

CONTROLE PASSIVO DE VIBRAÇÕES EM PLACAS VIA OTIMIZAÇÃO DE TOPOLOGIA DE CAMADAS RESTRITAS

Ferdinand Kanke, ferdinand.2k@gmail.com¹
Sandmara Lanhi, sandmara_lanhi@hotmail.com¹
Jucélio Tomás Pereira, jucelio.tomas@ufpr.br¹

¹Laboratório de Mecânica dos Sólidos Computacional, Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Centro Politécnico, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 81530-000, Brasil.

Resumo: Normalmente, a ocorrência de vibrações em estruturas é considerada como um problema relevante, pois, além de gerar ruído causando desconforto acústico, pode conduzir a estrutura ao colapso. Nesse sentido, tornam-se necessários meios de controle que reduzam a vibração. No caso especial de placas e/ou cascas, um método que se destaca devido à sua fácil implementação e ao baixo custo é o controle passivo pelo uso de camada restrita (CR). Neste método, uma camada de material viscoelástico (MVE) é disposta sobre a estrutura vibrante e a camada de MVE é recoberta por outra camada, geralmente de material metálico. Desta forma, uma parcela da energia vibratória é dissipada predominantemente pela distorção em cisalhamento do MVE. Essa distorção é causada pela diferença de deslocamentos entre a estrutura vibrante e a camada metálica restritora. No entanto, as aplicações das camadas restritas devem ser adequadamente projetadas, para que se obtenha êxito no controle de vibração e ruído. Para isso, podem ser utilizadas diversas ferramentas numéricas em conjunto, tais como a associação do Método dos Elementos Finitos (MEF) e técnicas de otimização de topologia estrutural. Com isso, é possível obter a distribuição ótima da CR sobre a estrutura base em análise. Este trabalho teve como objetivo desenvolver uma metodologia para controle passivo de vibrações em placas isotrópicas excitadas harmonicamente, obtendo a distribuição ótima de uma quantidade limitada de CR. A análise de vibrações da estrutura foi realizada utilizando o MEF, por meio da formulação de placas laminadas com camadas discretas, na qual cada camada é modelada utilizando a teoria cisalhante de primeira ordem. O comportamento do MVE foi descrito pelo modelo constitutivo de Zener fracionário. As posições ótimas das camadas restritas, variáveis de projeto, foram obtidas via algoritmos genéticos considerando uma restrição na quantidade da área de recobrimento. A metodologia proposta foi implementada utilizando o software Matlab®. O caso analisado é uma placa engastada-livre-livre-livre, para qual é apresentado o controle de vibração em banda larga em frequência, que compreende os três primeiros modos, e controle de vibração do primeiro e segundo modo, individualmente. Os resultados apresentam uma boa redução dos níveis de vibração, de forma que aproximadamente 25 dB foram reduzidos nos picos da inércia para o caso de banda larga e aproximadamente 20 dB no controle do primeiro e segundo modo individuais.

Palavras-chave: Modelo de Zener Fracionário, Métodos dos Elementos Finitos, Modelo de Reissner-Mindlin, Algoritmos Genéticos, Material viscoelástico.

1. INTRODUÇÃO

Placas planas são comumente utilizadas como componentes estruturais em muitos ramos da engenharia moderna, como nas áreas da mecânica, aeroespacial, eletrônica, naval e outras. Frequentemente, equipamentos projetados com placas estão sujeitos a vibrações, sendo que neste tipo de estrutura podem ocorrer deformações e gerar ruído, além de conduzir à falha por fadiga estrutural. Com objetivo de reduzir estes efeitos, várias técnicas de controle de vibrações têm sido propostas, entre elas o controle passivo. Trabalhos voltados ao estudo e aplicações de técnicas de controle passivo de vibração podem ser encontradas entre outros, em Baz (2019) e Madhekar e Matsagar (2022).

Uma metodologia que tem demonstrado ser eficiente no controle de vibrações desse tipo de estrutura é o controle passivo por meio da utilização de camada restrita (CR) e material viscoelástico (MVE). Esta técnica parte da utilização de uma estrutura base, a qual se deseja controlar a vibração, coberta, de forma total ou parcial, por uma camada de MVE sobreposta por uma camada metálica (Fig. 1).

Inicialmente, vigas laminadas com MVE serviram de base para estudos envolvendo CR. Com a utilização de CR, a dissipação da energia vibratória é realizada pela distorção em cisalhamento da camada de MVE, posicionada entre a estrutura base e a camada restritora (Chen *et al.*, 2021 e Madeira *et al.*, 2020).

A técnica de controle passivo por CR tem se mostrado eficiente em grandes faixas de frequência e apresentado baixo custo relativo, tanto no seu desenvolvimento quanto em sua manutenção (Cunha-Filho *et al.*, 2016). Além disso, a utilização de CR com MVE tem como vantagem a capacidade de realizar uma quantidade consideravelmente elevada de dissipação da energia vibratória, sem alterar significativamente a rigidez ou a massa da estrutura.

Contudo, frequentemente, cobrir toda a estrutura com CR pode ser inviável, visto que as limitações de custo e peso podem tornar essa tarefa impraticável. Assim, torna-se necessário utilizar uma quantidade limitada de MVE e CR, mas localizada em posições ótimas, para que ocorra um controle ideal da vibração da estrutura. Para isso, busca-se determinar a configuração ótima da distribuição da CR. Para tal tarefa, podem ser utilizadas técnicas de otimização topológica, as quais visam determinar a distribuição de CR dentro de um domínio específico de projeto que, neste caso, pode ser uma área limitada de cobertura.

Neste sentido, este trabalho visa apresentar uma metodologia de otimização topológica de CR para controle de vibrações em placas excitadas harmonicamente, com o intuito de determinar a configuração ótima de MVE e CR, considerando uma restrição de limitação da área de recobrimento. Para isso, o Método dos Elementos Finitos (MEF) foi utilizado para modelagem e para análise de vibrações de placas laminadas, e o algoritmo genético (AG) foi utilizado no processo de otimização. O comportamento do MVE foi descrito utilizando o modelo de Zener fracionário. A metodologia foi desenvolvida utilizando o software Matlab®, onde a placa se encontra engastada-livre-livre-livre e vários modos de vibração foram considerados para a estrutura em questão.

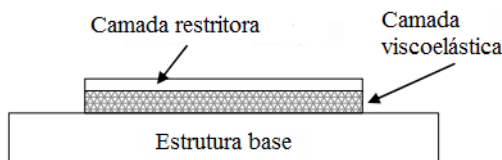


Figura 1. Estrutura com camada de restrição.
FONTE: Kanke (2017).

2. MATERIAIS VISCOELÁSTICOS

Atualmente, os MVEs são amplamente utilizados em diversas aplicações, como pneus, coxins, indústria aeroespacial, equipamentos médicos, indústria eletrônica, produtos voltados ao esporte, entre outros. Os MVEs são materiais que, quando submetidos a esforços externos, apresentam comportamento elástico e viscoso, simultaneamente. Vários modelos mecânicos foram desenvolvidos para representar tal comportamento. Esses modelos são constituídos por elementos de mola (elementos de Hooke) e elementos de amortecimento (elemento viscoso, ou elemento dissipativo). As primeiras tentativas de representar o comportamento dos MVEs foram realizadas por Maxwell, Kelvin e Voigt (Brinson e Brinson, 2008). O modelo de Maxwell combina mola e amortecedor viscoso dispostos em série (Fig. 2(a)), enquanto o estudo realizado por Kelvin-Voigt utiliza um modelo que combina mola e amortecedor viscoso em paralelo (Fig. 2(b)). Além dos modelos citados, um modelo bastante utilizado é de Zener (Fig. 2(c)). O comportamento dos modelos clássicos para MVEs podem ser encontrados de forma detalhada em diversos textos clássicos na literatura, como Gibson (2007), Findley *et al.* (1976), Mainardi (2010), entre outros.

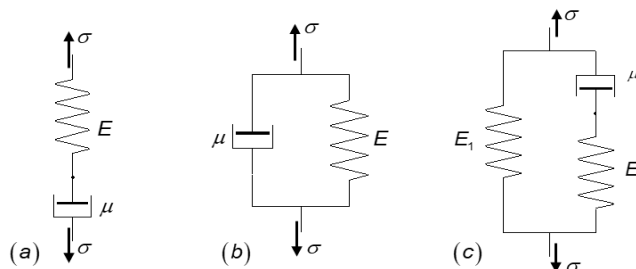


Figura 2. Modelos reológicos de (a) Maxwell, (b) Kelvin-Voigt e (c) Zener.

Os modelos de Maxwell, Kevin-Voigt e Zener são compostos por elementos de mola e amortecedor, e o que os diferencia é a quantidade e o arranjo de cada um dos elementos. Contudo, os modelos de Maxwell e Kelvin-Voigt falham ao representar os diversos comportamentos de um MVE. Já o modelo de Zener é capaz de realizar uma boa aproximação tanto para fluência quanto para relaxação (Findley *et al.*, 1976; Gibson, 2007). Estes três modelos se enquadram em um modelo mais amplo, dito generalizado, que envolve uma grande quantidade de elementos elásticos e de dissipação viscosa, cuja equação diferencial é dada por

$$\left[1 + \sum_{i=1}^p b_i \frac{d^i}{dt^i} \right] \sigma(t) = \left[a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \frac{d^i}{dt^i} \right] \varepsilon(t), \quad (1)$$

onde a_0 , a_i e b_i são parâmetros que representam o modelo mecânico adotado, $\varepsilon(t)$ e $\sigma(t)$ representam a função de deformação e tensão, respectivamente, e $\frac{d^i}{dt^i}$ é o operador diferencial de ordem inteira, p e q estão relacionados aos números totais de elementos. Os valores de p e q necessitam ser inteiros. A Eq. (1) é denominada de equação constitutiva do MVE baseada em derivadas inteiras. Esse modelo generalizado possui uma boa capacidade de representar o comportamento dos MVEs. Porém, para tal, exige muitos termos no somatório. Uma alternativa para reduzir o número de termos da série

é utilizar o cálculo fracionário, no qual as ordens de diferenciação e integração podem assumir valores não inteiros. Essa característica permite realizar um melhor ajuste da curva que retrata o comportamento mecânico do MVE, alterando o valor da ordem de diferenciação (Pritz, 1996).

O uso do cálculo fracionário em viscoelasticidade linear permite generalizar o conceito dos modelos da mecânica clássica de modo que o elemento de amortecimento de Newton é substituído pelo modelo de Scott Blair (Mainardi, 2010). No modelo de amortecimento de Newton, as forças de dissipação são proporcionais à primeira derivada dos deslocamentos. Ou seja, proporcionais à velocidade de deformação. No segundo modelo, as forças de amortecimento são proporcionais a uma derivada de ordem não inteira (não necessariamente fracionária) dos deslocamentos. Essa ordem de diferenciação é uma característica do material sendo, portanto, um parâmetro a ser identificado via experimentos físicos (Sousa *et al.*, 2017).

Desta forma, a equação diferencial constitutiva para o modelo de Zener fracionário é dada por (Mainardi, 2010)

$$\sigma(t) + b_1 \frac{d^{\beta_1} \sigma(t)}{dt^{\beta_1}} = a_0 \varepsilon(t) + a_1 \frac{d^{\beta_1} \varepsilon(t)}{dt^{\beta_1}}. \quad (2)$$

Assim, os parâmetros materiais que devem ser obtidos experimentalmente para determinar o comportamento do MVE são a_0 , a_1 , b_1 e β_1 . Observa-se que β_1 é a ordem da derivada que assume valores reais entre 0 e 1.

Aplicando a transformada de Fourier à Eq. (2) e realizando a relação entre tensão e deformação no domínio da frequência (Ω), tem-se que o módulo de elasticidade complexo do MVE é (Pritz, 1996; Lopes *et al.*, 2004 e Jalocha *et al.*, 2015)

$$E_c(\Omega) = \frac{\sigma(\Omega)}{\varepsilon(\Omega)} = \frac{E_0 + E_\infty b_1 (i\Omega)^\beta}{1 + b_1 (i\Omega)^\beta}. \quad (3)$$

Realizando as substituições: $a_0 = E_0$ é o módulo de elasticidade dinâmico quando a frequência tende a zero, $a_1 = E_\infty b_1$, onde E_∞ é o módulo de elasticidade dinâmico quando a frequência tende ao infinito, $\beta_1 = \beta$, e $b_1 = (b_0 \alpha(T))^\beta$ é a constante do tempo de relaxação do material, onde a constante b_0 é determinada para uma temperatura de referência T_0 . E, por fim, α_T é conhecido como fator de translação temperatura-frequência, definido, segundo o modelo WLF (Williams–Landel–Ferry), como

$$\log_{10} \alpha_T = \frac{-c_1(T - T_0)}{c_2 + (T - T_0)}, \quad (4)$$

onde c_1 e c_2 são parâmetros do material obtidas experimentalmente, T_0 é a temperatura de referência e T é a temperatura de trabalho do MVE.

A Eq. (3) define o módulo complexo do modelo constitutivo do MVE de derivada fracionária com quatro parâmetros (E_0 , E_∞ , b_1 e β) no domínio da frequência. Esta equação pode ser reescrita na forma

$$E_c(\Omega) = E_{Re}(\Omega) + iE_{Im}(\Omega) = E_{Re}(\Omega)(1 + i\eta(\Omega)), \quad (5)$$

onde $E_{Re}(\Omega)$ e $E_{Im}(\Omega)$ são a parte real e imaginária do módulo complexo, $E_c(\Omega)$, respectivamente, e $\eta(\Omega)$ é o fator de perda do material.

2.1 Placas Laminadas

A teoria da deformação de placas em camadas, base do modelo de camadas discretas adotado neste estudo, associa dois campos de rotações independentes à cada uma das camadas (Xu *et al.*, 2015 e Moreira *et al.*, 2006). Assim, considerando uma placa laminada constituída de n_c camadas (Fig. 3), pode-se associar a cada ponto da camada genérica k uma rotação em torno do eixo x (β_k^x) e uma rotação em torno do eixo y (β_k^y), particulares para cada camada e independentes das demais, como representado na Fig. 3. A continuidade dos deslocamentos entre as camadas é assegurada na formulação do campo de deslocamentos, definida neste trabalho como componente de acoplamento.

O modelo de placa por camadas é usualmente designado por modelo de camadas discretas (MCD), também conhecido por modelo zig-zag. Segundo Moreira *et al.* (2006), pode-se definir o campo de deslocamentos de uma camada genérica k ($k = 3, 4, \dots$) como

$$\{u_k\} = \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u + \frac{h_1}{2} \beta_1^x + \sum_{j=2}^{k-1} h_j \beta_j^x + \frac{h_k}{2} \beta_k^x + z_k \beta_k^x \\ v + \frac{h_1}{2} \beta_1^y + \sum_{j=2}^{k-1} h_j \beta_j^y + \frac{h_k}{2} \beta_k^y + z_k \beta_k^y \\ w \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

onde $\{u_k\}$ é o vetor do campo de deslocamentos, u, v e w são os deslocamentos translacionais da camada de referência ($k=1$), h_k é a espessura de uma camada genérica e $z_k \in \left[-\frac{h_k}{2}, \frac{h_k}{2}\right]$.

Com base no campo de deslocamentos, descrito pela Eq. (6), as deformações em qualquer ponto de uma camada genérica k podem ser obtidas usando as relações cinemáticas da Mecânica do Contínuo considerando pequenas deformações e postas na forma matricial, como

$$\{\varepsilon_k\} = [L]\{u_k\}, \quad \text{onde } [L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}^T. \quad (7)$$

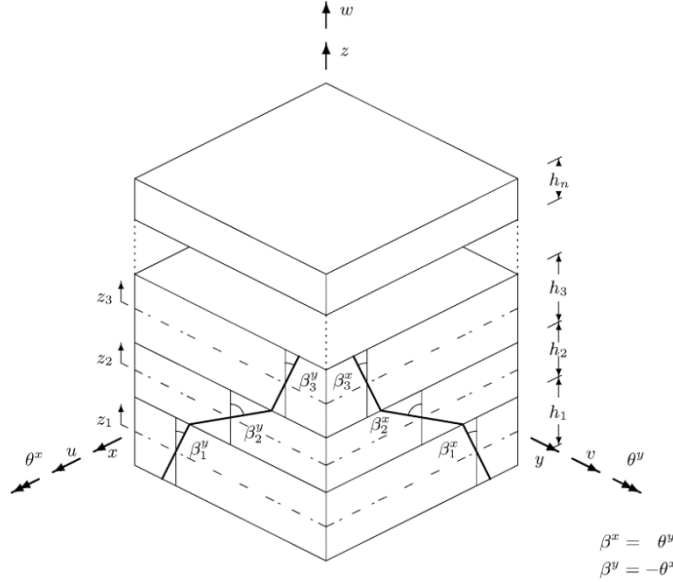


Figura 3. **Representação geométrica de uma placa laminada e os deslocamentos generalizados na teoria de deformação por camadas discretas.**

FONTE: Moreira *et al.* (2006).

A relação entre os campos de deformações ($\{\varepsilon_k\}$) e de tensões ($\{\sigma_k\}$) pode ser obtida utilizando a equação constitutiva do material. Assim, considerando pequenas deformações e material elástico, linear e isotrópico em cada camada, é representada por

$$\{\sigma_k\} = [D_k]\{\varepsilon_k\}. \quad (8)$$

Aqui a matriz de elasticidade $[D_k]$, para a k -ésima camada, pode ser definida como

$$[D_k] = \begin{bmatrix} [D_f]_k & [0] & [0] \\ [0] & [D_f]_k & [0] \\ [0] & [0] & [D_c]_k \end{bmatrix}. \quad (9)$$

As submatrizes $[D_f]_k$ e $[D_c]_k$ são as matrizes de rigidez à flexão e ao cisalhamento, respectivamente, para uma camada k genérica, dadas conforme

$$[D_f]_k = \frac{E_k}{1 - \nu_k^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_k & 0 \\ \nu_k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu_k}{2} \end{bmatrix} \quad e \quad [D_c]_k = \frac{E_k}{2(1 + \nu_k)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

onde os termos E_k e ν_k são o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material para uma camada genérica k . Mais esclarecimentos a respeito do equacionamento acima, podem ser encontrados no trabalho de Moreira *et al.* (2006).

2.2 Modelo Numérico de Estruturas Compostas com MVE

O estudo de vibrações em placas é uma área de extrema importância devido à grande variedade de aplicações na engenharia. Neste contexto, muitos trabalhos já foram realizados nas últimas décadas. Entre as diversas publicações disponíveis sobre este tema, é importante citar o estudo de Kumar e Srinivasa (2018), onde os autores apresentaram uma

revisão bibliográfica sobre flambagem e vibração livre em placas e cascas cilíndricas. Kulkarni *et al* (2018) mostraram uma revisão bibliográfica sobre placas compósitas, apresentando a evolução das teorias de placas e comparando suas formulações. Hashemi e Arsanjani (2005) estudaram a solução para vários casos de vibrações em placas semi-espessas, de forma analítica e aproximada para diferentes espessuras e relações de aspectos. Reddy (2007) dedicou uma publicação de forma ampla e detalhada abordando tanto a TCP (teoria clássica de placas) quanto a TCPO (teoria cisalhante de primeira ordem).

Com a popularização dos materiais compósitos, várias pesquisas têm sido realizadas com o objetivo de desenvolver métodos mais eficientes para o cálculo de vibrações em placas laminadas, visto que nestes casos o número de graus de liberdade aumenta consideravelmente.

Considerando um problema de vibrações em placas semi-espessas, a equação do movimento em formato matricial e no domínio da frequência pode ser representada por

$$([\tilde{K}(\Omega)] - \Omega^2[M])\{X(\Omega)\} = \{F(\Omega)\}, \quad (11)$$

onde $[M]$ é a matriz de massa global, $\{X(\Omega)\}$ é o vetor de resposta de deslocamentos generalizados do sistema, $\{F(\Omega)\}$ é o vetor de forças generalizadas de excitação e $[\tilde{K}(\Omega)]$ é a matriz de rigidez global da estrutura, composta por termos complexos e dependentes da frequência. Esta matriz de rigidez é constituída pelo termo puramente elástico ($[K_e]$) e pela parcela viscoelástica ($[K_v(\Omega)]$), conforme

$$[\tilde{K}(\Omega)] = [K_e] + [K_v(\Omega)]. \quad (12)$$

Enquanto a matriz de rigidez elástica $[K_e]$ é real e constante, a parcela da matriz de rigidez viscoelástica $[K_v(\Omega)]$ é complexa e dependente da frequência e da temperatura. Porém, neste estudo, a temperatura é mantida constante e será omitida da equação.

Para solucionar o problema da Eq. (11) é necessário que a equação seja resolvida para n valores de frequência, dentro de um intervalo de frequência de interesse. A solução desta equação pode ser realizada por duas formas básicas. A primeira é pela solução de n sistemas lineares de equações, cada um deles obtido para cada valor discreto da frequência. A segunda forma se dá pela solução do problema de autovalores/autovetores associado e o posterior desacoplamento das equações. Nesse caso, o agravante está no fato do problema de autovalores/autovetores ser não-linear, decorrente da dependência da matriz de rigidez em relação à frequência.

Com o objetivo de reduzir o tempo computacional e resolver a equação Eq. (11), neste trabalho, utilizou-se o método proposto por Bortolotto *et al.* (2013). Inicialmente, neste método, os autores realizam o cálculo da matriz de rigidez do MVE, $[K_v(\Omega)]$, para uma frequência de referência arbitrada (Ω_0). Para isso, o módulo de elasticidade complexo do MVE é calculado nesta frequência Ω_0 e a parcela da matriz de rigidez associada ao MVE é obtida, conforme $[K_v(\Omega_0)] = E(\Omega_0)[K'_v(\Omega)]$. Nesse caso, $[K'_v(\Omega)]$ representa a parcela da matriz de rigidez associada unicamente ao MVE, mas obtida com um valor unitário do módulo de elasticidade. Assim, a matriz de rigidez do sistema composto ($[K(\Omega)]$, camada base + camada de MVE + CR) é calculada para a frequência Ω_0 ($[K(\Omega)] = [K_e] + E(\Omega_0)[K'_v(\Omega)]$). Sabendo que o módulo de elasticidade calculado para uma frequência qualquer é dado por $E(\Omega) = E(\Omega_0) + \Delta E(\Omega)$ e que $\Delta E(\Omega)$ é a diferença entre o módulo de elasticidade calculado para um valor de Ω qualquer e o módulo de elasticidade calculado para a frequência Ω_0 , a matriz de rigidez do sistema composto, pode ser calculada como $[\tilde{K}(\Omega)] = [K(\Omega)] + \Delta E(\Omega)[K'_v(\Omega)] = [K_e] + E(\Omega_0)[K'_v(\Omega)] + \Delta E(\Omega)[K'_v(\Omega)]$. O problema de autovalores e autovetores é então resolvido para a frequência de referência ($\lambda_i M \phi_i = [K(\Omega)] \phi_i$).

O trabalho de Bortolotto *et al.* (2013), afirma com base na faixa de frequência de interesse, que apenas os primeiros modos de vibrar, possuem participação efetiva na resposta da FRF (função resposta em frequência). Desta forma, o modelo modal calculado na frequência de referência (Ω_0), pode ser resolvido para os primeiros $\hat{n}$ modos ($\hat{n} \ll n$) e, dessa forma, garantir elevado ganho computacional. Assim, utiliza-se a matriz modal truncada, $[\hat{\Phi}]_{n \times \hat{n}}$, onde n é o número de graus de liberdade do sistema e $\hat{n}$ é o número de modos compreendidos dentro da faixa de frequência de interesse. Posteriormente, substitui-se a matriz $[\tilde{K}(\Omega)]$ na Eq. (11) e se realiza a mudança de coordenadas do sistema $\{Q(\Omega)\} = [\hat{\Phi}]\{\hat{P}(\Omega)\}$. E por fim, pré-multiplicando a Eq. (11) por $[\hat{\Phi}]^T$ e pós multiplicando por $[\hat{\Phi}]$ tem-se

$$[-\Omega^2[I]_{\hat{n} \times \hat{n}} + [\Lambda]_{\hat{n} \times \hat{n}} + \Delta E(\Omega)[\hat{\Phi}]^T[K_v][\hat{\Phi}]]\{\hat{P}(\Omega)\} = [\hat{\Phi}]^T F(\Omega), \quad (13)$$

onde $[\hat{\Phi}]^T[M][\hat{\Phi}] = [I]_{\hat{n} \times \hat{n}}$ é matriz identidade, $[\hat{\Phi}]^T[\tilde{K}'][\hat{\Phi}] = [\Lambda]_{\hat{n} \times \hat{n}}$ é a matriz espectral truncada. E isolando o termo $\{\hat{P}(\Omega)\}$ do lado esquerdo da equação e passando o restante dos termos do lado esquerdo para direita, é obtida a resposta dinâmica do sistema composto para qualquer frequência, Ω .

3. METODOLOGIA

No presente estudo, optou-se pelo uso de AG para minimizar a função objetivo utilizada neste trabalho, a qual é a função que descreve o mérito de cada configuração do sistema ao longo do processo de busca pela solução ótima. Aqui, utiliza-se uma componente genérica ks da matriz de inércia do sistema. Inércia é uma função característica do sistema, representando o seu comportamento dinâmico no domínio da frequência. É definida como a relação entre a

aceleração medida no grau de liberdade k e a força atuando no grau de liberdade s . Com isso, essa função é dependente da frequência e representada por A_{ks} . Embora seja uma função complexa da frequência, neste trabalho, a inertância é representada por seu módulo. Nesse caso, a função objetivo considerada é uma aproximação da norma L_2 , ou norma Euclidiana, de uma dada componente ks da matriz de inertância do sistema, posta na forma

$$f(\{x\}) = \sqrt{\int_{\Omega_i}^{\Omega_f} |A_{ks}(\Omega)|^2 d\Omega} \cong \sqrt{\Delta\Omega \sum_{k=1}^{nna} |A_{ks}(\Omega)|^2}, \quad (14)$$

com $\Delta\Omega = \Omega_f - \Omega_i$, sendo Ω_i e Ω_f , respectivamente, os valores das frequências inicial e final que limitam o intervalo de frequências de interesse e nna o número de valores de inertância amostrados nesse intervalo. Por sua vez, a inertância é obtida a partir da aplicação da equação do movimento para um sistema harmônico em vibração livre. Assim, a inertância calculada no domínio da frequência é

$$A_{ks}(\Omega) = \frac{\Omega^2 X_k(\Omega)}{F_s(\Omega)}, \quad (15)$$

onde $F_s(\Omega)$ é o vetor de excitação realizado no ponto s e $X_k(\Omega)$ é o vetor de resposta obtido no ponto k .

O vetor de variáveis de projeto é um vetor de números binários ($x_i = 0$ ou 1), com dimensão igual ao número total de elementos da malha, n_{el} (sendo n_{el} o número de elementos da placa), possuindo uma correspondência biunívoca com os mesmos. Nesse caso, o valor zero significa que o elemento não é recoberto por MVE e, ao contrário, o valor igual a um, indica que o elemento possui recobrimento (Fig. 4).

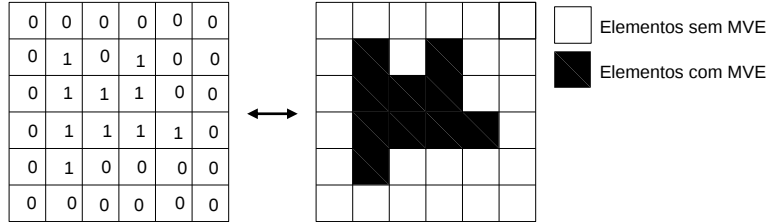


Figura 4. Representação das variáveis de projeto.
 FONTE: Kanke (2017).

A restrição considerada no processo de otimização é dada pela limitação de área total máxima de recobrimento com MVE (denotada por S_{max}). A função restrição aqui é dada por $g(\{x\})$ e é apresentada na equação abaixo para o problema de otimização pode ser colocado em sua forma padrão como:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } f(\{x\}) &= \sqrt{\Delta\Omega \sum_{k=1}^{nna} |A_{ks}(\Omega)|^2}, \\ \text{sujeito a } g(\{x\}) &= \sum_{j=1}^{n_{el}} x_j S_j - S_{max} \leq 0, \end{aligned} \quad (16)$$

onde S_j é a área da superfície de cada elemento finito de placa.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste trabalho, é analisada uma placa retangular com condições de contorno do tipo engastada-livre-livre-livre. Esta placa possui dimensões de 500mm x 200mm e espessura de 25mm, discretizada em 60 elementos (Fig. 7(a)). O material da placa é aço ASTM A36. Por sua vez, o MVE é o EAR C1002 com 3mm de espessura. A camada restritora foi manufaturada em aço ASTM A36 com 3mm de espessura. As propriedades do aço ASTM A36 são apresentadas na Tab. 1, na qual E é o módulo de elasticidade, ν é o coeficiente de Poisson e ρ é a densidade de massa.

Tabela 1. Propriedades mecânicas do aço ASTM A36.

E [GPa]	ρ [kg/m ³]	ν
2,00E+11	7860	0,3

Fonte: MATWEB (2022).

Os parâmetros físicos que caracterizam as propriedades mecânicas do MVE foram obtidos utilizando a metodologia apresentada por Sousa *et al.* (2017). Em seu estudo, Souza *et al.* (2017) realizou um ajuste por mínimos quadrados dos pontos obtidos manualmente do nomograma, por meio de otimização não linear. O nomograma do MVE utilizado está representado na Fig. 5. Os parâmetros do material C1002 estão apresentados na Tab. 2. Os parâmetros b_1 , β , E_0 e E_∞ , são os parâmetros definidos na Eq. (3), os parâmetros c_1 , c_2 , T_0 e T são definidos na Eq. (5), e ρ e ν são a densidade e o coeficiente de Poisson do MVE.

Na etapa de otimização, os parâmetros aplicados aos operadores genéticos foram obtidos com base na literatura e avaliados após uma série de testes e análises. Neste caso, foram observados resultados satisfatórios utilizando uma população com 1200 indivíduos, uma taxa de elitismo de 1% e um valor máximo de iterações de 100 gerações. Considerando que próximo da convergência uma grande parte dos indivíduos terá o mesmo genótipo, foi considerada uma taxa constante de cruzamento de 100%. Para a mutação, foram utilizadas as relações propostas por Coley (1999) e Libelli e Alba (2000). A solução ótima obtida pelo AG deve satisfazer ao menos um dos dois critérios de parada que estão inclusos no algoritmo: 1) atingir um valor máximo de gerações, ou 2) quando o valor da diferença entre os valores da função objetivo avaliada na geração atual e na décima segunda geração anterior for inferior a uma tolerância especificada.

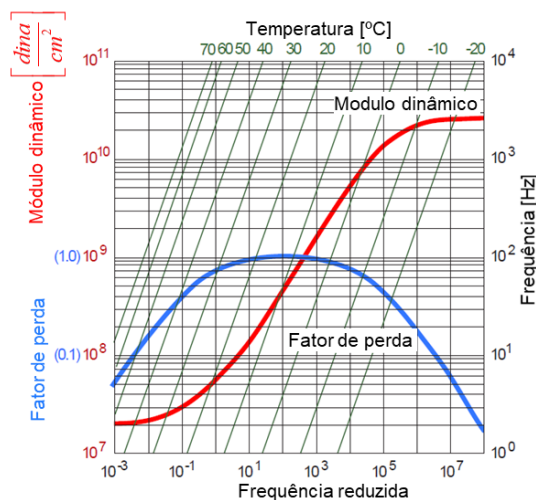


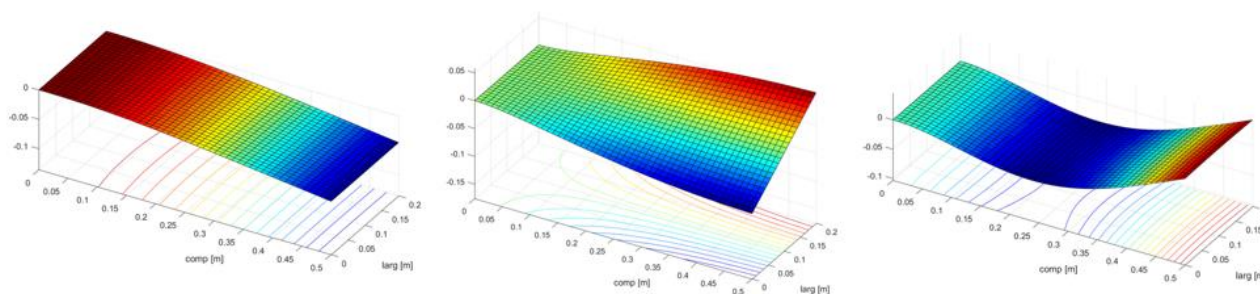
Figura 5. Nomograma do MVE V1002.
FONTE: Earglobal (2017).

Tabela 2. Parâmetros do MVE EAR C1002.

E_0 [MPa]	E_∞ [MPa]	b_1	c_1	c_2	β	T_0 [°C]	T [°C]	ρ [kg/m³]	ν
1,93	2,70E+03	2,09E-03	34,67	333,92	0,54	12,7	10	1289	0,49

4.1 Controle de Banda Larga de Frequência com 30% de Recobrimento de MVE

No primeiro caso analisado a excitação foi realizada no nó 13 e resposta medida no nó 78 (mostrados na Fig. 7(a)) em um intervalo de frequência de 0 a 800Hz. Esse intervalo abrange os três primeiros modos de vibração. É considerado que a placa está com 30% de recobrimento de MVE. Os três primeiros modos de vibrar da placa sem amortecimento podem ser visualizados na Fig. 6. Com a aplicação da metodologia, obtém-se a distribuição referente a condição ótima de preenchimento com MVE, na Fig. 7(a) e a FRF na Fig. 7(b).



(a) Primeiro modo, $f_1 = 82,84$ Hz. (b) Segundo modo, $f_2 = 413,09$ Hz. (c) Terceiro modo, $f_3 = 511,84$ Hz.

Figura 6. Formas de vibrar em flexão de uma placa engastada-livre-livre-livre sem amortecimento.

Contudo, na distribuição ótima de MVE obtida para o controle dos três modos é observada a ocorrência do fenômeno denominado *checkerboard*. O *checkerboard* é uma instabilidade numérica da qual surgem padrões de distribuição de material que se assemelham a um tabuleiro de xadrez. Isto normalmente ocorre em processos de otimização de topologia estrutural baseado em elementos finitos. Este fenômeno é indesejável, visto que a estrutura que apresenta o padrão de

checkerboard demonstra rigidez artificialmente elevada, além de ser de difícil fabricação (Diaz e Sigmund, 1995 e Jog e Haberb, 1996). Desta forma, deve-se buscar por meios que evitem a ocorrência de tal fenômeno.

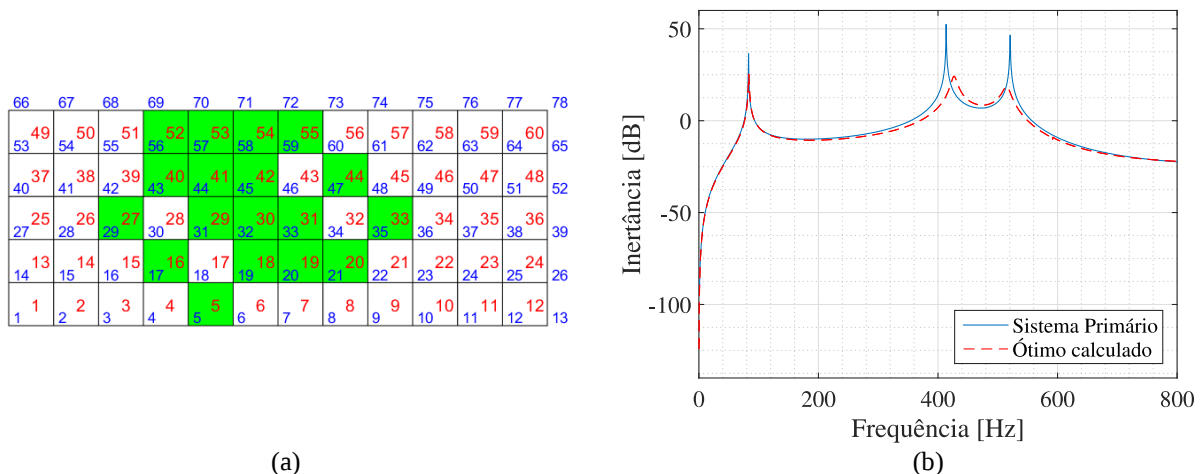


Figura 7. (a) Solução ótima com 30% de recobrimento de MVE e (b) Função resposta em frequência ótima considerando os três primeiros modos de vibração para uma placa engastada-livre-livre-livre.

4.2 Controle do Primeiro e Segundo Modo de Vibrar com 25% de Recobrimento de MVE

Nesta seção, são apresentados dois estudos considerando o controle e vibração do primeiro e do segundo modo de vibrar individualmente. A condição de contorno deste caso é o mesmo do caso anterior, placa engastada-livre-livre-livre. Aqui, é considerado um recobrimento com MVE máximo de 25%. Os nós de excitação e resposta são o 13 e o 78, respectivamente. O intervalo de controle de vibração é entre 50 e 150 Hz, para o primeiro modo, e de 370 a 470 Hz para o segundo modo. Utilizando a metodologia proposta, obtém-se a condição ótima para o primeiro modo de vibrar na Fig. 8(a) e a respectiva FRF na Fig. 8(b). E para o segundo modo, a condição ótima de recobrimento de MVE é apresentada na Fig. 9(a) e a FRF ótima na Fig. 9(b). Novamente, o padrão de *checkerboard* é obtido para o controle do segundo modo de vibrar da placa engastada-livre-livre-livre.

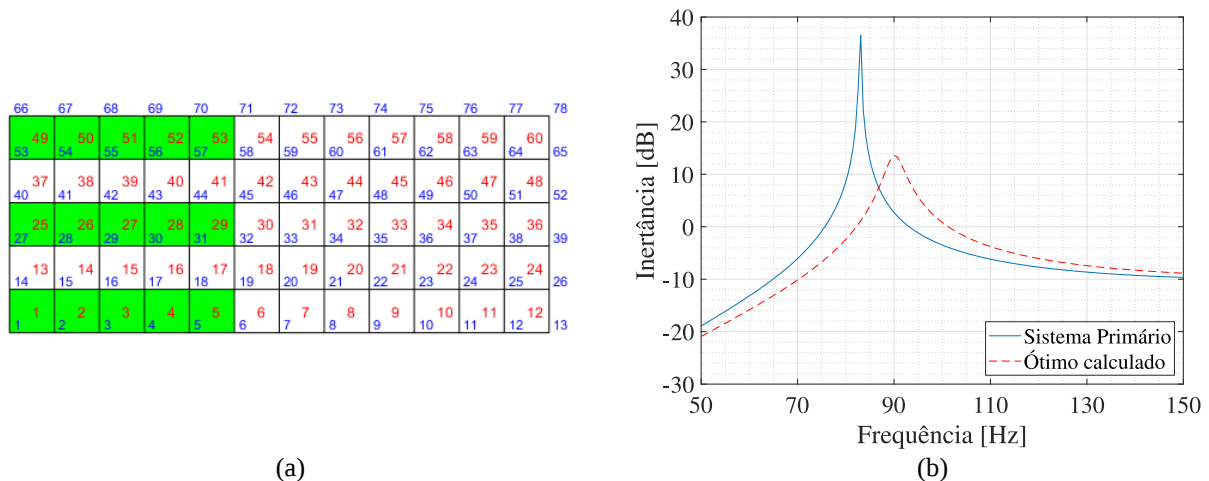


Figura 8. (a) Solução ótima com 25% de recobrimento de MVE e (b) Função resposta em frequência ótima para o primeiro modo de vibração para uma placa engastada-livre-livre-livre.

5. CONCLUSÕES

Este trabalho apresenta uma metodologia para obtenção da distribuição ótima de recobrimento por CR de uma placa metálica utilizando conceitos de otimização de topologia estrutural e AG. A metodologia foi aplicada a duas situações. Na primeira, considerou-se o controle de vibração de banda larga, compreendendo três modos de vibrar. No segundo, caso, considerou-se o controle de vibração do primeiro e segundo modo, individualmente. Para ambos os casos se considerou que a placa estava engastada-livre-livre-livre.

Ambos os resultados obtidos foram satisfatórios em relação à redução da vibração da placa. Considerando o controle de banda larga, obteve-se redução de cerca de 25 dB no pico da inertância, para o segundo e terceiro modos da placa. Isso se dá, provavelmente, por estes dois modos apresentarem maior energia que o primeiro modo. No caso, de controle do primeiro e segundo modo individualmente, foi obtida uma redução aproximada de 20 dB na inertância. Os resultados demonstram que a metodologia é adequada para controle de vibrações em estruturas dos tipos placa e casca.

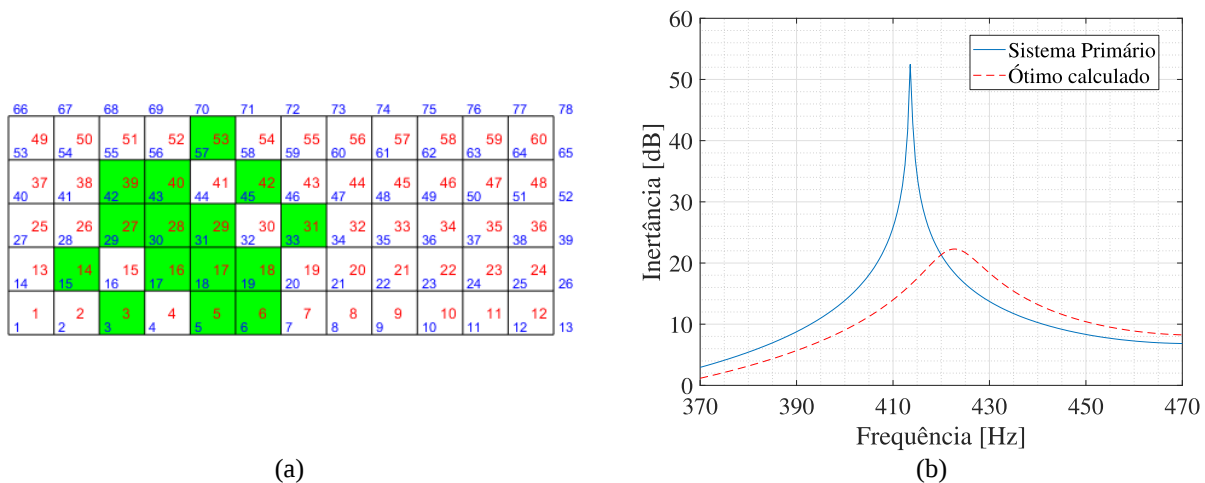


Figura 9. (a) Solução ótima com 25% de recobrimento de MVE e (b) Função resposta em frequência ótima para o segundo modo de vibração para uma placa engastada-livre-livre-livre.

6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PgMec) da Universidade Federal do Paraná (UFPR), Brasil. A autora Sandmara Lanhi agradece ao suporte financeiro do Programa de Recursos Humanos da Agência Nacional de Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (PRH-ANP).

7. REFERÊNCIAS

- Baz, A.M., 2019, *Active and Passive Vibration Damping*. Ed. John Wiley & Sons, 736 p.
- Bortolotto, J.C., Lopes, E.M. O. and Bavastri, C.A., 2013, "Identificação e controle de vibrações de estruturas metálicas parcialmente compostas com lâminas viscoelásticas restringidas". In *Proceedings of The XXXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*. ABMEC, Pirenópolis, GO, Brazil, pp.10-13.
- Brinson, H.F. and Brinson L.C., 2008, *Polymer engineering science and viscoelasticity - An Introduction*. Ed. Springer, New York, USA, 446 p.
- Chen, R., Luo, H., Wang, H. and Zhou, W., 2021, "Topology optimization of partial constrained layer damping treatment on plate for maximizing modal loss factors", *Composites and Advanced Materials*, Vol. 30, pp. 1-19.
- Cunha-Filho, A., Lima, A. D., Donadon, M. and Leão, L., 2016, "Flutter suppression of plates using passive constrained viscoelastic layers, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 79, pp. 99–111.
- Diaz, A. and Sigmund, O., 1995, "Checkerboard patterns in layout optimization", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol.10, pp. 40-45.
- Earglobal, available in < <https://earglobal.com/en> > accessed in: Fev., 2022.
- Espindola, J.J.D., Neto, J.M. da S. and Lopes, E.M., 2005, "A generalised fractional derivative approach to viscoelastic material properties measurement". *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, Vol. 164, pp. 493–506.
- Findley, W.N., Lai, J.S. and Onaran, K., 1976, *Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials with an introduction to linear viscoelasticity*. Ed. North-Holland Publishing Company, New York, USA 344 p.
- Gibson, R.F., 2007, *Principles of Composite Material Mechanics*. Ed. CRC Press, Boca Raton, 700 p.
- Hashemi, S.H. and Arsanjani, M., 2005, "Exact characteristic equations for some of classical boundary conditions of vibrating moderately thick rectangular plates", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42, pp. 819 - 853.
- Jalocha, D., Constantinescu, A. and Neviere, R., 2015, "Revisiting the identification of generalized maxwell models from experimental results", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 67-68, pp. 169 - 181.
- Jog, S.C. and Haber, B.R., 1996. "Stability of finite element models for distributed-parameter optimization and topology design", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 130, pp. 203-226.
- Kanke, F., 2017, Otimização topológica de camadas restritoras aplicada ao controle de vibrações em placas semi-espessas, Dissertação, Universidade Federal do Paraná (UFPR), Curitiba, Brazil.
- Kulkarni, P., Dhoble, A., Padole, P., 2018. A review of research and recent trends in analysis of composite plates. *Sādhanā*, Vol. 43, pp. 1-20.
- Kumar, P., Srinivasa, C.V., 2020. "On buckling and free vibration studies of sandwich plates and cylindrical shells: A review", *Journal of thermoplastic composite materials*, Vol. 33, pp. 673-724.
- Libelli, S.M. and Alba, P., 2000, "Adaptive mutation in genetic algorithms", *Soft Computing*, Vol. 4, pp.76 – 80.
- Lopes, E.M.O., Bavastri, C.A., Neto, J.M.S. and Espindola, J.J., 2004, "Characterization dynamics in integrated elastomers generalized derivatives", In *Proceedings of the National Congress of Mechanical Engineering*. ABCM, Belem, Brazil.

- Madeira, J.F.A., Araújo, A.L., Mota Soares, C.M. and Mota Soares, C.A., 2020, "Multiobjective optimization for vibration reduction in composite plate structures using constrained layer damping", *Computers & Structures*, Vol. 232, pp. 105810.
- Madhekar, S., Matsagar, V., 2022, *Passive Vibration Control of Structures*. Ed. CRC Press, 398 p.
- Mainardi, F., 2010, *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity – an introduction to mathematical models*. Ed. Imperial College Press, London, 368 p.
- Matweb, available in <<https://www.matweb.com/index.aspx>> accessed in: Fev., 2022.
- Moreira, R.A.S., Rodrigues, J.D. and Ferreira, A.J.M., 2006, "A generalized layerwise finite element for multi-layer damping treatments", *Computational Mechanics*, Vol. 37, pp. 426 - 444.
- Pritz, T., 1996, "Analysis of four-parameter fractional derivative model of real solid materials", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 195(1), pp. 103 - 115.
- Rao, M.D. and Shulin, H., 1993, "Dynamic analysis and design of laminated composite beams with multiple damping layers", *AIAA Journal*, Vol. 31, pp. 736 - 745.
- Reddy, J.N., 2007, *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*. Ed. CRC Press, Boca Raton, 547 p.
- Sousa, T.L., Kanke, F., Pereira, J.T. and Bavastri, C.A., 2017, "Property Identification of Viscoelastic Solid Materials in Nomograms using Optimization Techniques", *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 4, pp. 1285-1297.
- Xu, C., Lin, S. and Yang, Y., 2015, "Optimal design of viscoelastic damping structures using layerwise finite element analysis and multi-objective genetic algorithm", *Computers and Structures*, Vol. 157, pp. 1-8.

8. RESPONSABILIDADE AUTORAL

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho.

PASSIVE VIBRATION CONTROL IN PLATES USING CONSTRAINED LAYER AND TOPOLOGY OPTIMIZATION

Ferdinand Kanke, ferdinand.2k@gmail.com¹
Sandmara Lanhi, sandmara_lanhi@hotmail.com¹
Jucélio Tomás Pereira, jucelio.tomas@ufpr.br¹

Laboratory of Computacional Solid Mechanics, Posgraduate in Mechanical Engineering, Centro Politécnico., Federal University of Paraná, Curitiba, 85300-000, Brazil.

Abstract. Normally, the occurrence of vibrations in structures is considered a significant problem, because to generating noise causing acoustic discomfort, it can lead the structure to collapse. In the special case of plates and/or shells, a method that stands out due to its easy implementation and low cost is passive control by using a constrained layer (CL). In this method, it is considered that a layer of viscoelastic material (VEM) is placed on the vibrating structure and the VEM layer is covered by another layer, usually of metallic material. In this way, a portion of the vibratory energy is dissipated predominantly by the shear distortion of the VEM. This distortion is caused by the difference in displacements between the vibrating structure and the restrictive metallic layer. However, constrained layer applications must be properly designed in order to successfully control vibration and noise. For this, several numerical tools can be used together, such as the association of the Finite Element Method (FEM) and structural topology optimization techniques. With this, it is possible to obtain the optimal distribution of the CL on the base structure under analysis. This work aimed to develop a methodology for passive vibration control in harmonically excited isotropic plates, obtaining the optimal distribution of a limited area of CL. The vibration analysis of the structure was performed using the FEM, through the formulation of laminated plates with discrete layers, in which each layer is modeled using the first-order shear theory. The behavior of the VEM was described by the fractional Zener constitutive model. The optimal positions of the constrained layers, design variables, were obtained via genetic algorithm considering a constraint on the amount of the overlay area. The proposed methodology was implemented using Matlab® software. The case analyzed is a free-free-fixed plate, for which the frequency broadband vibration control is presented, which comprises the first three modes, and vibration control of the first and second modes, individually. The results show a good reduction in vibration levels, so that approximately 25 dB were reduced in the inertia peaks for the broadband case and approximately 20 dB in the control of the first and second individual modes.

Keywords: Viscoelastic Materials, Fractional Zener Model, Finite Element Method, Reissner-Mindlin Model, Genetic Algorithm.