, a solução apresentada neste trabalho consiste em decompor a estrutura do sistema *ESO-Controlador* em dois blocos distintos, conectados em cascata, com as seguintes características: (1) um bloco composto por uma função de transferência de primeira ordem, própria e realizável e; (2) um bloco composto por um estimador de estados (ESO) de ordem 2.

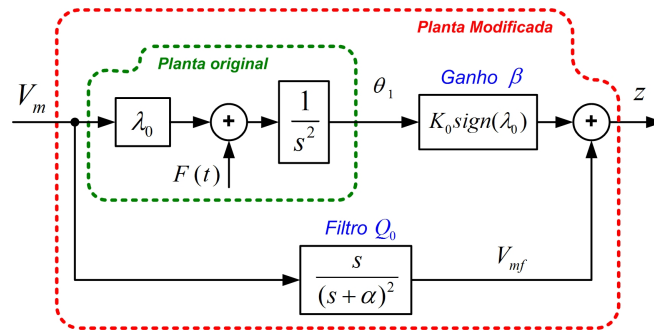


Figura 4: Diagrama em blocos da implementação MP-ADRC.

É importante ressaltar que, embora o sistema ESO-Controlador como um todo continue possuindo ordem 3, a parte relativa ao observador isolado passa a ter ordem 2. Esta é a característica principal do método ADRC proposto neste trabalho. Relembrando que o objetivo de controle do mecanismo é atingir a condição $\dot{\theta}_1 = \theta_1 = 0, \forall t$, então θ_1 pode ser considerada como a própria variável de erro de saída do sistema da Eq. (17). Logo, a partir do diagrama da Figura 4 é possível extrair as seguintes equações:

$$z = \beta \theta_1 + V_{mf}, \quad \ddot{V}_{mf} = -\alpha_1 \dot{V}_{mf} - \alpha_0 V_{mf} + \dot{V}_m, \quad \beta = K_0 \text{sign}(\lambda_0). \quad (18)$$

sendo $z \in \mathbb{R}$ o erro de saída da planta modificada, $K_0 > 0 \in \mathbb{R}$ uma constante de projeto, $V_{mf} \in \mathbb{R}$ a versão filtrada do sinal de controle V_m , e $\alpha_1, \alpha_0 \in \mathbb{R}$ os coeficientes do polinômio mônico e estável $(s + \alpha)^2$ que é escolhido pelo projetista. Nesta abordagem, $\alpha > 0$ também é uma constante de projeto. A dinâmica do erro z é obtida a partir da descrição da Eq. (18) no domínio da frequência:

$$Z(s) = \beta \Theta_1(s) + V_{mf}(s) = \beta \Theta_1(s) + \left[\frac{s}{(s + \alpha)^2} \right] V_m(s). \quad (19)$$

Multiplicando-se os dois membros da Eq. (19) pelo termo $(s + \alpha)$, tem-se que:

$$Z(s)(s + \alpha) = \overbrace{\beta \Theta_1(s)(s + \alpha)}^{\Lambda(s)} + \overbrace{\left(\frac{s}{s + \alpha} \right) U(s)}^{V_1(s)}, \quad (20)$$

na qual são definidos o sinal de controle auxiliar $V_1(s)$ (e $v_1(t)$) e o novo distúrbio generalizado $\Lambda(s)$ (e $\Lambda(t)$), para simplificar a notação. Reescrevendo a Eq. (20) no domínio do tempo, tem-se que:

$$\dot{z} + \alpha z = \Lambda(t) + v_1(t). \quad (21)$$

A expressão da Eq.(21) corresponde à dinâmica da *planta reformulada* que será o ponto de partida para o projeto do ESO e da lei de controle propostos neste trabalho. Observe que a EDO no primeiro membro de (21) é estável e possui ordem 1. Logo, uma lei de formação para o controle virtual $v_1(t)$ poderia ser dada por

$$v_1(t) = -\Lambda(t), \quad (22)$$

o que resultaria exatamente em

$$\dot{z} + \alpha z = 0 \quad \longrightarrow \quad z \rightarrow 0. \quad (23)$$

Entretanto, como o termo $\Lambda(t)$ não é uma quantidade mensurável, será necessário projetar e utilizar um ESO para estimar $\Lambda(t)$. Neste caso, o vetor de estados é composto pela variável z da planta modificada e pela variável $\Lambda(t)$, resultando em um ESO de ordem 2.

5.2 Dinâmica do ESO e projeto da lei de controle

Após escolher o vetor de estados estendido como $Z = [z, \Lambda]^T = [Z_1, Z_2]^T$, a representação de estados da planta em (21) e do ESO correspondente assumirão os seguintes formatos:

$$\text{Planta} : \dot{Z} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_A Z + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_B v_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_C \dot{\Lambda}, \quad (24)$$

$$\text{ESO} : \dot{\hat{Z}} = \begin{bmatrix} -\alpha & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{Z} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_L v_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}}_L e_y, \quad e_y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C (Z - \hat{Z}), \quad (25)$$

nas quais são definidas as matrizes A , B , C das representações e o vetor de ganhos $L \in \mathbb{R}^2$ do ESO. Os elementos de L , em geral, são escolhidos para satisfazer a equação característica da malha fechada do ESO, ou seja,

$$\det[sI - (A - LC)] = (s + w_0)^2 = s^2 + L_1 s + L_2, \quad (26)$$

sendo $w_0 > 0 \in \mathbb{R}$ a constante de projeto que define o polo desejado para a malha fechada do ESO. Novamente considerando que o estimador em (25) é convenientemente projetado, a lei de controle auxiliar em (22), pode ser redefinida como:

$$v_1 = -\hat{Z}_2. \quad (27)$$

5.3 Implementação

Como o projeto LADRC proposto na seção anterior foi realizado considerando uma planta modificada de ordem 1 menor do que a ordem 2 da planta original da Eq. (17), a lei de controle obtida na Eq. (27) não pode ser aplicada diretamente na Eq. (17) e precisa ser transformada utilizando as relações dinâmicas introduzidas pela expressão da Eq. (20), ou seja:

$$V_1(s) = \left(\frac{s}{s + \alpha} \right) V_m(s) \quad \longrightarrow \quad V_m(s) = - \left(\frac{s + \alpha}{s} \right) V_1(s). \quad (28)$$

Observe que a função de transferência $V_m \rightarrow v_1$ da Eq. (28) é própria. Portanto, esta admite uma função de transferência inversa realizável de $v_1 \rightarrow V_m$. O diagrama em blocos da implementação do ESO em (26) e das leis de controle, em (27) e (28), segue ilustrado na Figura 3. Os blocos que compõem o ESO seguem destacados, conforme previsto na formulação proposta neste trabalho. Uma vantagem desta abordagem está no fato de que a ordem reduzida implica também na redução do alto ganho característico dos controladores ADRC (Zheng *et al.*, 2011).

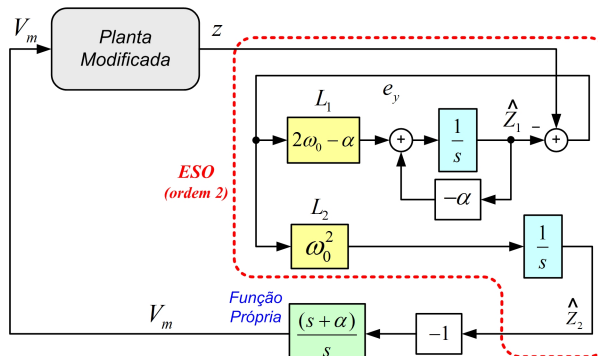


Figura 5: Diagrama em blocos da implementação ESO-Controlador proposta neste trabalho.

6. ANÁLISE DE ESTABILIDADE E ESCOLHA DAS CONSTANTES DE PROJETO

Uma propriedade importante dos controladores ADRC, que será útil nos desenvolvimentos a seguir, diz respeito à relação dinâmica entre o termo do distúrbio generalizado Λ e sua estimativa $\hat{\Lambda} = \hat{Z}_2$, que é dada por (Zachi *et al.*, 2019):

$$\hat{Z}_2(s) = \underbrace{\left(\frac{w_0}{s + w_0} \right)^2}_{M(s)} \Lambda(s). \quad (29)$$

Manipulando-se as equações em (20), (22), (28) e (29), é possível estabelecer a relação dinâmica entre $V_m(s)$ e $\Theta_1(s)$:

$$V_m(s) = -M(s) \left[\frac{\beta(s + \alpha)^2}{s} \right] \Theta_1(s). \quad (30)$$

Ao substituir a expressão da Eq. (30) na planta definida no diagrama da Figura 4, obtém-se o diagrama da malha fechada do sistema na Fig. 6.

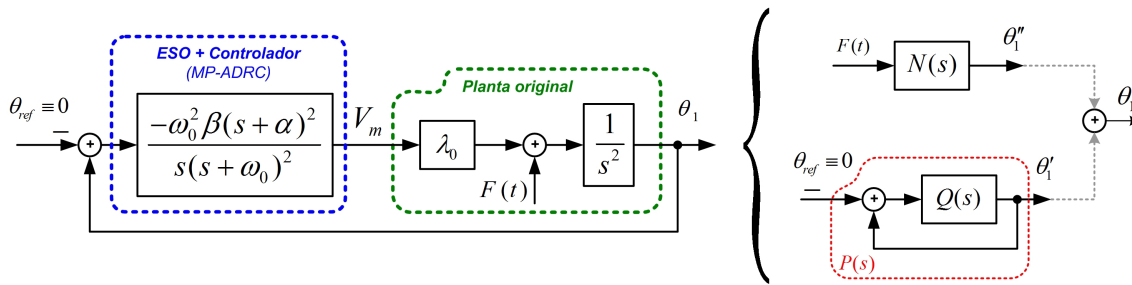


Figura 6: Diagrama em blocos do sistema em malha fechada.

Utilizando o princípio da superposição, é possível analisar que o efeito do distúrbio generalizado $F(t)$ na saída θ_1 é governado pela função de transferência $N(s)$, e que a convergência de θ_1 para $\theta_{ref} \equiv 0$ é governada pela função de transferência $P(s)$, cujas definições são dadas a seguir.

$$N(s) = \frac{s(s + w_0)^2}{s^3(s + w_0)^2 + w_0^2 \lambda_0 \beta (s + \alpha)^2}, \quad P(s) = \frac{-w_0^2 \lambda_0 \beta (s + \alpha)^2}{s^3(s + w_0)^2 + w_0^2 \lambda_0 \beta (s + \alpha)^2}. \quad (31)$$

No diagrama da Fig. 6, o bloco $Q(s)$ representa a função de transferência da malha aberta dada por:

$$Q(s) = \frac{w_0^2 \lambda_0 \beta (s + \alpha)^2}{s^3(s + w_0)^2} = \frac{\mathcal{K} (s + \alpha)^2}{s^3(s + w_0)^2}. \quad (32)$$

A estabilidade do sistema em malha fechada, isto é, das funções $N(s)$ e $P(s)$, pode ser estabelecida observando-se o gráfico do *Lugar das Raízes* da função de malha aberta $Q(s)$, na Figura 7. Além disso, esta mesma análise possibilita definir as constantes de projeto α , w_0 e K_0 , definidas na Eq. (18). Estas escolhas podem ser feitas definindo-se, no gráfico, as posições das raízes desejadas para a malha fechada, e calculando-se o ganho $\mathcal{K}$ do lugar das raízes conforme definido pela Eq. (32). Para a definição das constantes: (i) Em primeiro lugar, escolhem-se os valores de w_0 e α ; (ii) em seguida, traça-se o gráfico do lugar das raízes (LR) de $Q(s)$; (iii) definem-se as posições das raízes desejadas no gráfico LR; (iv) calcula-se o ganho $\mathcal{K}$ correspondente; (v) determina-se o valor de K_0 a partir das Eqs. (18) e (32). Quando λ_0 é uma constante incerta, utiliza-se em seu lugar um valor nominal conhecido para dar sequência com o cálculo das constantes de projeto mencionadas anteriormente. Ainda na Fig. 7, nos exemplos das curvas de magnitude das respostas em frequência de $N(s)$ e $P(s)$, observam-se as características de ‘rejeição’ de $N(s)$ e de ‘transmissão direta’ de $P(s)$. Neste exemplo ilustrativo, o ganho linear máximo que $N(s)$ confere ao distúrbio generalizado, dentro da banda passante $w \leq 100 \text{ rad/s}$, é de $-40 \text{ dB} \equiv 0,01$. No caso de $P(s)$, o ganho linear máximo é de $0 \text{ dB} \equiv 1$.

7. SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

Os parâmetros utilizados nas simulações para o modelo matemático do mecanismo foram extraídos da referência (Pezhman *et al.*, 2020), a saber: $I_R = 1,17 \times 10^{-3} \text{ kgm}^2$; $r_R = 0,075 \text{ m}$; $m_B = 0,042 \text{ kg}$; $r_B = 0,011 \text{ m}$; $R_a = 0,6558 \Omega$; $K_m = 0,0662 \text{ Nm/A}$; $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Para fins de comparação com outros métodos de controle, as simulação são executadas considerando um controlador PD clássico e o controlador por modos deslizantes proposto na referência (Neves *et al.*, 2020). Os resultados obtidos seguem ilustrado na Fig. 8. Os parâmetros utilizados no controlador PD são: $K_p =$, $K_d =$. No MP-ADR, os parâmetro de projeto adotados são: $w_0 = 420$, $K_0 = 2$, $\alpha = 10$.

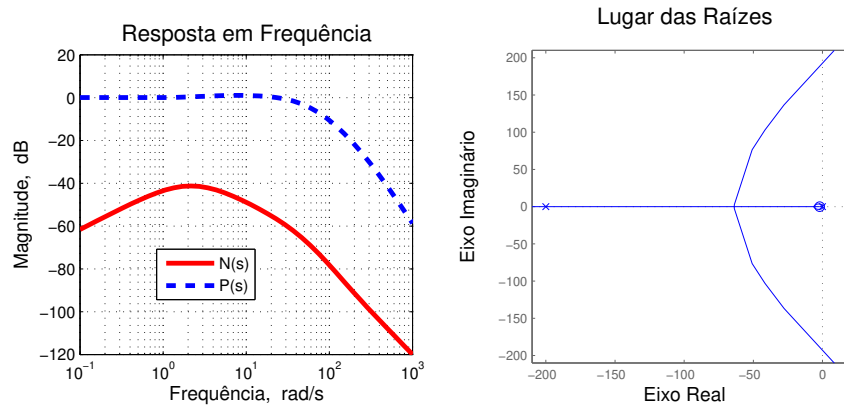


Figura 7: **Análise de estabilidade.** (a) Curva de magnitude de $N(s)$ e $P(s)$. (b) Gráfico do Lugar das Raízes de $Q(s)$.

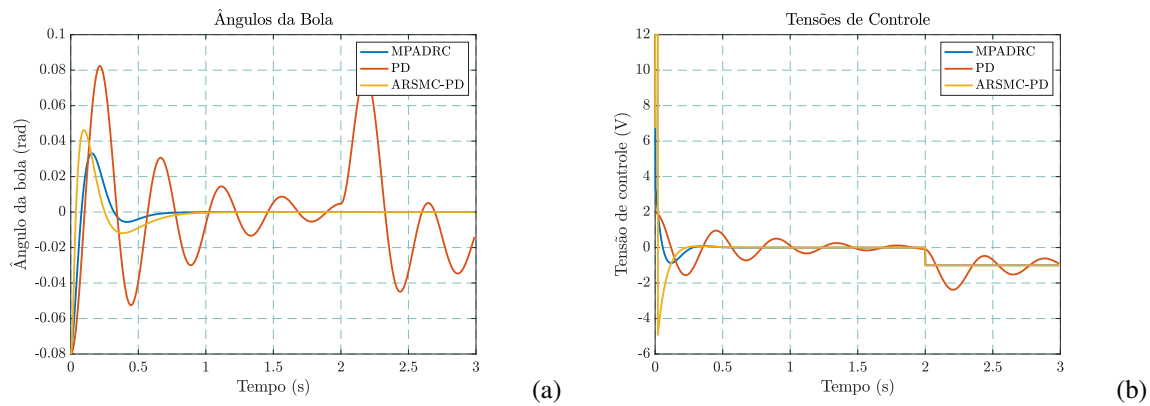


Figura 8: **Resultados de simulação.** (a) Curvas obtidas para o ângulo da bola θ_1 . (b) Sinal de controle V_m gerado.

7.1 Discussões dos resultados

Na Fig. 8(a) são mostradas as curvas obtidas para o ângulo θ_1 da bola, com os três controladores adotados. Nesta simulação foi introduzida uma perturbação constante de 1 Volt na entrada do sistema. Observe que a natureza não linear da planta afeta visivelmente o desempenho do controlador PD. Com os controladores ARSMC-PD e MP-ADRC a convergência é mais rápida e suave, mesmo na presença da perturbação de entrada. Esta característica também pode ser comprovada pelos perfis dos sinais de controle V_m gerados pelos controladores analisados, na Fig. 8(b). Uma observação importante é que as amplitudes dos sinais de controle permaneceram dentro do limite de tensão elétrica de ± 12 Volts do motor DC acoplado na roda. Com relação aos controladores ARSMC-PD e MP-ADRC, percebe-se um desempenho bastante similar em termos de convergência do ângulo θ_1 , e uma pequena diferença nas amplitudes dos sinais de controle. Estas podem ser explicadas por suas diferentes implementações. No caso do ARSMC-PD, há uma combinação de estruturas de controle linear e não linear nos desenvolvimentos apresentados em (Neves *et al.*, 2020), que resultam em uma implementação mais complexa. No caso do ADRC, a estrutura de controle é formada por blocos lineares de simples implementação.

8. CONCLUSÃO

Este trabalho discutiu uma variação do método ADRC para aplicação em sistemas com parâmetros incertos. A solução de controle proposta introduz uma classe de estimador estendido que é composto por um observador tradicional em cascata com uma função de transferência própria e realizável. Pelos resultados discutidos neste trabalho, mostra-se que adotando-se a estratégia de controle proposta é possível reduzir a ordem do observador/estimador, em termos de seus ganhos. Este último fato contribui significativamente para a simplicidade de implementação da estratégia, que é uma característica desejável nos projetos de controle automático. Além disso, comprovava-se as propriedades de robustez contra distúrbios e incertezas paramétricas do modelo matemático do sistema, uma vez estas informações não são exigidas no projeto das leis de controle.

9. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CEFET/RJ e as agências de fomento FAPERJ, CAPES e CNPq pelo apoio financeiro.

10. REFERÊNCIAS

- Bang, H. and Lee, Y.S., 2018. "Implementation of a ball and plate control system using sliding mode control". *IEEE Access*, Vol. 6, pp. 32401–32408.
- Betancourt, J., Castillo, P. and Lozano, R., 2020. "Stabilization and tracking control algorithms for vtol aircraft: Theoretical and practical overview". *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, Vol. 100, No. 3, pp. 1249–1263.
- Chen, X., Zhao, H., Sun, H., Zhen, S. and Al Mamun, A., 2020. "Optimal adaptive robust control based on cooperative game theory for a class of fuzzy underactuated mechanical systems". *IEEE Transactions on Cybernetics*.
- Chen, Y. and Huang, A., 2012. "Controller design for a class of underactuated mechanical systems". *IET control theory & applications*, Vol. 6, No. 1, pp. 103–110.
- da Silva Lima, G. and Bessa, W.M., 2022. "Sliding mode control with gaussian process regression for underactuated mechanical systems". *IEEE Latin America Transactions*, Vol. 100, No. XXX.
- Han, J., 1998. "Active disturbance rejection controller and its applications". (in Chinese) *Control Decis.*, Vol. 13, No. 1, pp. 19–23.
- Han, J., 2009. "From PID to active disturbance rejection control". *IEEE transactions on Industrial Electronics*, Vol. 56, No. 3, pp. 900–906.
- Ho, M., Tu, Y. and Lin, H., 2009. "Controlling a ball and wheel system using full-state-feedback linearization [focus on education]". *IEEE Control Systems Magazine*, Vol. 29, No. 5, pp. 93–101.
- Keshmiri, M., Jahromi, A.F., Mohebbi, A., Hadi Amoozgar, M. and Xie, W., 2012. "Modeling and control of ball and beam system using model based and non-model based control approaches." *International Journal on Smart Sensing & Intelligent Systems*, Vol. 5, No. 1.
- Liu, C., Zhang, T., Liu, M. and Chen, Q., 2020. "Active balance control of humanoid locomotion based on foot position compensation". *Journal of Bionic Engineering*, Vol. 17, No. 1, pp. 134–147.
- Madoński, R., Gao, Z. and Łakomy, K., 2015. "Towards a turnkey solution of industrial control under the active disturbance rejection paradigm". In *54th Annual Conference of the Society of Instrument and Control Engineers of Japan (SICE)*. IEEE, pp. 616–621.
- Mehedi, I.M., Al-Saggaf, U.M., Mansouri, R. and Bettayeb, M., 2019. "Two degrees of freedom fractional controller design: Application to the ball and beam system". *Measurement*, Vol. 135, pp. 13–22.
- Neves, G.P., Angélico, B.A. and Tannuri, E.A., 2020. "Controle por modos deslizantes para sistemas sub-atuado aplicado em um sistema ball-and-wheel". In *Congresso Brasileiro de Automática-CBA*. Vol. 2.
- Pan, J., Li, W. and Zhang, H., 2018. "Control algorithms of magnetic suspension systems based on the improved double exponential reaching law of sliding mode control". *International Journal of Control, Automation and Systems*, Vol. 16, No. 6, pp. 2878–2887.
- Pezhman, A., Rezapour, J. and Mahmoodabadi, M.J., 2020. "An optimal hybrid adaptive controller based on the multi-objective evolutionary algorithm for an under-actuated nonlinear ball and wheel system". *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 34, No. 4, pp. 1723–1734.
- Snyder, S., Zhao, P. and Hovakimyan, N., 2021. "Adaptive control for linear parameter-varying systems with application to a vtol aircraft". *Aerospace Science and Technology*, Vol. 112, p. 106621.
- Wang, H., Tian, Y., Sui, Z., Zhang, X. and Ding, C., 2007. "Tracking control of ball and plate system with a double feedback loop structure". In *2007 International Conference on Mechatronics and Automation*. IEEE, pp. 1114–1119.
- Wang, J., 2011. "Simulation studies of inverted pendulum based on pid controllers". *Simulation Modelling Practice and Theory*, Vol. 19, No. 1, pp. 440–449.
- Waszak, M. and Łangowski, R., 2020. "An automatic self-tuning control system design for an inverted pendulum". *IEEE Access*, Vol. 8, pp. 26726–26738.
- Wei, W., Xue, W. and Li, D., 2019. "On disturbance rejection in magnetic levitation". *Control Engineering Practice*, Vol. 82, pp. 24–35.
- Yang, Y., 2016. "Controllability of spacecraft using only magnetic torques". *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 52, No. 2, pp. 954–961.
- Yazdi Mirmokhalesouni, S.D. and Yazdanpanah, M.J., 2015. "Peaking attenuation in high-gain observers using adaptive saturation: Application to a ball and wheel system". *AUT Journal of Modeling and Simulation*, Vol. 47, No. 1, pp. 33–40.
- Zachi, A.R.L., Correia, C.A.M., Azevedo Filho, J.L. and Gouvêa, J.A., 2019. "Robust disturbance rejection controller for systems with uncertain parameters". *IET Control Theory & Applications*, Vol. 13, No. 13, pp. 1995–2007.
- Zhao, Z., Cai, G., Zhao, B., Liu, Y. and Yu, N., 2022. "Experimental investigation of a flow-oriented throttleable injector designed for throttleable hybrid rocket motor". *Acta Astronautica*, Vol. 192, pp. 122–132.
- Zheng, Q. and Chedella, K.K., Xu, W. and Wu, L., 2011. "Reduced-order active disturbance rejection control for induction motors". In *2011 IEEE International Conference on Control Applications (CCA)*. IEEE, pp. 1139–1144.

11. RESPONSABILIDADE AUTORAIS

Os autores declaram que são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho.

STABILIZATION OF A BALL-AND-WHEEL MECHANISM BY USING THE ACTIVE DISTURBANCE REJECTION CONTROL METHOD

Lúcio Mascarenhas Fernandes, lucio.fernande3s@aluno.cefet-rj.br¹

Indiara Firmino Brito, indiara.brito@aluno.cefet-rj.br¹

Josiel Alves Gouvêa, josiel.gouvea@cefet-rj.br²

Wallace Moreira Bessa, wallace.moreirabessa@utu.fi³

Alessandro Rosa Lopes Zachi, alessandro.zachi@cefet-rj.br¹

Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca (CEFET/RJ)

¹Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica (PPEEL) - Laboratório de Controle e Automação (LACEA)

Avenida Maracanã 229, Bairro Maracanã

CEP 20.271-110 - Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

²Coordenação de Engenharia de Controle e Automação (COENCA) - Núcleo de Pesquisa em Mecatrônica (NUPEM)

Estrada de Adrianópolis 1317, Bairro Santa Rita, Nova Iguaçu

CEP 26.041-271 - Nova Iguaçu, Rio de Janeiro, Brasil.

³University of Turku

Department of Mechanical and Materials Engineering

Joukahaisenkatu 3, 20520 Turku, Finland.

Abstract: *This work deals with the design of a robust controller for the stabilization of a ball-and-wheel system. It is a mechanism composed of a ball that rolls freely on the circumference of a wheel, the latter being fixed to the axis of a direct current (DC) electric motor. The function of the DC motor is to act on the wheel, causing it to develop a given angular velocity that will be responsible for positioning the ball in a given equilibrium position on the circumference of the wheel. To achieve this stabilization objective, this work describes the design and implementation of a control law to generate the adequate voltage for the DC motor, which is based on the Active Disturbance Rejection Control (ADRC) method. One of the main motivations for choosing and using this technique is its ability to compensate for the parametric uncertainties of the mathematical model of the system as well as for its non-linear nature. This mentioned parametric variation can occur for several reasons: aging of components, change of structural characteristics during its operation, mass/load variation, lack of exact knowledge of the values, or due to imperfections in the system modeling, among others. The approach discussed in this work considers a linear version of the ADRC method that presents the additional characteristic of simplicity of implementation. As a way of illustrating the use of the proposed controller and its performance in stabilizing the ball-and-wheel system, some simulation results are presented and discussed, in which comparisons are made with other control methods reported in the literature.*

Keywords: ADRC method, robust control, uncertain systems, ball-and-wheel, dynamic stabilization.