

ANÁLISE ESTATICA E TABULAÇÃO DOS PARÂMETROS RELEVANTES NAS PLACAS RETANGULARES APOIADAS SOB CARREGAMENTOS DERIVADOS DO TRAPEZOIDAL E MODELADOS COM CONCRETOS COM POISSON DISTINTO DO VALOR NORMALIZADO

Wesley Imperiano Gomes de Melo, wesleyimperiano@hotmail.com¹

Pedro Vitor Carvalho de Alencar Luz, pedro200298@hotmail.com²

Glivio Gayerk Batista Freire, glivioengcivilufrpe@outlook.com³

Luiz Guilherme Calheiros Alves Vieira, luiz.guilhermevieira.eng@gmail.com³

¹Universidade Federal Rural de Pernambuco, Professor Adjunto, Rua Cento e Sessenta e Três – 300 – Garapú – Cabo de Santo Agostinho/PE.

² Universidade Federal Rural de Pernambuco, Bacharel em Engenharia Civil, Rua Cento e Sessenta e Três – 300 – Garapú – Cabo de Santo Agostinho/PE.

³ Universidade Federal Rural de Pernambuco, Bacharelado em Engenharia Civil, Rua Cento e Sessenta e Três – 300 – Garapú – Cabo de Santo Agostinho/PE.

Resumo: Atualmente a análise teórica de placas retangulares é procedida de forma bidimensional pela Teoria de Sophie-Germain-Lagrange, sendo tabulados os parâmetros relevantes para concretos com coeficiente de Poisson de 0,2 (valor normalizado). Porém, com o avanço e a disseminação da tecnologia do concreto é observado cada vez mais a moldagem de peças estruturais com valores de Poisson distintos do normalizado. Neste sentido, visando suprir tal lacuna é que neste artigo será apresentada a formulação dos deslocamentos e esforços solicitantes para as placas retangulares sob carregamentos trapezoidais, retangulares e triangulares, permitindo assim, que o(a) engenheiro(a) possa impor o valor adequado do coeficiente de Poisson para o projeto em execução. Ademais, serão apresentadas tabelas com os parâmetros de: deslocamentos (deflexões), momentos flettores e esforços cortantes para oito valores no entorno do Poisson de 0,20 e sob a variação de 0,05 entre eles. Deste modo, a relevância desta publicação será a tabulação dos parâmetros relevantes para placas retangulares apoiadas sob valores de Poisson de 0 (zero) a 0,40, além de listar as equações genéricas para que o leitor, se julgar necessário, para que possa aplicar ao projeto sob sua supervisão. A metodologia empregada será a revisão bibliográfica acrescida do equacionamento do problema bidimensional de placas via Teoria de Sophie-Germain-Lagrange, com ênfase nas propriedades elasto-mecânicas contidas no coeficiente D que contemplam o coeficiente de Poisson, além de proceder à resolução da equação diferencial via método de Navier e validar as tabulações através de exemplos de aplicação já estabelecidos na literatura e por modelagem de lajes com dimensões definidas no software ANSYS - versão acadêmica -, cuja convergência foi de 99,47% (0,30 como coeficiente de Poisson) para a validação via software. Os resultados obtidos foram as tabelas para quantificação dos deslocamentos e esforços solicitantes nas lajes de formato e sob os carregamentos já descritos. Por fim, a validação das tabulações conduziu a valores de deflexões para o carregamento constante sob convergência de 98,28% a 99,98%; já quanto aos momentos flettores foi perceptível um erro médio de apenas 1,68% para Poisson de 0,15 e de 3,80% pra Poisson de 0,20. **Palavras-chave:** placas retangulares, carregamentos com variação linear, coeficiente de Poisson, Tabulação, Teoria de Sophie-Germain-Lagrange.

1. INTRODUÇÃO

Inicialmente é importante definir placas como elementos paralelepípedicos de altura muito inferior com relação as demais dimensões, logo elemento bidimensional e que é analisado classicamente pela Teoria de Flexão postulada pelas contribuições de Bernoulli, Navier, Saint-Venant e Lagrange, conforme elenca Szilard (2004, p. 23).

Ademais, o detalhamento da Teoria de Flexão de Placas é visto, particularmente, em: Wang *et al.* (2000); Szilard (2004); Araújo (2014) e Kollár and Tarján (2021). Valendo ressaltar Soares (2004, p. 4) elencando a situação real em que as placas podem possuir formatos diversos e estarem submetidas a variados tipos de carregamentos. Desta forma, neste artigo será analisada a placa retangular apoiada em ambas as faces e submetida a carregamentos: constantes, triangulares e trapezoidais.

Observa-se, assim, que o recorte na análise estrutural de placas visa detalhar melhor as tabulações, com enfoque nos coeficientes determinantes das deflexões máximas, dos momentos flettores, dos esforços cortantes e das reações dos apoios. Visam sempre lajes moldadas com concretos distintos dos convencionais, logo empregando-se os concretos

tecnológicos, onde o coeficiente de Poisson é distinto da média expressa em ACI 213 R-87 e da NBR 6118 (ABNT, 2014) no valor de 0,2.

No referido boletim ACI 213 R-87 é informado que o coeficiente de Poisson em concretos leves varia de 0,16 a 0,25, se os ensaios forem procedidos via métodos de ressonância, bem como, são verificados no intervalo de 0,15 a 0,25 para ensaios estáticos. O que, na prática conduz a coeficiente de Poisson médio de 0,21 e 0,20, respectivamente. E em decorrência, faz-se importante definir concretos leves como os concretos moldados com agregados leves, a exemplo de: EPS e EVA, ou ainda, pela imposição de vermiculita, argila expandida ou pela incorporação de ar. Em seguida, para os ensaios de caracterização dinâmica do coeficiente de Poisson cita-se Ahmed (2018) elencando valores de 0,08, para as primeiras 24 horas, e de aproximadamente 0,15 para concretos com 7 dias.

Por fim, ao analisar as tabelas correntes de apresentação dos parâmetros de análise estrutural de placas, pelas Teorias Clássicas, constata-se a listagem para coeficiente de Poisson (ν) no valor de: 0 (zero); 0,15; 0,25 e 0,30. Ver Bares (1971). Tornando-se importante mencionar que a tabulação para Poisson de 0,20 são apresentadas em Pinheiro (2007) e são decorrentes da adaptação dos valores presentes em Bares (1971). Desta maneira, resta demonstrado a necessidade da melhoria do refinamento das tabulações para valores de coeficientes de Poisson $\nu = \{0,00; 0,05; 0,10; 0,15; 0,20; 0,25; 0,30; 0,35 \text{ e } 0,40\}$, conforme procedido nesta publicação.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Conforme definições apresentadas em Bhaskar and Varadan (2013) e em Bhavikatti (2012), na Teoria Clássica de Placas são utilizadas as seguintes hipóteses, como básicas: - como primeira, a espessura t da placa é muito menor do que as outras duas dimensões a e b , no plano, fazendo, em muitos casos, a relação t/a e t/b flutuar na ordem de $1/10$ a $1/50$; - a segunda hipótese é admitir o Estado Plano de Deformações (EPD) para proceder o equacionamento, desta forma, desprezando a deformação vertical ($\varepsilon_{zz} \approx 0$), além de considerar as demais deformações muito inferior do que a unidade ($\varepsilon_{xx}; \varepsilon_{yy} \text{ e } \varepsilon_{xy} \ll 1$), enquadrando o funcionamento estrutural da placa no campo das pequenas deformações. E enfim, - na terceira hipótese são desprezadas as tensões cisalhantes σ_{xz} e σ_{yz} .

Desta forma, na Figura 1 é apresentada a placa de dimensões a, b e t submetida a carregamento $q(x, y)$. Nesta configuração é perceptível a configuração de problema bidimensional ao invés de tridimensional, isso em decorrência do deslocamento/deflexão $\omega(x, y)$ que varia unicamente no plano da geometria do plano médio da placa.

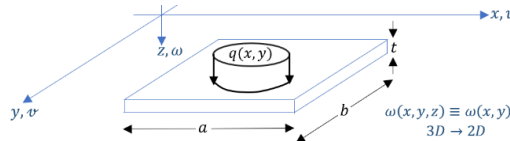


Figura 1. Configuração idealizada da placa retangular submetida à carregamento distribuído.

O deslocamento $u(x, y, z)$ das fibras horizontais é equacionado mediante a relação ao raio de curvatura ρ_x , medido do baricentro O até o eixo médio da placa, conforme ilustração presente na Figura 2.

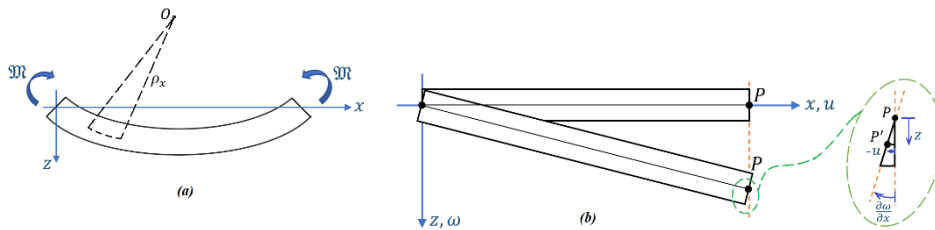


Figura 2. Deformação da placa conforme: (a) indicação do eixo médio e (b) deformação na direção y

Concluindo:

$$u(x, y, z) = -z \cdot \phi_x \quad ; \quad v(x, y, z) = -z \cdot \phi_y \quad (1 \text{ a} - \text{b})$$

sendo: $\phi_x = \frac{\partial \omega}{\partial x}$ e $\phi_y = \frac{\partial \omega}{\partial y}$.

A partir dos conceitos de deformação, precursores da Lei de Hooke, as deformações ε_{xx} ; ε_{yy} e ε_{xy} são expressas por:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \equiv -z \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \quad (2 \text{ a})$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \equiv -z \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \quad (2 \text{ b})$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \equiv -2 \cdot z \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \quad (2 \text{ c})$$

No regime elástico, após considerar o material como isotrópico e desprezar a contribuição das deformações transversais, a lei de Hooke fica expressa, via:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Na Figura 3 é apresentado o elemento diferencial de placa, ilustrando desde os esforços solicitantes até a carga resultante, além de apresentar a variação nos referidos esforços em função do carregamento atuante.

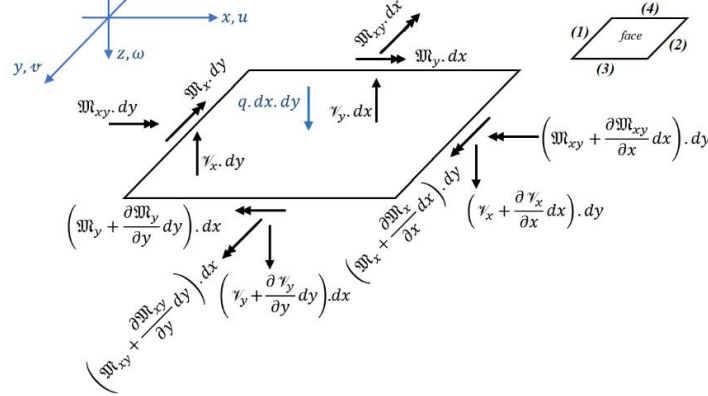


Figura 3. Elemento diferencial de placa.

Do equilíbrio do elemento diferencial apresentado na Figura 3, escrevem-se as equações que correlacionam a carga $q(x, y)$ aos esforços cortantes (V_x e V_y) e aos momentos fletores (M_x e M_y), como:

$$q = -\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y}\right) \quad ; \quad q = -\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \cdot \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \cdot \partial y} - \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \quad (4 a - b)$$

Agora analisando a definição do momento fletor: $\{M\} = \int_z \{\sigma\} \cdot z \, dz$ e impondo a lei de Hooke expressa na equação (3), escreve-se:

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{E \cdot z}{1-\nu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{Bmatrix} dz \equiv D \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

sendo: $k_{xx} = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$; $k_{yy} = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$; $k_{xy} = -2 \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \cdot \partial y}$ e $D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1-\nu^2)}$.

E por fim, unindo as equações (3) e (5) conclui-se a equação postulada por Sophie-Germain-Lagrange para o problema de placas finas. Assim, com a nomenclatura apresentada em Dinev (2020), tem-se:

$$\frac{\partial^4 \omega(x, y)}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \omega(x, y)}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega(x, y)}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D} \quad (6)$$

Para o caso de placa apoiada simplesmente nas extremidades e submetida a carregamento uniformemente distribuído tem-se a solução da dupla série de Navier, como uma solução de excelente aproximação. Baseando-se apenas na truncagem da série de duplos senos, logo trabalhando apenas com valores ímpares nos somatórios, uma vez que a função senoidal é ímpar. Com isto dito, na Figura 4 são ilustradas as condições de contorno para a placa simplesmente biapoada em ambos os extremos/faces.

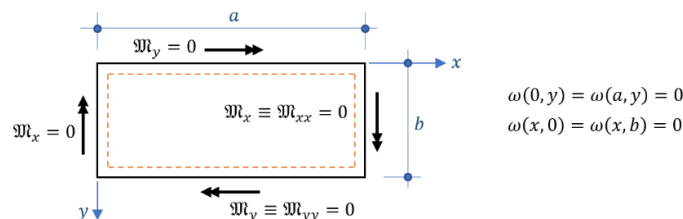


Figura 4. Condições de contorno da placa simplesmente apoiada.

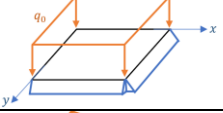
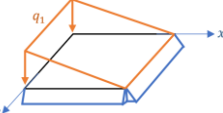
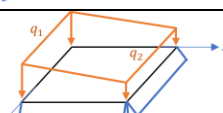
Em seguida, escreve-se o carregamento $q(x, y)$ sob a mesma lei de formação da função deslocamento $\omega(x, y)$, para que se torne a solução de Navier aplicável à equação (6). Assim:

$$\omega(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{mn} \cdot \text{sen}\left(m \cdot \frac{\pi \cdot x}{L_x}\right) \cdot \text{sen}\left(n \cdot \frac{\pi \cdot y}{L_y}\right) \quad (7)$$

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \cdot \text{sen}\left(m \cdot \frac{\pi \cdot x}{L_x}\right) \cdot \text{sen}\left(n \cdot \frac{\pi \cdot y}{L_y}\right) \quad (8)$$

onde: $\omega_{mn} = \frac{q_{mn}}{\pi^4 \cdot D \cdot \left[\left(\frac{m}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_y}\right)^2\right]^2}$; e $q_{mn} = \frac{4}{L_x \cdot L_y} \cdot \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} q(x, y) \cdot \text{sen}\left(m \cdot \frac{\pi \cdot x}{L_x}\right) \cdot \text{sen}\left(n \cdot \frac{\pi \cdot y}{L_y}\right) dx dy$.

Na Tabela 1 são apresentadas as fórmulas de q_{mn} para os carregamentos derivados do trapezoidal (função constante, triangular e trapezoidal), além de listar as funções de carregamento $q(x, y)$ no referencial xy , ainda não transformado para o formato da dupla série infinita de senos.

Tabela 1. Valores de $q(x, y)$ e q_{mn} por tipo de carregamento derivado do trapezoidal.		
Carregamento	q_{mn}	$q(x, y)$
	$q_{mn} = \frac{16 \cdot q_0}{m \cdot n \cdot \pi^2}$	$q(x, y) = q_0$
	$q_{mn} = \frac{8 \cdot q_1}{m \cdot n \cdot \pi^2}$	$q(x, y) = \frac{q_1}{L_x} \cdot x$
	$q_{mn} = \frac{8 \cdot (q_1 + q_2)}{m \cdot n \cdot \pi^2}$	$q(x, y) = \frac{(q_2 - q_1)}{L_x} \cdot x + q_1$

2.1. Esforço Cortante de Kirchhoff

Da análise da equação (6) é constatado que se trata da equação governante do problema estático de placas sob ação de cargas transversais, sendo caracterizada como uma EDP (Equação Diferencial Parcial) de quarta ordem, logo dependente da quantificação de no mínimo quatro condições de contorno, vide em Kollár and Tarján (2021). Além de Zenkour (2003) e Zhang *et al.* (2019), onde evidencia-se que o estudo da referida equação diferencial, bem como, a listagem de duas condições de contorno das quatro necessárias.

Desta forma, em meados do século XIX, Kirchhoff demonstrou que o esforço cortante Q e o momento torsor $\mathfrak{M}_{xy}$, na placa, podem ser compatibilizados, gerando com isso, a terceira condição de contorno. Fica, então, os esforços cortantes expressos, por unidade de comprimento, como:

$$\gamma_x^* = \gamma_x + \frac{\partial \mathfrak{M}_{xy}}{\partial y} \equiv -D \cdot \left[\frac{\partial^3 \omega(x, y)}{\partial x^3} + (2 - \nu) \cdot \frac{\partial^3 \omega(x, y)}{\partial x \cdot \partial y^2} \right] \quad (9a)$$

$$\gamma_y^* = \gamma_y + \frac{\partial \mathfrak{M}_{xy}}{\partial x} \equiv -D \cdot \left[\frac{\partial^3 \omega(x, y)}{\partial y^3} + (2 - \nu) \cdot \frac{\partial^3 \omega(x, y)}{\partial x^2 \cdot \partial y} \right] \quad (9b)$$

E por último, a partir da exclusão dos binários equivalentes resulta na seguinte expressão para a reação de canto:

$$R_0 = 2 \cdot \mathfrak{M}_{xy} \equiv -2 \cdot D \cdot (1 - \nu) \cdot \frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial x \cdot \partial y} \quad (10)$$

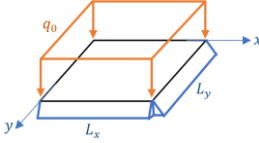
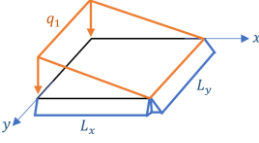
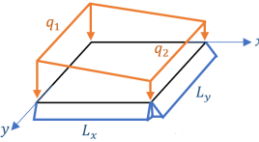
3. TABULAÇÕES

Da solução por dupla série trigonométrica, proposta por Navier e expressas nas equações (8) e (9), escrevem-se os parâmetros os parâmetros: ω_z ; m_x ; m_y ; m_{xy} ; v_x e v_y , em função dos comprimentos L_x e L_y da placa, bem como da razão $\lambda = L_y / L_x$. Assim, procedendo o truncamento incremental, da dupla série em comento, a partir do incremento de

números m e n ímpares até atingir a convergência nos valores dos parâmetros elencados na Tabela 2. A convergência é obtida com a limitação da diferença de dois valores consecutivos dos parâmetros ao valor da tolerância Δ de 0,0001.

Neste sentido, na Tabela 2 são listados os parâmetros já elencados, bem como, as fórmulas para quantificar os esforços solicitantes e deflexão máxima na placa.

Tabela 2. Fórmulas dos parâmetros, além dos esforços solicitantes e deflexão máxima para placas apoiadas sob carregamentos derivados do trapezoidal.

Carregamento	Parâmetros	Esforços e deflexão máxima
 a Reação R_x é aplicado em: $x_1 = 0; y_1 = \frac{L_y}{2}$ a Reação R_y é aplicado em: $x_2 = \frac{L_x}{2}; y_2 = L_y$ a Reação de canto R_0 é aplicada: $x_3 = 0; y_3 = 0$	$\omega_{MAX} = \frac{192 \cdot q_0 \cdot L_x^4}{\pi^6 \cdot E \cdot h^3} \cdot \omega_{zMAX}$ $\mathfrak{M}_x^{MAX} = \frac{16 \cdot q_0 \cdot L_x^2}{\pi^4} \cdot m_x$ $\mathfrak{M}_y^{MAX} = \frac{16 \cdot q_0 \cdot L_y^2}{\pi^4} \cdot m_y$ aplicados em: $\bar{x} = \frac{L_x}{2}; \bar{y} = \frac{L_y}{2}$ $R_x = \frac{16 \cdot q_0 \cdot L_x}{\pi^3} \cdot \tau_x$ $R_y = \frac{16 \cdot q_0 \cdot L_y}{\pi^3} \cdot \tau_y$ $R_0 = \frac{32 \cdot q_0 \cdot L_x^2}{\pi^4} \cdot \tau_0$	$\omega_{zMAX} = (1 - \nu^2) \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m \cdot n \cdot \left[m^2 + \left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 \right]^2} \cdot \text{Sen} \left(\frac{m \cdot \pi}{3} \right) \cdot \text{Sen} \left(\frac{n \cdot \pi}{2} \right) \right\}$ $m_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[m^2 + \nu \cdot \left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 \right]}{m \cdot n \cdot \left[m^2 + \left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 \right]^2} \cdot \text{Sen} \left(\frac{m \cdot \pi}{3} \right) \cdot \text{Sen} \left(\frac{n \cdot \pi}{2} \right) \right\}$ $m_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[\nu \cdot m^2 + \left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 \right]}{m \cdot n \cdot \left[m^2 + \left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 \right]^2} \cdot \text{Sen} \left(\frac{m \cdot \pi}{3} \right) \cdot \text{Sen} \left(\frac{n \cdot \pi}{2} \right) \right\}$ $\tau_x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left\{ \frac{m}{m \cdot n \cdot \left[m^2 + \left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 \right]} - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(\nu - 1) \cdot m \cdot \left(\frac{n}{\lambda} \right)^2}{m \cdot n \cdot \left[m^2 + \left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 \right]^2} \right\} \cdot \text{Sen} \left(\frac{n \cdot \pi}{2} \right) \right\}$ $\tau_y = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left\{ \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{n}{m \cdot n \cdot \left[m^2 + \left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 \right]} - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(\nu - 1) \cdot m^2 \cdot \frac{n}{\lambda}}{m \cdot n \cdot \left[m^2 + \left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 \right]^2} \right\} \cdot \text{Sen} \left(\frac{n \cdot \pi}{2} \right) \right\}$ $\tau_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(\nu - 1) \cdot m \cdot \frac{n}{\lambda}}{m \cdot n \cdot \left[m^2 + \left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 \right]^2} \right\}$
 a Reação R_x é aplicado em: $x_1 = 0; y_1 = \frac{L_y}{2}$ a Reação R_y é aplicado em: $x_2 = \frac{L_x}{2}; y_2 = L_y$ a Reação de canto R_0 é aplicada: $x_3 = 0; y_3 = 0$	$\omega_{MAX} = \frac{96 \cdot q_1 \cdot L_x^4}{\pi^6 \cdot E \cdot h^3} \cdot \omega_{zMAX}$ $\mathfrak{M}_x^{MAX} = \frac{8 \cdot q_1 \cdot L_x^2}{\pi^4} \cdot m_x$ $\mathfrak{M}_y^{MAX} = \frac{8 \cdot q_1 \cdot L_y^2}{\pi^4} \cdot m_y$ aplicados em: $\bar{x} = \frac{L_x}{3}; \bar{y} = \frac{L_y}{2}$ $R_x \text{ ou } y = \frac{8 \cdot q_1 \cdot L_x}{\pi^3} \cdot \tau_x \text{ ou } y$ $R_0 = \frac{16 \cdot q_1 \cdot L_x^2}{\pi^4} \cdot \tau_0$	$\omega_{zMAX} = (1 - \nu^2) \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m \cdot n \cdot \left[m^2 + \left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 \right]^2} \cdot \text{Sen} \left(\frac{m \cdot \pi}{2} \right) \cdot \text{Sen} \left(\frac{n \cdot \pi}{2} \right) \right\}$ $m_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[m^2 + \nu \cdot \left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 \right]}{m \cdot n \cdot \left[m^2 + \left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 \right]^2} \cdot \text{Sen} \left(\frac{m \cdot \pi}{2} \right) \cdot \text{Sen} \left(\frac{n \cdot \pi}{2} \right) \right\}$ $m_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[\nu \cdot m^2 + \left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 \right]}{m \cdot n \cdot \left[m^2 + \left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 \right]^2} \cdot \text{Sen} \left(\frac{m \cdot \pi}{2} \right) \cdot \text{Sen} \left(\frac{n \cdot \pi}{2} \right) \right\}$ $\tau_x; \tau_y$ e τ_0 são idênticas ao caso de carregamento constante
 a Reação R_x é aplicado em: $x_1 = 0; y_1 = \frac{L_y}{2}$ a Reação R_y é aplicado em: $x_2 = \frac{L_x}{2}; y_2 = L_y$ a Reação de canto R_0 é aplicada: $x_3 = 0; y_3 = 0$	$\omega_{MAX} = \frac{96 \cdot (q_1 + q_2) \cdot L_x^4}{\pi^6 \cdot E \cdot h^3} \cdot \omega_{zMAX}$ $\mathfrak{M}_x^{MAX} = \frac{8 \cdot (q_1 + q_2) \cdot L_x^2}{\pi^4} \cdot m_x$ $\mathfrak{M}_y^{MAX} = \frac{8 \cdot (q_1 + q_2) \cdot L_y^2}{\pi^4} \cdot m_y$ aplicados em: $\bar{x} = k \cdot \frac{L_x}{3}; \bar{y} = \frac{L_y}{2}$ sob os seguintes casos: Caso 1: Se a razão $k = \frac{(2 \cdot q_2 + q_1)}{(q_2 + q_1)}$ for número natural, positivo e ímpar deve-se recorrer as tabelas para os adimensionais da carga triangular, mas com estas fórmulas de deflexões e momentos máximos. Caso 2: para a razão k qualquer usar a formulação generalizada ao lado Caso 3: Lajes com carga inicial de 12 kN/m² e final de 7 kN/m², para que constitui a razão mais usual. $R_x \text{ ou } y = \frac{8 \cdot (q_1 + q_2) \cdot L_x}{\pi^3} \cdot \tau_x \text{ ou } y$ $R_0 = \frac{16 \cdot (q_1 + q_2) \cdot L_x^2}{\pi^4} \cdot \tau_0$	Caso 1: Usar $\omega_{zMAX}; m_x$ e m_y do carregamento triangular Caso 2: Usar $\omega_{zMAX}; m_x$ e m_y elencados genericamente a seguir: $\omega_{zMAX} = (1 - \nu^2) \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m \cdot n \cdot \left[m^2 + \left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 \right]^2} \cdot \sin \left(\frac{m \cdot \pi}{L_x} \bar{x} \right) \cdot \sin \left(\frac{n \cdot \pi}{L_y} \bar{y} \right) \right\}$ $m_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[m^2 + \nu \cdot \left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 \right]}{m \cdot n \cdot \left[m^2 + \left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 \right]^2} \cdot \sin \left(\frac{m \cdot \pi}{L_x} \bar{x} \right) \cdot \sin \left(\frac{n \cdot \pi}{L_y} \bar{y} \right) \right\}$ $m_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[\nu \cdot m^2 + \left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 \right]}{m \cdot n \cdot \left[m^2 + \left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 \right]^2} \cdot \sin \left(\frac{m \cdot \pi}{L_x} \bar{x} \right) \cdot \sin \left(\frac{n \cdot \pi}{L_y} \bar{y} \right) \right\}$ Caso 3: Quando $k = 1,37$ usar as seguintes fórmulas $\omega_{zMAX}; m_x$ e m_y: $\omega_{zMAX} = (1 - \nu^2) \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m \cdot n \cdot \left[m^2 + \left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 \right]^2} \cdot \text{Sen} \left(\frac{m \cdot \pi}{3} \cdot 1,37 \right) \cdot \text{Sen} \left(\frac{n \cdot \pi}{2} \right) \right\}$ $m_x = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[m^2 + \nu \cdot \left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 \right]}{m \cdot n \cdot \left[m^2 + \left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 \right]^2} \cdot \text{Sen} \left(\frac{m \cdot \pi}{3} \cdot 1,37 \right) \cdot \text{Sen} \left(\frac{n \cdot \pi}{2} \right) \right\}$ $m_y = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left[\nu \cdot m^2 + \left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 \right]}{m \cdot n \cdot \left[m^2 + \left(\frac{n}{\lambda} \right)^2 \right]^2} \cdot \text{Sen} \left(\frac{m \cdot \pi}{3} \cdot 1,37 \right) \cdot \text{Sen} \left(\frac{n \cdot \pi}{2} \right) \right\}$ $\tau_x; \tau_y$ e τ_0 são idênticas ao caso de carregamento constante

Deste modo, a fim de ilustrar o procedimento de convergência, na Figura 5 são apresentadas as curvas de convergência do truncamento das duplas séries expressas na Tabela 2. Foi utilizado o software livre PTC MathCAD Express para tais operacionalizações.

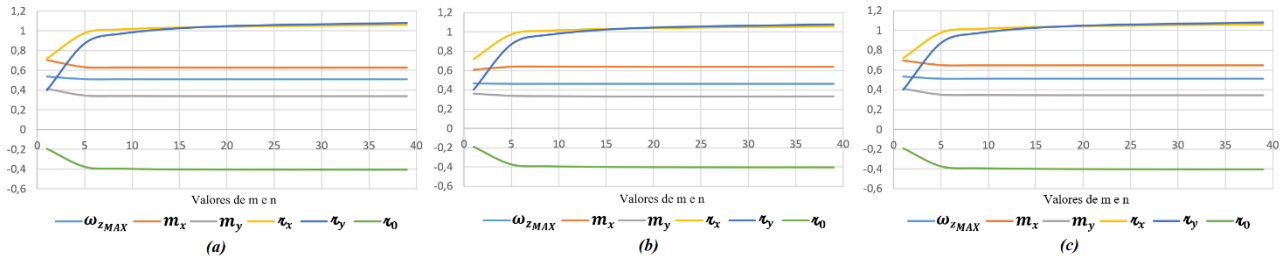
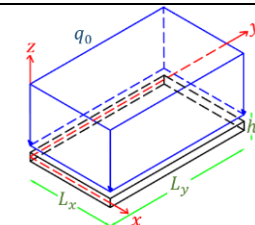


Figura 5. Curvas de convergência nas placas retangulares de razão $\lambda = 2,00$ e Poisson $\nu = 0,40$ para o: (a) carregamento uniformemente distribuído q_0 , (b) carregamento triangular e (c) carregamento trapezoidal.

3.1. Tabelas para Lajes Submetidas a Carregamento Uniforme

Na Tabela 3 são apresentados os parâmetros ω_{z_MAX} ; m_x ; m_y ; τ_x ; τ_y e τ_0 para o caso de placa retangular com bordos apoiados e submetida ao carregamento uniformemente distribuído $q(x, y) = q_0$, variando-se o coeficiente de Poisson de 0,00 até 0,40 com incremento de 0,05. Lembrar que para a utilização correta, desta tabela, deve-se sempre adotar L_y como sendo a maior dimensão da placa no plano xy .

Tabela 3. Parâmetros ω_z ; m_x ; m_y ; m_{xy} ; ν_x e ν_y para as placas retangulares apoiadas sob carregamento q_0 .



$$\omega_{MAX}[m] = \frac{192 \cdot q_0 \left[\frac{kN}{m^2} \right] \cdot L_x^4 [m^4]}{\pi^6 \cdot E \left[\frac{kN}{m^2} \right] \cdot h^3 [m^3]} \cdot \omega_{z_MAX} [ADM]; \quad R_0 [kN] = \frac{32 \cdot q_0 \left[\frac{kN}{m^2} \right] \cdot L_x^2 [m^2]}{\pi^4} \cdot \tau_0 [ADM]$$

$$\mathfrak{M}_x^{MAX} \left[\frac{kN \cdot m}{m} \right] = \frac{16 \cdot q_0 \left[\frac{kN}{m^2} \right] \cdot L_x^2 [m^2]}{\pi^4} \cdot m_x [ADM]; \quad R_x \left[\frac{kN}{m} \right] = \frac{16 \cdot q_0 \left[\frac{kN}{m^2} \right] \cdot L_x [m]}{\pi^3} \cdot \tau_x [ADM]$$

$$\mathfrak{M}_y^{MAX} \left[\frac{kN \cdot m}{m} \right] = \frac{16 \cdot q_0 \left[\frac{kN}{m^2} \right] \cdot L_x^2 [m^2]}{\pi^4} \cdot m_y [ADM]; \quad R_y \left[\frac{kN}{m} \right] = \frac{16 \cdot q_0 \left[\frac{kN}{m^2} \right] \cdot L_x [m]}{\pi^3} \cdot \tau_y [ADM]$$

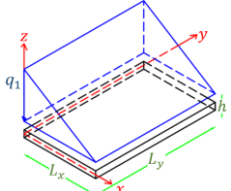
ν	$\lambda = \frac{L_y}{L_x}$	ω_{z_MAX}	m_x	m_y	τ_x	τ_y	τ_0
0,00	1,00	0,244	0,224	0,224	0,902	0,902	-0,424
	1,10	0,293	0,272	0,219	0,940	0,947	-0,465
	1,20	0,340	0,319	0,209	0,971	0,987	-0,500
	1,30	0,384	0,363	0,198	0,998	1,021	-0,532
	1,40	0,426	0,405	0,184	1,019	1,05	-0,560
	1,50	0,464	0,443	0,171	1,037	1,076	-0,585
	1,60	0,499	0,478	0,157	1,052	1,099	-0,607
	1,70	0,531	0,510	0,143	1,064	1,119	-0,626
	1,80	0,560	0,538	0,130	1,074	1,137	-0,644
	1,90	0,586	0,564	0,118	1,082	1,153	-0,659
0,05	2,00	0,609	0,587	0,106	1,089	1,168	-0,674
	1,00	0,243	0,235	0,235	0,899	0,899	-0,403
	1,10	0,292	0,283	0,232	0,937	0,943	-0,441
	1,20	0,339	0,329	0,225	0,968	0,982	-0,475
	1,30	0,383	0,373	0,216	0,995	1,016	-0,505
	1,40	0,425	0,414	0,205	1,017	1,045	-0,532
	1,50	0,463	0,451	0,193	1,035	1,07	-0,555
	1,60	0,498	0,486	0,181	1,05	1,093	-0,576
	1,70	0,530	0,517	0,169	1,062	1,113	-0,595
	1,80	0,558	0,545	0,157	1,072	1,131	-0,612
0,10	1,90	0,584	0,570	0,146	1,081	1,147	-0,626
	2,00	0,607	0,593	0,135	1,088	1,161	-0,640
	1,00	0,242	0,247	0,247	0,895	0,895	-0,382
	1,10	0,290	0,294	0,246	0,933	0,939	-0,418
	1,20	0,336	0,340	0,241	0,965	0,978	-0,450
	1,30	0,380	0,383	0,234	0,992	1,011	-0,479
	1,40	0,421	0,423	0,225	1,014	1,040	-0,504
	1,50	0,459	0,460	0,215	1,032	1,065	-0,526
	1,60	0,494	0,494	0,204	1,048	1,087	-0,546
	1,70	0,526	0,524	0,194	1,060	1,107	-0,564
0,15	1,80	0,554	0,551	0,184	1,071	1,124	-0,579
	1,90	0,580	0,576	0,174	1,079	1,140	-0,593
	2,00	0,603	0,598	0,165	1,086	1,154	-0,606
	1,00	0,239	0,258	0,258	0,891	0,891	-0,361
	1,10	0,286	0,305	0,259	0,930	0,935	-0,395
	1,20	0,332	0,350	0,257	0,962	0,973	-0,425
	1,30	0,375	0,393	0,252	0,989	1,006	-0,452
	1,40	0,416	0,432	0,245	1,011	1,035	-0,476
	1,50	0,454	0,469	0,237	1,030	1,060	-0,497
0,20	1,60	0,479	0,509	0,252	1,043	1,076	-0,485
	1,70	0,510	0,538	0,245	1,056	1,095	-0,501
	1,80	0,537	0,564	0,238	1,067	1,112	-0,515
	1,90	0,562	0,588	0,230	1,076	1,127	-0,518
	2,00	0,584	0,608	0,223	1,083	1,141	-0,539
0,25	1,00	0,229	0,280	0,280	0,884	0,884	-0,318
	1,10	0,274	0,327	0,287	0,923	0,927	-0,348
	1,20	0,318	0,371	0,289	0,956	0,964	-0,375
	1,30	0,360	0,413	0,288	0,983	0,996	-0,399
	1,40	0,399	0,451	0,286	1,006	1,024	-0,420
	1,50	0,435	0,486	0,281	1,025	1,049	-0,438
	1,60	0,468	0,517	0,276	1,041	1,070	-0,455
	1,70	0,498	0,546	0,270	1,054	1,089	-0,470
	1,80	0,525	0,571	0,265	1,065	1,106	-0,483
	1,90	0,549	0,594	0,259	1,074	1,121	-0,495
0,30	2,00	0,571	0,614	0,253	1,082	1,135	-0,505
	1,00	0,222	0,292	0,292	0,881	0,881	-0,297
	1,10	0,266	0,338	0,300	0,920	0,923	-0,325
	1,20	0,309	0,382	0,305	0,953	0,960	-0,350
	1,30	0,350	0,422	0,306	0,980	0,992	-0,372
	1,40	0,387	0,460	0,306	1,003	1,019	-0,392
	1,50	0,422	0,494	0,303	1,022	1,043	-0,409
	1,60	0,454	0,525	0,300	1,038	1,064	-0,425
	1,70	0,483	0,553	0,296	1,052	1,083	-0,438
	1,80	0,509	0,577	0,291	1,063	1,100	-0,451
0,35	1,90	0,533	0,599	0,287	1,073	1,115	-0,462
	2,00	0,554	0,619	0,282	1,080	1,128	-0,472
	1,00	0,214	0,303	0,303	0,877	0,877	-0,276
	1,10	0,257	0,349	0,314	0,916	0,919	-0,302
	1,20	0,298	0,392	0,321	0,949	0,956	-0,325
	1,30	0,337	0,432	0,325	0,977	0,987	-0,346
	1,40	0,374	0,469	0,326	1,000	1,014	-0,364
	1,50	0,407	0,503	0,326	1,020	1,038	-0,380
	1,60	0,438	0,533	0,324	1,036	1,058	-0,394
	1,70	0,466	0,560	0,321	1,050	1,077	-0,407
0,40	1,80	0,491	0,584	0,318	1,061	1,093	-0,418
	1,90	0,514	0,605	0,315	1,071	1,108	-0,429
	2,00	0,534	0,624	0,312	1,079	1,121	-0,438
	1,00	0,205	0,314	0,314	0,874	0,874	-0,255

ν	$\lambda = \frac{L_y}{L_x}$	ω_{zMAX}	m_x	m_y	α_x	α_y	α_0	ν	$\lambda = \frac{L_y}{L_x}$	ω_{zMAX}	m_x	m_y	α_x	α_y	α_0
0,15	1,60	0,488	0,501	0,228	1,045	1,081	-0,516	0,40	1,10	0,246	0,360	0,327	0,913	0,915	-0,279
	1,70	0,519	0,531	0,220	1,058	1,101	-0,532		1,20	0,285	0,403	0,337	0,946	0,951	-0,300
	1,80	0,547	0,558	0,211	1,069	1,118	-0,547		1,30	0,323	0,442	0,343	0,974	0,982	-0,319
	1,90	0,572	0,582	0,202	1,077	1,134	-0,560		1,40	0,358	0,478	0,346	0,998	1,009	-0,336
	2,00	0,595	0,603	0,194	1,085	1,148	-0,573		1,50	0,390	0,511	0,348	1,017	1,032	-0,351
0,20	1,00	0,234	0,269	0,269	0,888	0,888	-0,340		1,60	0,419	0,541	0,348	1,034	1,053	-0,364
	1,10	0,281	0,316	0,273	0,926	0,931	-0,372		1,70	0,446	0,567	0,347	1,048	1,071	-0,376
	1,20	0,326	0,361	0,273	0,959	0,969	-0,400		1,80	0,470	0,590	0,345	1,059	1,087	-0,386
	1,30	0,369	0,403	0,270	0,986	1,001	-0,426		1,90	0,492	0,611	0,343	1,069	1,102	-0,396
	1,40	0,409	0,442	0,265	1,009	1,029	-0,448		2,00	0,511	0,630	0,341	1,077	1,115	-0,404
	1,50	0,446	0,477	0,259	1,027	1,054	-0,468	Observação: Os valores de α_x , α_y e α_0 são os mesmos para ambos os casos.							

3.2. Tabelas para Lajes Submetidas a Carregamento Triangular e o Caso 1 da Ação Trapezoidal

Na Tabela 4 são postulados os parâmetros ω_{zMAX} ; m_x ; e m_y para a placa retangular com extremos apoiados, comum tanto para a aplicação de carregamento triangular quanto trapezoidal de caso 1, modificando apenas as fórmulas dos esforços solicitantes e deflexão máxima. São também tabulados para coeficiente de Poisson de 0,00 até 0,40 com incremento de 0,05. Por equivalência das fórmulas, os parâmetros α_x ; α_y e α_0 devem ser utilizados a partir da Tabela 3.

Tabela 4. Parâmetros ω_{zMAX} ; m_x ; m_y ; α_x ; α_y e α_0 para as placas retangulares apoiadas sob carregamento triangular com valor q_1 na origem dos eixos, e para carga trapezoidal com fator k natural, positivo e ímpar



$$\omega_{MAX}[m] = \frac{96 \cdot q_1 \left[\frac{kN}{m^2} \right] \cdot L_x^4 [m^4]}{\pi^6 \cdot E \left[\frac{kN}{m^2} \right] \cdot h^3 [m^3]} \cdot \omega_{zMAX} [ADM]; \quad R_0 [kN] = \frac{16 \cdot q_1 \left[\frac{kN}{m^2} \right] \cdot L_x^2 [m^2]}{\pi^4} \cdot \alpha_0 [ADM]$$

$$M_x^{MAX} \left[\frac{kN \cdot m}{m} \right] = \frac{8 \cdot q_1 \left[\frac{kN}{m^2} \right] \cdot L_x^2 [m^2]}{\pi^4} \cdot m_x [ADM]; \quad R_x \left[\frac{kN}{m} \right] = \frac{8 \cdot q_1 \left[\frac{kN}{m^2} \right] \cdot L_x [m]}{\pi^3} \cdot \alpha_x [ADM]$$

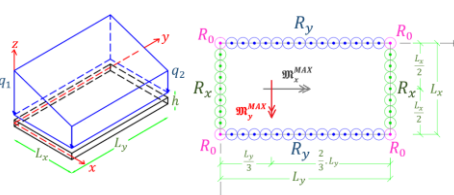
$$M_y^{MAX} \left[\frac{kN \cdot m}{m} \right] = \frac{8 \cdot q_1 \left[\frac{kN}{m^2} \right] \cdot L_x^2 [m^2]}{\pi^4} \cdot m_y [ADM]; \quad R_y \left[\frac{kN}{m} \right] = \frac{8 \cdot q_1 \left[\frac{kN}{m^2} \right] \cdot L_x [m]}{\pi^3} \cdot \alpha_y [ADM]$$

ν	$\lambda = \frac{L_y}{L_x}$	ω_{zMAX}	m_x	m_y	ν	$\lambda = \frac{L_y}{L_x}$	ω_{zMAX}	m_x	m_y	ν	$\lambda = \frac{L_y}{L_x}$	ω_{zMAX}	m_x	m_y
0,00	1,00	0,230	0,267	0,207	0,15	1,00	0,224	0,298	0,247	0,30	1,00	0,209	0,329	0,287
	1,10	0,273	0,313	0,199		1,10	0,267	0,343	0,246		1,10	0,248	0,373	0,293
	1,20	0,314	0,357	0,189		1,20	0,307	0,385	0,243		1,20	0,286	0,413	0,296
	1,30	0,353	0,398	0,177		1,30	0,345	0,425	0,237		1,30	0,322	0,451	0,297
	1,40	0,390	0,436	0,164		1,40	0,381	0,461	0,230		1,40	0,355	0,485	0,295
	1,50	0,424	0,471	0,151		1,50	0,414	0,494	0,222		1,50	0,386	0,516	0,293
	1,60	0,454	0,502	0,139		1,60	0,444	0,523	0,214		1,60	0,413	0,544	0,289
	1,70	0,482	0,531	0,126		1,70	0,471	0,550	0,206		1,70	0,439	0,569	0,285
	1,80	0,507	0,557	0,114		1,80	0,496	0,574	0,198		1,80	0,462	0,591	0,281
	1,90	0,530	0,579	0,103		1,90	0,518	0,595	0,190		1,90	0,482	0,610	0,277
0,05	2,00	0,550	0,600	0,093	0,20	2,00	0,537	0,614	0,183	0,35	2,00	0,500	0,628	0,273
	1,00	0,229	0,277	0,220		1,00	0,220	0,308	0,260		1,00	0,201	0,339	0,300
	1,10	0,272	0,323	0,215		1,10	0,262	0,353	0,262		1,10	0,239	0,383	0,309
	1,20	0,313	0,366	0,207		1,20	0,302	0,395	0,260		1,20	0,276	0,423	0,314
	1,30	0,353	0,407	0,197		1,30	0,339	0,433	0,257		1,30	0,310	0,460	0,316
	1,40	0,389	0,444	0,186		1,40	0,374	0,469	0,252		1,40	0,342	0,494	0,317
	1,50	0,423	0,478	0,175		1,50	0,407	0,501	0,246		1,50	0,372	0,524	0,316
	1,60	0,453	0,509	0,164		1,60	0,436	0,530	0,239		1,60	0,399	0,551	0,314
	1,70	0,481	0,537	0,153		1,70	0,463	0,556	0,232		1,70	0,423	0,575	0,312
	1,80	0,506	0,562	0,142		1,80	0,487	0,579	0,226		1,80	0,445	0,597	0,309
0,10	1,90	0,528	0,585	0,132	0,25	1,90	0,509	0,600	0,219	0,40	1,90	0,465	0,616	0,306
	2,00	0,548	0,604	0,123		2,00	0,528	0,618	0,213		2,00	0,482	0,632	0,303
	1,00	0,227	0,287	0,233		1,00	0,215	0,318	0,278		1,00	0,193	0,349	0,313
	1,10	0,270	0,333	0,230		1,10	0,256	0,363	0,277		1,10	0,229	0,392	0,324
	1,20	0,311	0,376	0,225		1,20	0,295	0,404	0,278		1,20	0,264	0,432	0,332
	1,30	0,350	0,416	0,217		1,30	0,331	0,442	0,277		1,30	0,297	0,469	0,336
	1,40	0,386	0,452	0,208		1,40	0,366	0,477	0,273		1,40	0,328	0,502	0,339
	1,50	0,419	0,486	0,199		1,50	0,397	0,509	0,269		1,50	0,356	0,531	0,340
	1,60	0,450	0,516	0,189		1,60	0,426	0,537	0,264		1,60	0,383	0,558	0,340
	1,70	0,477	0,544	0,179		1,70	0,452	0,562	0,259		1,70	0,405	0,581	0,339
0,15	1,80	0,502	0,568	0,170	0,30	1,80	0,476	0,585	0,253		1,80	0,426	0,602	0,337
	1,90	0,524	0,590	0,161		1,90	0,497	0,605	0,248		1,90	0,445	0,621	0,335
	2,00	0,544	0,609	0,153		2,00	0,515	0,623	0,243		2,00	0,462	0,637	0,333

3.3. Tabelas para Lajes Submetidas a Carregamento Trapezoidal no Caso 3

De forma análoga a Tabela 4, na Tabela 5 são apresentados os parâmetros destinados à análise estrutural da laje retangular apoiada submetida a carregamento trapezoidal, com carga q_1 na face pertencente ao eixo y e sob carga q_2 na face distante L_x da origem dos eixos, isso relativo ao eixo y, conforme Figura 4. Também por equivalência das fórmulas, os parâmetros α_x ; α_y e α_0 devem ser utilizados a partir da Tabela 3.

Tabela 5. Parâmetros ω_z ; m_x ; m_y ; m_{xy} ; v_x e v_y para as placas retangulares apoiadas para o caso 3 de carregamento trapezoidal, com fator $k = \frac{(2q_2+q_1)}{(q_2+q_1)} \equiv 1,37$ e decorrente da razão $c = \frac{q_1}{q_2} \equiv 1,7$ (mais usual)

					$\omega_{MAX}[m] = \frac{96 \cdot (q_1 + q_2) \left[\frac{kN}{m^2} \right] \cdot L_x^4 [m^4]}{\pi^6 \cdot E \left[\frac{kN}{m^2} \right] \cdot h^3 [m^3]} \cdot \omega_{zMAX}[ADM]; R_0 [kN] = \frac{16 \cdot (q_1 + q_2) \left[\frac{kN}{m^2} \right] \cdot L_x^2 [m^2]}{\pi^4} \cdot \tau_0 [ADM]$									
$\mathfrak{M}_x^{MAX} \left[\frac{kN \cdot m}{m} \right] = \frac{8 \cdot (q_1 + q_2) \left[\frac{kN}{m^2} \right] \cdot L_x^2 [m^2]}{\pi^4} \cdot m_x [ADM]; R_x \left[\frac{kN}{m} \right] = \frac{8 \cdot (q_1 + q_2) \left[\frac{kN}{m^2} \right] \cdot L_x [m]}{\pi^3} \cdot \tau_x [ADM]$					$\mathfrak{M}_y^{MAX} \left[\frac{kN \cdot m}{m} \right] = \frac{8 \cdot (q_1 + q_2) \left[\frac{kN}{m^2} \right] \cdot L_x^2 [m^2]}{\pi^4} \cdot m_y [ADM]; R_y \left[\frac{kN}{m} \right] = \frac{8 \cdot (q_1 + q_2) \left[\frac{kN}{m^2} \right] \cdot L_x [m]}{\pi^3} \cdot \tau_y [ADM]$									
ν	$\lambda = \frac{L_y}{L_x}$	ω_{zMAX}	m_x	m_y	ν	$\lambda = \frac{L_y}{L_x}$	ω_{zMAX}	m_x	m_y	ν	$\lambda = \frac{L_y}{L_x}$	ω_{zMAX}	m_x	m_y
0,00	1,00	0,247	0,239	0,226	0,15	1,00	0,241	0,273	0,262	0,30	1,00	0,225	0,307	0,298
	1,10	0,295	0,288	0,219		1,10	0,289	0,321	0,263		1,10	0,269	0,354	0,306
	1,20	0,342	0,336	0,210		1,20	0,334	0,367	0,260		1,20	0,311	0,398	0,310
	1,30	0,386	0,380	0,198		1,30	0,378	0,410	0,255		1,30	0,352	0,439	0,312
	1,40	0,428	0,422	0,184		1,40	0,418	0,450	0,247		1,40	0,389	0,477	0,311
	1,50	0,466	0,460	0,170		1,50	0,455	0,486	0,239		1,50	0,424	0,511	0,308
	1,60	0,501	0,495	0,156		1,60	0,489	0,519	0,230		1,60	0,456	0,542	0,305
	1,70	0,532	0,527	0,142		1,70	0,520	0,549	0,221		1,70	0,484	0,57	0,301
	1,80	0,561	0,556	0,129		1,80	0,548	0,575	0,213		1,80	0,510	0,595	0,296
	1,90	0,586	0,582	0,117		1,90	0,573	0,599	0,204		1,90	0,534	0,617	0,291
0,05	2,00	0,609	0,605	0,105	0,20	2,00	0,596	0,620	0,196	0,35	2,00	0,554	0,636	0,287
	1,00	0,246	0,251	0,238		1,00	0,237	0,285	0,274		1,00	0,217	0,318	0,310
	1,10	0,294	0,299	0,234		1,10	0,283	0,332	0,277		1,10	0,259	0,365	0,320
	1,20	0,341	0,346	0,226		1,20	0,328	0,377	0,277		1,20	0,300	0,409	0,327
	1,30	0,385	0,390	0,217		1,30	0,371	0,420	0,274		1,30	0,339	0,449	0,331
	1,40	0,427	0,431	0,205		1,40	0,411	0,459	0,268		1,40	0,375	0,486	0,332
	1,50	0,465	0,469	0,193		1,50	0,447	0,494	0,262		1,50	0,409	0,52	0,331
	1,60	0,499	0,503	0,181		1,60	0,481	0,527	0,255		1,60	0,439	0,55	0,330
	1,70	0,531	0,534	0,169		1,70	0,511	0,556	0,248		1,70	0,467	0,577	0,327
	1,80	0,559	0,562	0,157		1,80	0,538	0,582	0,240		1,80	0,492	0,601	0,324
0,10	1,90	0,585	0,587	0,146	0,25	1,90	0,563	0,605	0,233	0,40	1,90	0,515	0,623	0,320
	2,00	0,608	0,610	0,136		2,00	0,585	0,626	0,226		2,00	0,535	0,641	0,317
	1,00	0,244	0,262	0,250		1,00	0,231	0,296	0,286		1,00	0,207	0,330	0,322
	1,10	0,292	0,310	0,248		1,10	0,277	0,343	0,292		1,10	0,248	0,376	0,335
	1,20	0,339	0,356	0,243		1,20	0,321	0,388	0,293		1,20	0,287	0,419	0,344
	1,30	0,382	0,400	0,236		1,30	0,362	0,43	0,293		1,30	0,325	0,459	0,350
	1,40	0,423	0,440	0,226		1,40	0,401	0,468	0,290		1,40	0,359	0,496	0,353
	1,50	0,461	0,477	0,216		1,50	0,437	0,503	0,285		1,50	0,391	0,528	0,354
	1,60	0,496	0,511	0,206		1,60	0,469	0,534	0,280		1,60	0,421	0,558	0,354
	1,70	0,527	0,541	0,195		1,70	0,499	0,563	0,274		1,70	0,447	0,584	0,353
	1,80	0,555	0,569	0,185		1,80	0,526	0,588	0,268		1,80	0,471	0,608	0,352
	1,90	0,581	0,593	0,175		1,90	0,550	0,611	0,262		1,90	0,493	0,628	0,350
	2,00	0,603	0,615	0,166		2,00	0,571	0,631	0,256		2,00	0,512	0,647	0,347

4. VALIDAÇÃO NUMÉRICA

Na Figura 6 é apresentada a laje retangular, cujo exemplo I é definido para as dimensões $L_x = 3\text{ m}$; $L_y = 4\text{ m}$ e espessura $h = 0,10\text{ m}$, sendo moldada com material de módulo de elasticidade longitudinal valendo $E = 28,518\text{ GPa}$, bem como, simulando com coeficiente de Poisson de 0,20 e de 0,15. Foram calculados os momentos fletores máximos ($\mathfrak{M}_x^{MAX}$; $\mathfrak{M}_y^{MAX}$) e as deflexões máximas (ω_{MAX}) para os carregamentos: – constante $q_0 = 2\text{ kN/m}^2$; – triangular de valor inicial $q_1 = 4,5\text{ kN/m}^2$; e por último, – trapezoidal de valores $q_1 = 1,2\text{ kN/m}^2$ e $q_2 = 0,7\text{ kN/m}^2$.

Já o exemplo II é definido para carregamento constante ($q_0 = 2\text{ kN/m}^2$), coeficiente de Poisson de 0,30, altura de 3 cm, módulo de elasticidade ($E = 210\text{ GPa}$) e dimensões: $L_x = 2\text{ m}$ por $L_y = 4\text{ m}$. Assim, na Figura 6 (d) é apresentada a modelagem no software Ansys para este último exemplo.

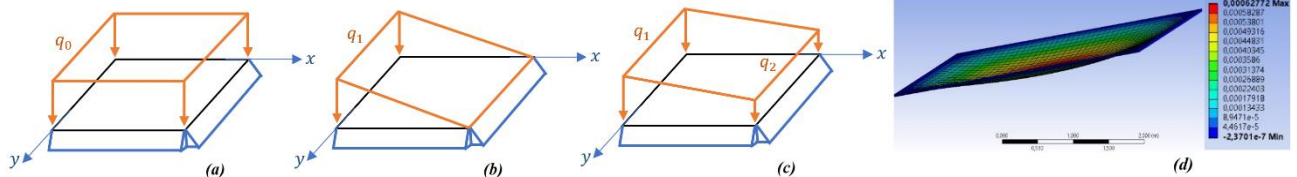


Figura 6. Laje retangular do exemplo de validação numérica, sob carga: (a) constante q_0 , (b) triangular em x, (c) trapezoidal na direção x e (d) modelagem no Ansys para o exemplo II.

E por fim, na Tabela 6 são listados os valores das deflexões e dos momentos fletores máximos para os casos de carregamento já elencados. A validação dos resultados obtidos pela utilização das tabelas apresentadas neste artigo é realizada por comparação aos valores obtidos ao utilizar tabelas consagradas na literatura, para os carregamentos constantes e triangulares. Ademais, a tabulação da aplicação em carregamento trapezoidal é destinada a exemplificar a utilização da Tabela 5, com razão de cargas valendo aproximadamente 1,7 e logo enquadrando-se no caso 3 trapezoidal.

Tabela 6. Validação da tabulação dos carregamentos analisados, além da exemplificação da Tabela 5

Tabela 6. Validação da tabulação dos carregamentos analisados, além da exemplificação da Tabela 5													
Ex.'s	ν	Carregamento constante				Carregamento triangular			Carregamento trapezoidal				
		Método	ω_{MAX} [m]	$\mathfrak{M}_x^{MAX}$	$\mathfrak{M}_y^{MAX}$	Método	ω_{MAX} [m]	$\mathfrak{M}_x^{MAX}$	$\mathfrak{M}_y^{MAX}$	Método	ω_{MAX} [m]	$\mathfrak{M}_x^{MAX}$	$\mathfrak{M}_y^{MAX}$
I.	0,15	Os Autores	0,0004413	1,20 kN.m/m	0,74 kN.m/m	Os Autores	0,0004569	1,46 kN.m/m	0,78 kN.m/m	Os Autores	0,0002107	0,59 kN.m/m	0,35 kN.m/m
		Bares	0,0004414	1,20 kN.m/m	0,74 kN.m/m	Bares	0,0004985	1,47 kN.m/m	0,83 kN.m/m	-----	-----	-----	-----
		$\Delta(\%)$	0,02	0,00	0,00	$\Delta(\%)$	8,35	0,68	6,02	-----	-----	-----	-----
		Ansys	0,00045668	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
		$\Delta(\%)$	3,37	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
	0,20	Os Autores	0,0004334	1,23 kN.m/m	0,80 kN.m/m	Os Autores	0,000448	1,48 kN.m/m	0,85 kN.m/m	Os Autores	0,0002069	0,61 kN.m/m	0,38 kN.m/m
		Pinheiro	0,0004410	1,20 kN.m/m	0,73 kN.m/m	Pinheiro	0,0004985	1,47 kN.m/m	0,83 kN.m/m	-----	-----	-----	-----
		$\Delta(\%)$	1,72	2,50	9,60	$\Delta(\%)$	10,13	0,68	2,40	-----	-----	-----	-----
		Ansys	0,00044776	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
		$\Delta(\%)$	3,21	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
II.	0,30	Os Autores	0,00062442	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
		Bares	0,00062310	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
		$\Delta(\%)$	0,21	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
		Ansys	0,00062772	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
		$\Delta(\%)$	0,53	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Ressalta-se ainda que a validação das deflexões dos exemplos I e II foram procedidas também via modelagem no software Ansys, dos quais foi observada uma convergência de 96,71% e de 99,47%, respectivamente. E em finalização, na Figura 7 são apresentados os estados deformados do exemplo I para o carregamento uniforme.

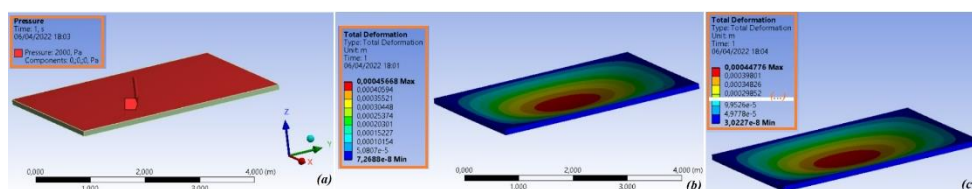


Figura 7. Modelagem do ex. I: (a) aplicação da carga q_0 , além das deformações para Poisson de (b) 0,15 e (c) 0,20

5. CONCLUSÕES

A contribuição crucial deste artigo é a tabulação da análise estrutural e do estado de deformação de lajes retangulares com bordos apoiados, desde o cálculo da deflexão máxima, momentos flettores máximos e das reações de apoio e de canto. Nestas tabelas são possíveis analisar lajes submetidas a três fontes distintas de carregamentos: - o carregamento constante, mais presente no cotidiano dos projetos estruturais, com a quantificação do peso-próprio da laje e da carga de utilização; - o carregamento triangular, cuja aplicabilidade mais usual ocorre nas paredes de reservatórios, em especial na análise à flexão decorrente do empuxo de água ou de terra; e por último, - o carregamento trapezoidal, que pode simular lajes suportando empenas de coberturas.

Além das tabulações já citadas, nesta publicação é permitido ao leitor o contato rápido e prático com as equações geratrizes das tabelas, o que confere autonomia, inclusive, para avançar nas precisões dos cálculos estruturais. Em particular, para o caso de carregamento trapezoidal foi verificado também que à medida com que a razão entre os carregamentos extremos q_1 e q_2 é modificada, mudam-se as tabelas de obtenção dos parâmetros ω_{zMAX} , m_x e m_y . Mas, de forma inédita, na tabela 2 é apresentada a formulação generalizada para gerar quaisquer valores dos aludidos parâmetros para qual seja a razão dos carregamentos extremos da função trapezoidal.

E por fim, é apresentada a análise estrutural e do estado deformado de uma laje retangular nos moldes das hipóteses elencadas na fundamentação teórica, visando assim, a validação de todo o equacionamento e tabulações procedidas neste artigo. Nestas aplicações foram utilizados dois valores de coeficiente de Poisson: 0,15; 0,20 e 0,30. Nas análises do estado deformado foi observada convergência 99,38% para a laje submetida a carregamento constante, valendo-se de tabelas já consolidadas na literatura para proceder tal validação, bem como o software Ansys. Ainda na ação do carregamento constante foi percebido um erro médio de apenas 3,03% para os momentos flettores máximos. E por último, para o carregamento triangular foi observado uma discrepância média de 4,71% nos parâmetros elásticos analisados, porém a convergência dos deslocamentos é nítida se o valor for arredondado em 4 casas decimais, enquanto que os momentos são idênticos até o primeiro algarismo significativo.

6. REFERÊNCIAS

- Ahmed, L., 2018. "Dynamic measurements for determining Poisson's Ratio of young concrete". *Nordic Concrete Research*, Vol. 58, No. 1, pp. 95–106. doi:10.2478/ncr-2018-0006.
- American Concrete Institute – ACI., 1997, *Guide for structural lightweight aggregate concrete*. ACI 213 R – 87, ACI Manual of Concrete Practice – parte I.
- Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2014, *Projeto de estruturas de concreto – procedimento*. ABNT, Rio de Janeiro.
- Araújo, J.M., 2014, *Curso de concreto armado*. Editora Dunas, Rio Grande do Sul, Vol. 2, 4ª ed.

- Bares, R., 1971, *Tables for the analysis of plates, slabs and diaphragms*. Library of Congress Catalogue, Washington, English translation by Carel Van Amerongen, Second Enlarged Edition.
- Bhaskar, K. and Varadan, T.K., 2013, *Plates: theories and applications*. John Wiley & Sons, New Delhi.
- Bhavikatti, S.S., 2012, *Theory of plates and shells*. New Age Published, New Delhi.
- DINEV, D., 2020, *Lecture 9: plate analysis*. Department of Structural Mechanics, UACEG.
- Kollár, L.P. and Tarján, G., 2021, *Mechanics of civil engineering structures*. Elsevier, Cambridge.
- Pinheiro, L.M., 2007, *Tabelas de lajes*. EESC - Departamento de Engenharia de Estruturas, São Carlos.
- Soares, A.M., 2004, *Análise comparativa de esforços e deflexões em placas retangulares finas*. UNIFEI, Itajubá, Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica.
- Szilar, R., 2004, *Theories and applications of plates analysis: classical, numerical and engineering methods*. John Wiley & Sons, New Jersey.
- Wang, C.M., Reedy, J.N. and Lee, K.H., 2000, *Shear deformable beams and plates: relationships with classical solutions*. Elsevier, New York.
- Zenkour, A.M., 2003. "Exact mixed-classical solutions for the bending analysis of shear deformable rectangular plates". *Applied Mathematical Modeling*, Vol. 27, pp. 515–534. doi:10.1016/S0307-904X(03)00046-5.
- Zhang, J., Zhou, C., Ullah, S., Zhong, Y. and Li, R., 2019. "Accurate bending analysis of rectangular thin plates with corner supports by a unified finite integral transform method". *Acta Mech.*, Vol. 230, pp. 3807–3821. doi:10.1007/s00707-019-02488-7.

7. RESPONSABILIDADE AUTORAL

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho.

STATIC ANALYSIS AND TABULATION OF RELEVANT PARAMETERS IN SUPPORTED RECTANGULAR SLABS UNDER TRAPEZOIDAL-DERIVED LOADS AND MODELED WITH CONCRETE WITH POISSON DISTINCT FROM THE NORMED VALUE

Wesley Imperiano Gomes de Melo, wesleyimperiano@hotmail.com¹

Pedro Vitor Carvalho de Alencar Luz, pedro200298@hotmail.com²

Glivio Gayerk Batista Freire, glivioengcivilufpe@outlook.com³

Luiz Guilherme Calheiros Alves Vieira, luiz.guilhermevieira.eng@gmail.com³

¹ Federal Rural University of Pernambuco, Professor, Rua Cento e Sessenta e Três – 300 – Garapú – Cabo de Santo Agostinho/PE.

² Federal Rural University of Pernambuco, Graduate in Civil Engineering, Rua Cento e Sessenta e Três – 300 – Garapú – Cabo de Santo Agostinho/PE.

³ Federal Rural University of Pernambuco, Student in Civil Engineering, Rua Cento e Sessenta e Três – 300 – Garapú – Cabo de Santo Agostinho/PE.

Abstract. Currently, the theoretical analysis of rectangular slabs is proceeded in a two-dimensional way by the Sophie-Germain-Lagrange Theory, being tabulated the relevant parameters for concrete with Poisson coefficient of 0.2 (standardized value). However, with the advancement and dissemination of concrete technology is observed increasingly the molding of structural parts with Poisson values different from the standardized. In this sense, aiming to fill this gap is that this article will present the formulation of displacements and internal forces for rectangular plates under trapezoidal, rectangular and triangular loads, thus allowing the engineer to impose the appropriate value of Poisson's ratio for the project under execution. Furthermore, tables will be presented with the parameters of: displacements (deflections), bending moments and shear forces for eight values around the Poisson of 0.20 and under the variation of 0.05 between them. Thus, the relevance of this publication will be the tabulation of the relevant parameters for rectangular slabs supported under Poisson values from 0 (zero) to 0.40, besides listing the generic equations so that the reader, if deemed necessary, can apply to the project under his supervision. The methodology employed will be the literature review plus the equation of the two-dimensional slab problem via Sophie-Germain-Lagrange Theory, with emphasis on the elasto-mechanical properties contained in the coefficient D that includes Poisson's coefficient, in addition to solving the differential equation via Navier's method and validating the tabulations using application examples already established in the literature and by modeling slabs with dimensions defined in the academic version of ANSYS software, whose convergence was 99.47% (0.30 as Poisson coefficient) for validation via the software. The results obtained were the tables for quantification of displacements and internal forces in the shape slabs and under the loads already described. Finally, the validation of the tabulations led to deflection values for the constant load under convergence from 98.28% to 99.98%, as for the bending moments it was noticeable an average error of only 1.68% for Poisson of 0.15 and 3.80% for Poisson of 0.20

Keywords: rectangular plates, loads with linear variation, Poisson's coefficient, Tabulation, Theory of Sophie-Germain-Lagrange.