

TÉCNICA DO MEIO CONTÍNUO APLICADA A ANÁLISE MODAL DE PILARES DE MADEIRA COM SEÇÃO DE PAREDES FINAS SOB FORMATO C E DUPLO T

Wesley Imperiano Gomes de Melo, wesleyimperiano@hotmail.com¹
Luiz Guilherme Calheiros Alves Vieira, luiz.guilhermevieira.eng@gmail.com²
Glivio Gayerk Batista Freire, glivioengcivilufpe@outlook.com²
Daniel Alves da Silva Junior, danieltimekiller@gmail.com²
Ricardo Augusto Filho, ricardoaugusto153@gmail.com²

¹Universidade Federal Rural de Pernambuco, Professor Adjunto, Rua Cento e Sessenta e Três – 300 – Garapú – Cabo de Santo Agostinho/PE.

² Universidade Federal Rural de Pernambuco, Bacharelado em Engenharia Civil, Rua Cento e Sessenta e Três – 300 – Garapú – Cabo de Santo Agostinho/PE.

Resumo: A modelagem dinâmica de pilares de madeira com seção composta é atualmente consolidada na literatura através de formulários desenvolvidos apenas para justaposição de peças retangulares maciças com espaçamento ocasionado por barrotes espaçados. Visando suprir tal lacuna, neste artigo é apresentada a análise modal dos mencionados pilares de madeira, ampliando as seções compostas para paredes finas em formato de C e de duplo T, além de analisá-los sob a ótica do contraventamento paralelo, em Z e em X quanto aos lintéis. Desta forma, a relevância desta publicação é apresentar rotina de análise modal para os pilares de paredes finas C e em duplo T via Técnica do Meio Contínuo (TMC), o que permite conferir agilmente as modelagens procedidas em softwares comerciais que expõem apenas os resultados finais. A metodologia empregada foi de revisão da literatura acrescida da demonstração da análise modal dos mencionados pilares, partindo da resolução da equação diferencial para análise estática e dinâmica de núcleos C e duplo T, contraventados ou não. Em seguida, os resultados obtidos pela TMC foram validados pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) com o auxílio do software ANSYS versão acadêmica. Os resultados obtidos foram os seguintes: o sistema de equilíbrio; as equações diferenciais resolvidas no sistema generalizado de coordenadas, a expressão da equação transcendental; a tabulação dos parâmetros necessários para a quantificação das frequências de vibração via TMC; além de expor os primeiros modos de vibração dos pilares já mencionados, tanto pela TMC quanto pela análise no software comercial. Por fim foram estabelecidos os coeficientes de ajuste entre a teoria de Euler-Bernoulli e a de Timoshenko, para a análise do estado deformado dos elementos diferenciais dos painéis – parede. Em decorrência, foram modelados dois exemplos, um do pilar em núcleo C e outro em núcleo duplo T, sendo verificada a convergência média de 97,32% entre as frequências obtidas via TMC e pelo MEF.

Palavras-chave: Técnica do Meio Contínuo, pilares de madeira, modos de vibração, paredes finas, lintéis.

1. INTRODUÇÃO

O estudo sistematizado da flexo-torção verificada em seções de núcleos estruturais foi apresentado por Vlassov (1964), advindo da sua Tese de Doutorado no “Institut des Ingénieurs-Constructeurs de Moscou”. Cujo teor é listado na referida publicação, desde a análise de deslocamentos, esforços e estudo dos problemas de vibração para as peças de paredes finas. Desta forma, Vlassov estruturou um método de análise estrutural de núcleos estruturais assumindo que seção transversal de paredes finas é composta por placas finas, os denominados **Painéis – Parede** por Mancini (1972) e Barbosa (1978).

No contexto da América Latina para análise dos Painéis-Parede pela TMC citam-se os estudos percursores de: Ricaldoni (1958), Ricaldoni (1959), Stamato & Smith (1969), Stamato (1966), Stamato (1971), os quais procederam suas pesquisas sob a ótica proposta por Vlassov (1964) e com a aplicação prática em *Edifícios Altos*. Cabe ressaltar que os termos Técnica do Meio Contínuo (TMC) e Teoria dos Painéis – Parede (TPP) foram cunhados na publicação de Barbosa (1978), cuja aplicação moderna consta em Melo and Barbosa (2020 a, b, c) e em Melo *et al.* (2021).

Agora, mais especificamente com aspectos pertinentes para a adequação da TMC/TPP para a modelagem estática e dinâmica de pilares de madeira citam-se: Hashemi *et al.* (2016) para a modelagem das ligações das peças de madeira, além de recorrer a Ramage *et al.* (2017), para justificar a disposição dos lintéis de contraventamento em X e em Z.

Na análise dinâmica dos Painéis – Parede pode-se citar o Laredo (1977) para as primeiras análises processadas na Mecânica das Estruturas; já em termos específicos e voltado à edificações construídas em madeira percebe-se a relevância de Alalwan and Larsson (2019) e de Xing *et al.* (2011). Ademais, em Wei *et al.* (2019), percebe-se o estudo do

funcionamento estrutural de painéis-parede compostos por madeira laminada e colada. Já em Aboleda-Monsalve *et al.* (2019) é procedida a análise dos modos de vibração, porém sem a consideração das paredes finas.

Por fim, é perceptível a lacuna que será alvo deste artigo, sendo então, modelados os pilares de madeira com seção transversal de paredes finas em formato de núcleos C e duplo T, contraventados ou não por lintéis horizontais, em X e em Z, sempre pela Técnica do Meio Contínuo atrelada a Teoria dos Painéis – Parede.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A formulação estática e dinâmica dos pilares de paredes finas, sob a ótica da Técnica do Meio Contínuo e da Teoria dos Painéis-Parede, é elencada em Melo and Barbosa (2020 a, b, c) e em Melo *et al.* (2021), porém faltando a análise matricial dos lintéis de contraventamento. Contemplam-se assim, os núcleos C em completude, desde os lintéis dispostos uniformemente e horizontais, além dos módulos de lintéis em Z e em X, porém restringindo-se a aplicações em pilares de concreto armado e metálicos.

2.1. Análise Estática do Pilar de Madeira em Núcleo Duplo T Assimétrico

Desta forma, em busca de sanar a lacuna da aplicação da TMC em pilares de madeira e complementar a expansão da análise matricial para o contraventamento em núcleos estruturais de formato duplo T, na Figura 1 (a) é apresentado mencionado o pilar de madeira com painéis – parede dispostos assimetricamente. E a fim de ilustrar a análise estrutural dos painéis – parede, nas Figuras 1 (b), (c) e (d) são dispostos os fluxos de cisalhamento e os esforços solicitantes nos elementos diferenciais dos painéis – parede (1), (4) e (7), respectivamente.

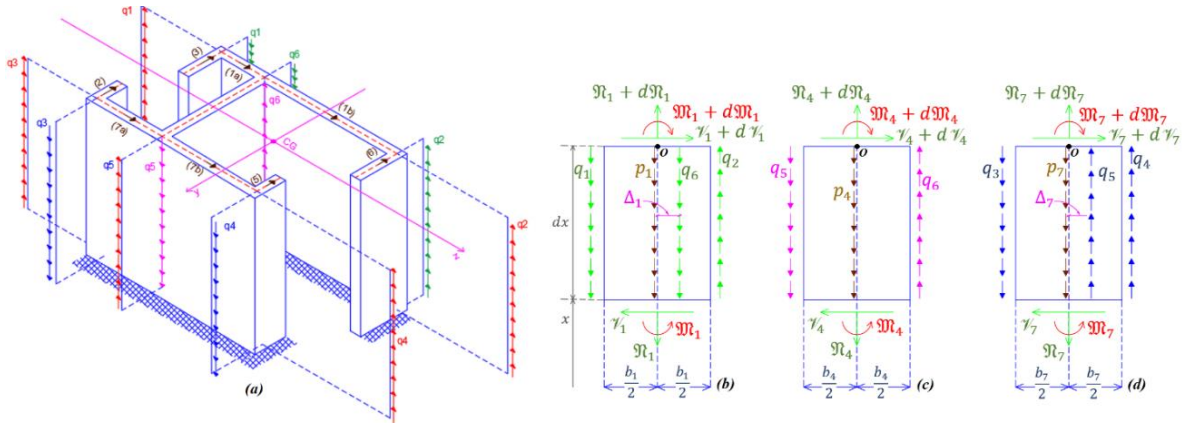


Figura 1. **Pilar de madeira em núcleo estrutural duplo T: (a) notação das tensões de cisalhamento nos encontros dos painéis, além da distribuição de fluxo de cisalhamento e esforços solicitantes nos painéis (b) 1, (c) 4 e (d) 7.**

Ao realizar a compatibilização dos deslocamentos e rotações dos painéis – parede, com o emprego da Teoria de Euler-Bernoulli para expressar o estado deformado dos elementos diferenciais, escrevem-se:

$$\{q\} = [M_1]^{-1} \cdot [M_3] \cdot \{\psi'\} + [M_1]^{-1} \cdot [M_4] \cdot \{\psi'''\} + [M_1]^{-1} \cdot [M_{10}] \cdot \{p\} \quad (1)$$

$$\{\psi'''\} = [M_5] \cdot \{\psi'''\} + [M_6] \cdot [M_4] \cdot \{\psi'\} + [M_7] \cdot \{q\} \quad (2)$$

$$\text{com: } [M_1] = \begin{bmatrix} A_1 + A_3 & -A_3 & 0 & 0 & 0 & A_3 \\ A_6 & A_1 - A_6 & 0 & 0 & 0 & A_6 \\ 0 & 0 & A_2 + A_7 & A_2 & -A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_5 & A_5 + A_7 & -A_5 & 0 \\ 0 & 0 & -A_4 & -A_4 & A_4 + A_7 & -A_7 \\ A_4 & -A_4 & 0 & 0 & -A_1 & A_1 + A_4 \end{bmatrix}; [M_{10}] = \begin{bmatrix} -A_3 & 0 & A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_1 & 0 \\ 0 & A_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_7 & 0 & -A_5 \\ 0 & 0 & 0 & -A_7 & 0 & 0 & A_4 \\ -A_4 & 0 & 0 & A_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; [M_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & d_5 \\ 0 & 0 & d_6 \end{bmatrix}; \Delta_1 = \frac{b_{1a} - b_{1b}}{2}; \Delta_7 = \frac{b_{7a} - b_{7b}}{2};$$

$$[M_4] = \frac{E}{2} \cdot \begin{bmatrix} -b_1 \cdot A_1 \cdot A_3 & 0 & -b_1 \cdot A_1 \cdot A_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 \cdot A_1 \cdot A_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_6 \cdot A_1 \cdot A_6 \\ 0 & b_2 \cdot A_2 \cdot A_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 \cdot A_5 \cdot A_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b_4 \cdot A_4 \cdot A_7 & 0 & 0 \\ (b_{1a} - b_{1b}) \cdot A_5 \cdot A_7 & 0 & 0 & -b_4 \cdot A_1 \cdot A_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \{q\} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix}; \{\psi'''\} = \begin{bmatrix} \psi_1''' \\ \psi_2''' \\ \psi_3''' \\ \psi_4''' \\ \psi_5''' \\ \psi_6''' \\ \psi_7''' \end{bmatrix}; \{\psi'\} = \begin{bmatrix} \psi_1' \\ \psi_2' \\ \psi_3' \\ \psi_4' \\ \psi_5' \\ \psi_6' \\ \psi_7' \end{bmatrix};$$

$$[M_5] = \begin{bmatrix} -j_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -j_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -j_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -j_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -j_7 \end{bmatrix}; [M_7] = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & (b_{1b} - b_{1a}) \\ 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & -b_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_7 & -b_7 & (b_{7a} - b_{7b}) & 0 & 0 \end{bmatrix}; [M_6] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_5 \\ 0 & 0 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_8 \end{bmatrix}; \{p\} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \end{bmatrix}; e$$

$j_i = E \cdot I_{z_i}$ é o momento de inércia calculado no sistema local de referências, definido para cada i-ésimo painel-parede.

E para o contraventamento, seja horizontal, em Z ou em X, tem-se os parâmetros d_1 a d_8 definidos via análise matricial das equações de George Alfred Maney (1915) aplicada aos lintéis horizontais, em Z e em X, respectivamente. Assim:

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \begin{cases} \frac{-A_1}{h} \cdot \left\{ \omega_{i_1} \cdot \left(k_{22} + \frac{k_{23}}{d_{i_1}} \right) + \omega_{f_1} \cdot \left(k_{25} + \frac{k_{26}}{d_{f_1}} \right) \right\} \\ \frac{-A_1}{h} \cdot \left\{ \omega_{i_1} \cdot \left(-k_{21} + k_{22} + \frac{k_{23}}{d_{i_1}} \right) + \omega_{f_1} \cdot \left(-k_{24} + k_{25} + \frac{k_{26}}{d_{f_1}} \right) \right\} \\ \frac{-A_1}{h} \cdot \left\{ \omega_{i_1} \cdot \left(-k_{21} + k_{22} + \frac{k_{23}}{d_{i_1}} \right) \right\} \end{cases} ; \quad d_2 = \begin{cases} \frac{-A_1}{h} \cdot \left\{ \omega_{i_2} \cdot \left(k_{52} + \frac{k_{53}}{d_{i_2}} \right) + \omega_{f_2} \cdot \left(k_{55} + \frac{k_{56}}{d_{f_2}} \right) \right\} \\ \frac{-A_1}{h} \cdot \left\{ \omega_{i_2} \cdot \left(-k_{51} + k_{52} + \frac{k_{53}}{d_{i_2}} \right) + \omega_{f_2} \cdot \left(-k_{54} + k_{55} + \frac{k_{56}}{d_{f_2}} \right) \right\} \\ \frac{-A_1}{h} \cdot \left\{ \omega_{f_2} \cdot \left(-k_{54} + k_{55} + \frac{k_{56}}{d_{f_2}} \right) \right\} \end{cases} \quad (3 \text{ a} - \text{b}) \\
 d_3 &= \begin{cases} \frac{-A_7}{h} \cdot \left\{ \omega_{i_1} \cdot \left(k_{52} + \frac{k_{53}}{d_{i_1}} \right) + \omega_{f_1} \cdot \left(k_{55} + \frac{k_{56}}{d_{f_1}} \right) \right\} \\ \frac{-A_7}{h} \cdot \left\{ \omega_{i_1} \cdot \left(-k_{51} + k_{52} + \frac{k_{53}}{d_{i_1}} \right) + \omega_{f_1} \cdot \left(-k_{54} + k_{55} + \frac{k_{56}}{d_{f_1}} \right) \right\} \\ \frac{-A_7}{h} \cdot \left\{ \omega_{f_1} \cdot \left(-k_{54} + k_{55} + \frac{k_{56}}{d_{f_1}} \right) \right\} \end{cases} ; \quad d_4 = \begin{cases} \frac{-A_7}{h} \cdot \left\{ \omega_{i_2} \cdot \left(k_{22} + \frac{k_{23}}{d_{i_2}} \right) + \omega_{f_2} \cdot \left(k_{25} + \frac{k_{26}}{d_{f_2}} \right) \right\} \\ \frac{-A_7}{h} \cdot \left\{ \omega_{i_2} \cdot \left(-k_{21} + k_{22} + \frac{k_{23}}{d_{i_2}} \right) + \omega_{f_2} \cdot \left(-k_{24} + k_{25} + \frac{k_{26}}{d_{f_2}} \right) \right\} \\ \frac{-A_7}{h} \cdot \left\{ \omega_{i_2} \cdot \left(-k_{21} + k_{22} + \frac{k_{23}}{d_{i_2}} \right) \right\} \end{cases} \quad (3 \text{ c} - \text{d}) \\
 d_5 &= \begin{cases} \frac{-1}{h} \cdot \left\{ \omega_{i_1} \cdot \left(k_{32} + \frac{k_{33}}{d_{i_1}} \right) + \omega_{f_1} \cdot \left(k_{35} + \frac{k_{36}}{d_{f_1}} \right) \right\} \\ \frac{-1}{h} \cdot \left\{ \omega_{i_1} \cdot \left(-k_{31} + k_{32} + \frac{k_{33}}{d_{i_1}} \right) + \omega_{f_1} \cdot \left(-k_{34} + k_{35} + \frac{k_{36}}{d_{f_1}} \right) \right\} \\ \frac{-1}{h} \cdot \left\{ \omega_{i_1} \cdot \left(-k_{31} + k_{32} + \frac{k_{33}}{d_{i_1}} \right) \right\} \end{cases} ; \quad d_6 = \begin{cases} \frac{-1}{h} \cdot \left\{ \omega_{i_2} \cdot \left(k_{32} + \frac{k_{33}}{d_{i_2}} \right) + \omega_{f_2} \cdot \left(k_{35} + \frac{k_{36}}{d_{f_2}} \right) \right\} \\ \frac{-1}{h} \cdot \left\{ \omega_{i_2} \cdot \left(-k_{31} + k_{32} + \frac{k_{33}}{d_{i_2}} \right) + \omega_{f_2} \cdot \left(-k_{34} + k_{35} + \frac{k_{36}}{d_{f_2}} \right) \right\} \\ \frac{-1}{h} \cdot \left\{ \omega_{i_2} \cdot \left(-k_{31} + k_{32} + \frac{k_{33}}{d_{i_2}} \right) \right\} \end{cases} \quad (3 \text{ e} - \text{f}) \\
 d_7 &= \begin{cases} \frac{-1}{h} \cdot \left\{ \omega_{i_1} \cdot \left(k_{62} + \frac{k_{63}}{d_{i_1}} \right) + \omega_{f_1} \cdot \left(k_{65} + \frac{k_{66}}{d_{f_1}} \right) \right\} \\ \frac{-1}{h} \cdot \left\{ \omega_{i_1} \cdot \left(-k_{61} + k_{62} + \frac{k_{63}}{d_{i_1}} \right) + \omega_{f_1} \cdot \left(-k_{64} + k_{65} + \frac{k_{66}}{d_{f_1}} \right) \right\} \\ \frac{-1}{h} \cdot \left\{ \omega_{f_1} \cdot \left(-k_{64} + k_{65} + \frac{k_{66}}{d_{f_1}} \right) \right\} \end{cases} ; \quad d_8 = \begin{cases} \frac{-1}{h} \cdot \left\{ \omega_{i_2} \cdot \left(k_{62} + \frac{k_{63}}{d_{i_2}} \right) + \omega_{f_2} \cdot \left(k_{65} + \frac{k_{66}}{d_{f_2}} \right) \right\} \\ \frac{-1}{h} \cdot \left\{ \omega_{i_2} \cdot \left(-k_{61} + k_{62} + \frac{k_{63}}{d_{i_2}} \right) + \omega_{f_2} \cdot \left(-k_{64} + k_{65} + \frac{k_{66}}{d_{f_2}} \right) \right\} \\ \frac{-1}{h} \cdot \left\{ \omega_{f_2} \cdot \left(-k_{64} + k_{65} + \frac{k_{66}}{d_{f_2}} \right) \right\} \end{cases} \quad (3 \text{ g} - \text{h})
 \end{aligned}$$

E por fim, a equação diferencial da análise estática dos painéis parede, em formato de núcleo duplo T de painéis – paredes com dimensões e posicionamento generalizado, é expresso por:

$$-[J] \cdot \{v'''\} + [S] \cdot \{v'\} = \{Y_f\} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 \text{sendo: } [J]_{3 \times 3} &= -[M_8]_{3 \times 7}^T \cdot \{[M_5]_{7 \times 7} + [M_7]_{7 \times 6} \cdot [M_1]_{6 \times 6}^{-1} \cdot [M_4]_{6 \times 7} \cdot [M_8]_{7 \times 3}; \\
 [S]_{3 \times 3} &= [M_8]_{3 \times 7}^T \cdot \{[M_6]_{7 \times 3} + [M_7]_{7 \times 6} \cdot [M_1]_{6 \times 6}^{-1} \cdot [M_3]_{6 \times 3} + [M_9]_{3 \times 3}; \\
 \{Y_f\}_{3 \times 1} &= Y_{ext \text{ ESCALAR}} \cdot \{A^*\}_{3 \times 1} - [M_8]_{3 \times 7}^T \cdot [M_7]_{7 \times 6} \cdot [M_1]_{6 \times 6}^{-1} \cdot [M_{10}]_{6 \times 7} \cdot \{p\}_{7 \times 1};
 \end{aligned}$$

sendo Y_{ext} o esforço cortante advindo do carregamento lateral atuante no pilar, devidamente aplicado no centro de carga (CC).

2.2. Análise Dinâmica dos Painéis – Parede

A fim de complementar as tabelas publicadas em Melo and Barbosa (2020 a) e Melo *et al.* (2021), na Figura 2 é apresentado o pilar modelado dinamicamente via TMC, evidenciando-se a ação do carregamento transversal no CC, bem como, as condições de contorno.

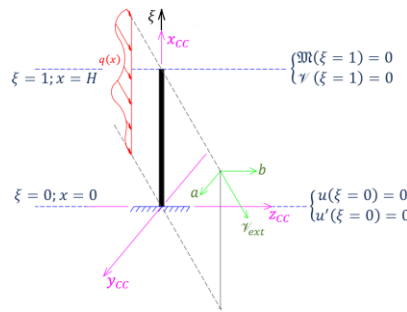


Figura 2. Condições de contorno do pilar de madeira para a análise via TMC

Ao elencar a solução da deflexão como: $u(\xi) = B_1 \cdot \cosh(\lambda_1^*) + B_2 \cdot \sinh(\lambda_1^*) + B_3 \cdot \cos(\lambda_2^*) + B_4 \cdot \sin(\lambda_2^*)$, torna-se possível escrever o sistema de condições de contorno do pilar em análise, lembrando que $\lambda_j^* = \lambda_j \cdot \xi \equiv \lambda_j \cdot \frac{x}{H}$ e $j = \{1; 2\}$. O referido sistema é apresentado na equação (5), enquanto na equação (6) é apresentada a condição de solução não trivial do sistema algébrico em comento, sendo denominada de Equação Transcendental. Desta forma, escrevem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 \cdot \cosh(\lambda_1) & \lambda_1^2 \cdot \sinh(\lambda_1) & -\lambda_2^2 \cdot \cos(\lambda_2) & -\lambda_2^2 \cdot \sin(\lambda_2) \\ \lambda_1^3 \cdot \sinh(\lambda_1) & \lambda_1^3 \cdot \cosh(\lambda_1) & \lambda_2^3 \cdot \sin(\lambda_2) & -\lambda_2^3 \cdot \cos(\lambda_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\frac{2 \cdot \lambda_1^3 \cdot \lambda_2^3}{\lambda_1 \cdot \lambda_2^5 + \lambda_1^5 \cdot \lambda_2} \cdot \cosh(\lambda_1) \cdot \cos(\lambda_2) + \frac{\lambda_1^2 \cdot \lambda_2^4 - \lambda_1^4 \cdot \lambda_2^2}{\lambda_1 \cdot \lambda_2^5 + \lambda_1^5 \cdot \lambda_2} \cdot \sinh(\lambda_1) \cdot \sin(\lambda_2) = -1 \quad (6)$$

3. TABELA ADIMENSIONAL DAS FREQUÊNCIAS VIA TMC PARA PILARES DE MADEIRA

A fim de complementar as tabelas já mencionadas no item 2.2, para contemplar os valores de $\lambda^2 = \lambda_1^2 - \lambda_2^2$ típicos para pilares de madeira, na Tabela 1 são listadas as frequências básicas (f_i^*) e (ω_i^*), além das raízes λ_1 e λ_2 para os seis primeiros modos de vibração à flexão do sistema de contraventamento do pilar em comento.

Tabela 1. Valores de frequências básicas e raízes da equação transcendental do pilar de paredes finas de madeira

λ	Parâmetros	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$
1,5	λ_1	2,04278	4,66290	7,98002	9,17452	10,08249	11,71470
	λ_2	1,91649	4,60897	7,94863	9,14723	10,05766	11,69334
	ω_i^*	3,91498	21,49118	63,43023	83,92144	101,40630	136,98397
	f_i^*	0,62309	3,42043	10,09523	13,35651	16,13931	21,80168
2,0	λ_1	2,14083	4,86290	8,00682	9,20279	10,10301	11,72339
	λ_2	2,02068	4,81122	7,97554	9,17558	10,07823	11,70205
	ω_i^*	4,32594	23,39646	63,85868	84,44097	101,82050	137,18765
	f_i^*	0,68490	3,72366	10,16342	13,43920	16,20524	21,83409
3,0	λ_1	2,23888	4,94951	8,06026	9,25904	10,14407	11,74093
	λ_2	2,12428	4,89874	8,02918	9,23200	10,11940	11,71962
	ω_i^*	4,75602	24,24636	64,71731	85,47946	102,65185	137,59921
	f_i^*	0,75694	3,85893	10,30008	13,60448	16,33755	21,89959
3,5	λ_1	2,30890	4,98707	8,08669	9,28702	10,16460	11,74979
	λ_2	2,19796	4,93669	8,05593	9,26006	10,13998	11,72849
	ω_i^*	5,07487	24,61960	65,14747	85,99838	103,06879	137,80734
	f_i^*	0,80769	3,91833	10,36854	13,68707	16,40391	21,93272
4,0	λ_1	2,38054	5,02792	8,11348	9,31491	10,18513	11,75871
	λ_2	2,27310	4,97795	8,08261	9,28803	10,16055	11,73743
	ω_i^*	5,41120	25,02873	65,57808	86,51719	103,48657	138,01703
	f_i^*	0,86122	3,98345	10,43708	13,76964	16,47040	21,96609
4,5	λ_1	2,45341	5,06876	8,14002	9,34271	10,20567	11,76769
	λ_2	2,34930	5,01920	8,10925	9,31591	10,18114	11,74643
	ω_i^*	5,76380	25,44110	66,00945	87,03587	103,90540	138,22830
	f_i^*	0,91734	4,04908	10,50573	13,85219	16,53706	21,99972

Sendo s_j advindo do desacoplamento da matriz $[S]$, escrevem-se as seguintes fórmulas de utilização da Tabela 1:

$$\lambda [ADM] = H [m] \cdot \sqrt{s_j} \quad ; \quad f_i [Hz] = \frac{f_i^*}{H^2 [m^2]} \cdot (100)^2 \quad (7 \text{ a} - \text{b})$$

3.1. Adaptabilidade dos Valores Tabelados com Ênfase na Análise de Vigas pelo Modelo de Timoshenko

Com base no conceito de frequência para um (1) grau de liberdade pode-se escrever a seguinte relação entre f_{Euler} (frequência via Teoria de Euler-Bernoulli) e f_{TM} (frequência via Teoria de Timoshenko):

$$f_{TM} = k_{aj} \cdot f_{Euler} \quad (8)$$

e: $k_{aj} = \left\{ 1 - \sqrt{\frac{k_{TM}}{k_{Euler}}} \right\}$; as rigidezas da viga são expressas por: $k_{TM} = \frac{1}{v_{TM}}$; $k_{Euler} = \frac{1}{v_{Euler}}$. Ressalta-se que a carga $P = k \cdot v$ é imposta como unitária para que a quantificação da rigidez da barra ocorra via método dos deslocamentos.

Do que, para vigas maciças (duplamente simétricas) recorre-se a Souza and Cruz (2018) e Martins (1998, p. 83 – 84), estimando os coeficientes de ajuste k_{aj} , conforme é apresentado na Tabela 2.

Tabela 2. Coeficiente de ajuste da frequência quantificada via TMC para resgatar a Teoria de Timoshenko

Autor	Viga	vibração	k_{TM}	k_{Euler}	k_{aj}	refinamento
Souza and Cruz (2018)	em balanço	----	$\frac{1}{0,25}$	$\frac{1}{0,24}$	0,020200	$\frac{1}{40}$
Martins (1998, p.84)	engastada - apoiada	1º modo	$\frac{167,68}{2\pi}$	$\frac{172,66}{2\pi}$	0,014526	$\frac{1}{40} \cdot \frac{1}{2}$
		2º modo	$\frac{518,71}{2\pi}$	$\frac{559,51}{2\pi}$	0,03715	$\frac{1}{40} \cdot \frac{3}{2}$

Desta forma, o coeficiente de ajuste será definido por $\frac{1}{40}$ com os devidos refinamentos por modo de vibração, de maneira análoga ao procedido na Tabela 2, ficando aplicável ao pilar de madeira nos exemplos do item 4.

4. VALIDAÇÃO NUMÉRICA

4.1. Exemplo de Aplicação 1 – Núcleo C

Na Figura 3 (a) é apresentado o pilar de madeira com altura H de 3,5 metros, bem como seção nuclear em formato de C sob as seguintes dimensões: $b_y = b_z = 0,20\text{ m}$ e abas $a_{1y} = a_{2y} = 0,04\text{ m}$. A espessura do núcleo e dos lintéis é de $t = 0,025\text{ m}$ e são confeccionados de peças de madeira laminada colada com as seguintes propriedades elasto-mecânicas: $E = 1,7691 \times 10^7\text{ kPa}$, coeficiente de Poisson de 0,32 e peso aparente de 800 kg/m^3 . Ademais, na Figura 3 (b) é apresentado o contraventamento por lintéis uniformemente dispostos na horizontal e espaçados de $h = 86\text{ cm}$, tendo por seção transversal: $e_L = 2,5\text{ cm}$ e $h_L = 5,0\text{ cm}$ (altura dos lintéis), bem como comprimento $L_L = 12\text{ cm}$.

Já o contraventamento em Z é ilustrado na Figura 3 (c), tendo como dimensões relevantes: $L_L = 12\text{ cm}$; $L_L^{inc} = 45,42\text{ cm}$; $h = 70\text{ cm}$; $e_L = e_{L_{inc}} = 2,5\text{ cm}$; $h_L = h_{L_{inc}} = 5,0\text{ cm}$, bem como com ângulo $\gamma_c = 80,27^\circ$ para a inclinação dos lintéis em diagonal. E ainda, na Figura 3 (d), é apresentado o módulo do contraventamento em X sob as seguintes dimensões principais: $L_L = 12\text{ cm}$; $h_a = h_d = 5\text{ cm}$; $e_a = e_d = 2,5\text{ cm}$; $L_a = L_d = 41,359\text{ cm}$; $\gamma_a = 82^\circ$; $\gamma_d = 272^\circ$; $h_i = h_f = 34,015\text{ cm}$; $d_i = d_f = 2,625\text{ cm}$; $d_i^* = d_f^* = 5,079\text{ cm}$; e $h = 1,16667\text{ m}$.

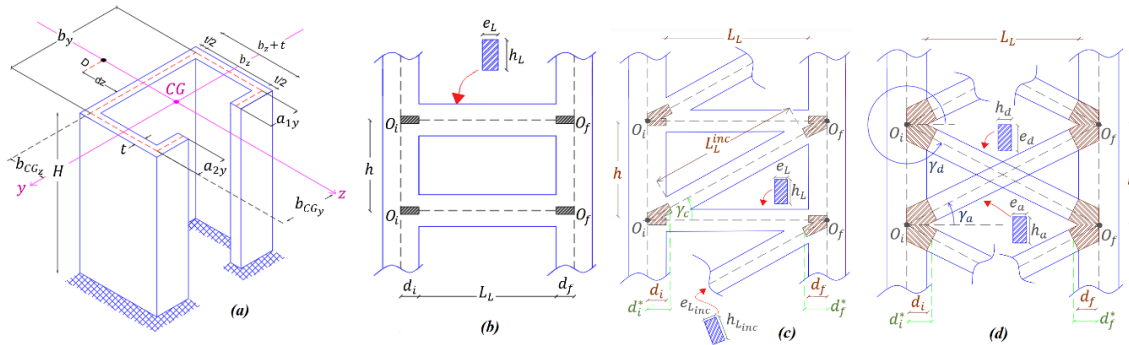


Figura 3. Pilar de madeira em paredes finas: (a) geometria do núcleo C, (b) módulo do contraventamento horizontal, (c) lintéis em Z e (d) lintéis em X.

Da devida análise no software Ansys, versão acadêmica, são apresentados na Figura 4 os seis primeiros modos de vibração para pilar de madeira desta aplicação, desde o contraventamento horizontal até os lintéis dispostos em Z e X. Tornando-se ressaltante listar: - número de nós de 24.928; 26.696; e 28.066; - qualidade média do elemento de 0,99986; 0,99778; e 0,99183; e escolha dos elementos finitos hexaédricos (Hex 20), para o contraventamento horizontal, em Z e em X, respectivamente.

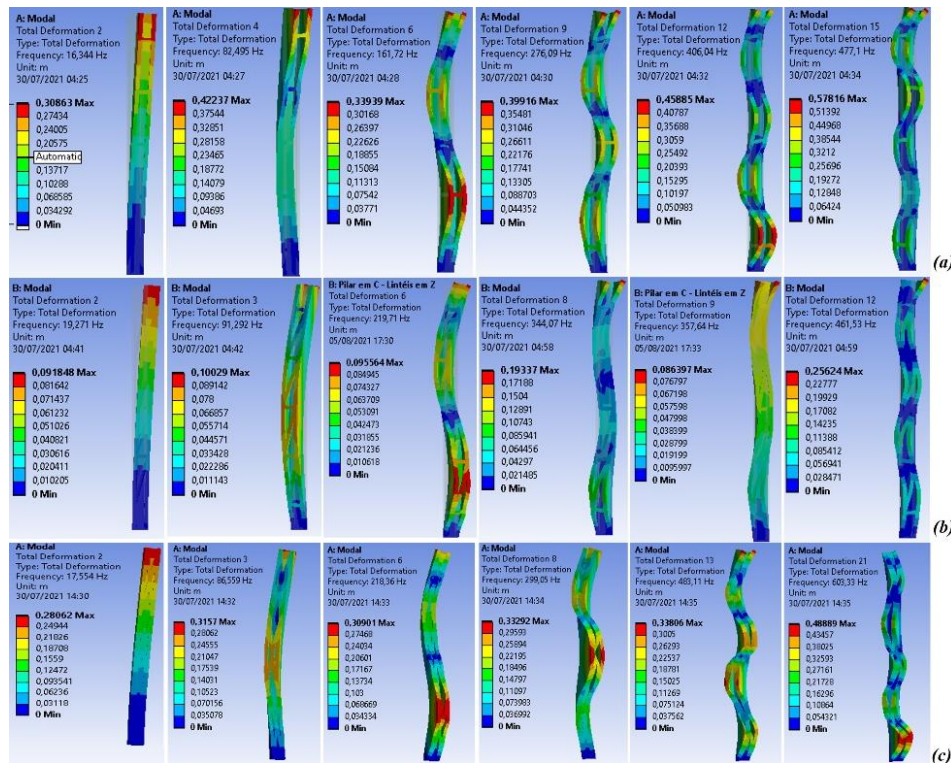


Figura 4. Seis primeiros modos de vibração à flexão para o pilar de madeira em formato de núcleo C: (a) lintéis horizontais, (b) lintéis em Z e (c) lintéis em X.

Ademais, nas equações (9) são elencados os sistemas de equações diferenciais que representam o problema dinâmico do pilar em núcleo C de madeira via TMC/TPP, evidenciando na equação (9 a) a representação matemática da vibração livre do pilar contraventamento horizontalmente. Enquanto nas equações (9 b) e (9 c) são listadas as expressões para as vibrações do núcleo C contraventado em Z e em X, respectivamente. Assim, escrevem-se:

$$\begin{bmatrix} J_a & 0 & J_d \\ 0 & J_b & J_e \\ J_d & J_e & J_c \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_D'''' \\ \omega_D'''' \\ \phi_D'''' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 84,96395 \\ 0 & 0 & 124,94699 \\ 0 & 0 & -2,20626 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_D'' \\ \omega_D'' \\ \phi_D'' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} M_a & 0 & 0 \\ 0 & M_b & 0 \\ 0 & 0 & M_c \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{v}_D \\ \ddot{\omega}_D \\ \ddot{\phi}_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9 a)$$

$$\begin{bmatrix} J_a & 0 & J_d \\ 0 & J_b & J_e \\ J_d & J_e & J_c \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_D'''' \\ \omega_D'''' \\ \phi_D'''' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 50,702 \\ 0 & 0 & -8,798 \\ 0 & 0 & 8,223 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_D'' \\ \omega_D'' \\ \phi_D'' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} M_a & 0 & 0 \\ 0 & M_b & 0 \\ 0 & 0 & M_c \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{v}_D \\ \ddot{\omega}_D \\ \ddot{\phi}_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9 b)$$

$$\begin{bmatrix} J_a & 0 & J_d \\ 0 & J_b & J_e \\ J_d & J_e & J_c \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_D'''' \\ \omega_D'''' \\ \phi_D'''' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1,222 \\ 0 & 0 & 1,377 \times 10^{-13} \\ 0 & 0 & 23,260 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_D'' \\ \omega_D'' \\ \phi_D'' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} M_a & 0 & 0 \\ 0 & M_b & 0 \\ 0 & 0 & M_c \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{v}_D \\ \ddot{\omega}_D \\ \ddot{\phi}_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9 c)$$

sendo: $J_a = 2,29511 \times 10^3$; $J_b = 1,73441 \times 10^3$; $J_c = 105,78367$; $J_d = -466,06714$; $J_e = 0,64259$; $M_a = M_b = 13,86765$; e $M_c = 2,28658 \times 10^{-4}$.

Após proceder o desacoplamento dos sistemas de equações diferenciais, apresentados nas eq.'s (9), escrevem-se os conjuntos de equações diferenciais desacopladas no sistema generalizado de coordenadas sob o formato genérico: $-q_j'''' + s_j \cdot q_j'' + m_j \cdot \ddot{q}_j = 0$, para o contraventamento horizontal, em Z e em X, respectivamente, como:

$$\begin{cases} -q_1'''' + 1,30817 \cdot q_1'' + m_1 \cdot \ddot{q}_1 = 0 \\ -q_2'''' + 1,30817 \cdot q_2'' + m_2 \cdot \ddot{q}_2 = 0 \\ -q_3'''' + 1,30817 \cdot q_3'' + m_3 \cdot \ddot{q}_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -q_1'''' + 1,39309 \cdot q_1'' + m_1 \cdot \ddot{q}_1 = 0 \\ -q_2'''' - 0,18120 \cdot q_2'' + m_2 \cdot \ddot{q}_2 = 0 \\ -q_3'''' + 1,95440 \cdot q_3'' + m_3 \cdot \ddot{q}_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -q_1'''' + 2,05108 \cdot q_1'' + m_1 \cdot \ddot{q}_1 = 0 \\ -q_2'''' - 0,09295 \cdot q_2'' + m_2 \cdot \ddot{q}_2 = 0 \\ -q_3'''' + 3,45044 \cdot q_3'' + m_3 \cdot \ddot{q}_3 = 0 \end{cases} \quad (10 a - c)$$

sendo: $m_1 = 2,16085 \times 10^{-6}$; $m_2 = 7,99559 \times 10^{-3}$; $m_3 = 0,05739$.

E em decorrência, na Tabela 3 são listados os seis primeiros modos de vibração para o contraventamento horizontal, tanto pela TMC quanto pelo Métodos dos Elementos Finitos (MEF) modelado no software Ansys. O dado de entrada é o parâmetro $\lambda = H \cdot \sqrt{s_1} \equiv 3,5 \text{ m} \cdot \sqrt{1,30817} \equiv 4,00313$, cujos valores das frequências elementares f_i^* são listados na Tabela 3, por modo de vibração. Observa-se em tal tabela que o erro médio entre os seis primeiros modos é de apenas 2,22 %, chegando a uma convergência de 97,80 % no primeiro modo. Sendo a fórmula da frequência via TMC: $f_{TMC}^* = k_{aj} \cdot \frac{f_i^*}{H^2} \cdot (100)^2$ e a diferença percentual: $\Delta (\%) = \frac{|f_{TMC}^* - f_{ANSYS}^*|}{f_{ANSYS}^*} \cdot 100$.

Tabela 3. Comparação dos seis primeiros modos de vibração no pilar de madeira núcleo C e lintéis horizontais

λ		$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$
4,00313	$f_i^* [\text{Hz}]$	0,86157	3,98357	10,43751	13,77017	16,47082	21,96632
	k_{aj}	$\frac{1}{40} \cdot 0,95$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40} \cdot 0,75$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40} \cdot 1,20$	$\frac{1}{40}$
	$f_{TMC}^* [\text{Hz}]$	16,704	81,297	159,758	281,024	403,367	448,292
	$f_{ANSYS}^* [\text{Hz}]$	16,344	82,495	161,720	276,090	406,040	477,100
	Δ	2,20 %	1,45 %	1,21 %	1,79 %	0,65 %	6,04 %

E agora na Tabela 4 são comparados os seis primeiros modos de vibração para os contraventamentos em Z e em X, respectivamente. Sendo os parâmetros de entrada: $\lambda_{\text{lintéis Z}} = H \cdot \sqrt{s_1} \equiv 3,5 \text{ m} \cdot \sqrt{1,39309} \equiv 4,13102$; e $\lambda_{\text{lintéis X}} = H \cdot \sqrt{s_1} \equiv 3,5 \text{ m} \cdot \sqrt{2,05108} \equiv 5,01256$. Na análise de tais tabelas é observada a correição de 97,99 % no primeiro modo de vibração do contraventamento em Z, enquanto o erro médio nos seis primeiros modos é de apenas 2,85 %. E ademais, verifica-se uma aproximação média de 97,15 % para os seis primeiros modos flexionais do contraventamento em X.

Tabela 4. Comparação dos seis primeiros modos de vibração para o pilar de madeira em núcleo C

λ		$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$
4,13102 (lintéis em Z)	$f_i^* [\text{Hz}]$	0,87569	4,00075	10,45506	13,79129	16,48785	21,97489
	k_{aj}	$\frac{1}{40} \cdot 1,10$	$\frac{1}{40} \cdot 1,10$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40} \cdot 1,20$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$
	$f_{TMC}^* [\text{Hz}]$	19,658	89,813	213,369	337,746	336,487	448,467
	$f_{ANSYS}^* [\text{Hz}]$	19,271	91,292	219,710	344,070	357,640	461,530
	Δ	2,01 %	1,62 %	2,89 %	1,84 %	5,92 %	2,83 %
5,01256 (lintéis em X)	$f_i^* [\text{Hz}]$	0,97733	4,11639	10,57617	13,93678	16,60548	22,03442
	k_{aj}	$\frac{1}{40} \cdot 0,90$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40} \cdot 1,10$	$\frac{1}{40} \cdot 1,40$	$\frac{1}{40} \cdot 1,40$
	$f_{TMC}^* [\text{Hz}]$	17,951	84,008	215,840	312,866	474,442	629,555
	$f_{ANSYS}^* [\text{Hz}]$	17,554	86,559	218,360	299,050	483,110	603,330
	Δ	2,26 %	2,95 %	1,15 %	4,62 %	1,79 %	4,35 %

4.2. Exemplo de Aplicação 2 – Núcleo duplo T

Nesta segunda aplicação pretende-se investigar os modos de vibração do pilar de madeira em formato de duplo T e sob o contraventamento em Z e em X, para tanto na Figura 5 é apresentado o mencionado pilar com dimensões: $H = 3,5 \text{ m}$; $b_1 = b_7 = 0,175 \text{ m}$; $b_2 = b_5 = b_3 = b_6 = 0,0275 \text{ m}$ e abertura parcial das paredes igual a 12 cm . A madeira empregada foi a mesma descrita no exemplo 1, bem como, as dimensões do módulo de contraventamento Z e X são iguais também. O contraventamento do pilar é realizado conforme apresentado nas Figuras 3 (c) e 3 (d) para o módulo em Z e em X, respectivamente. As propriedades da seção transversal são: $b_{CGz} = b_{CGy} = 0,0875 \text{ m}$; $I_z = 8,713333 \times 10^{-5} \text{ m}^4$; $I_y = 4,50911 \times 10^{-5} \text{ m}^4$; $I_\omega = 6,14298 \times 10^{-7} \text{ m}^6$ (Inércia Setorial definida por Vlassov); $I_t = 3,30729 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ (Inércia Torcional), e as distâncias para localizar o centro de torção D : $dz = 0,03364 \text{ m}$ e $dy = 0,0874002 \text{ m}$.

Enquanto na modelagem via MEF pelo software já descrito, é interessante elencar: - número de nós de 67.234 e 75.406; - qualidade do elemento de 0,99304 e de 0,98049; e em último, a escolha dos elementos finitos hexaédricos (Hex 20) para o contraventamento em Z e em X, respectivamente.

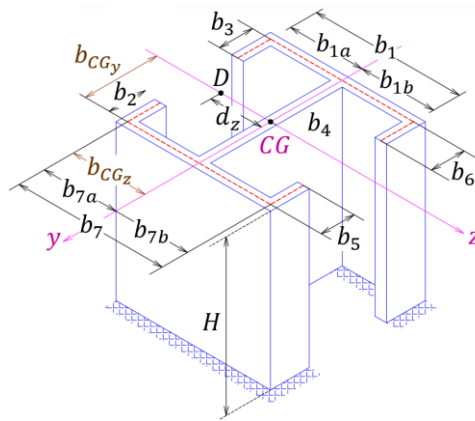


Figura 5. Pilar de madeira em paredes finas duplamente simétrica com a geometria do núcleo duplo T

Nas equações (11) são listados os sistemas de equações diferenciais da vibração livre do pilar de madeira com seção em duplo e sob contraventamento em Z e em X, respectivamente. Assim:

$$\begin{bmatrix} J_a & J_d & J_e \\ J_g & J_b & J_f \\ J_h & J_i & J_c \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \psi_D'''' \\ \omega_D'''' \\ \phi_D'''' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 83,840 \\ 0 & 0 & -196,739 \\ 0 & 0 & -16,975 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \psi_D'' \\ \omega_D'' \\ \phi_D'' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} M_a & 0 & 0 \\ 0 & M_b & 0 \\ 0 & 0 & M_c \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{\psi}_D \\ \ddot{\omega}_D \\ \ddot{\phi}_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11 a)$$

$$\begin{bmatrix} J_a & J_d & J_e \\ J_g & J_b & J_f \\ J_h & J_i & J_c \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \psi_D'''' \\ \omega_D'''' \\ \phi_D'''' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 14,793 \\ 0 & 0 & -0,04 \\ 0 & 0 & 21,132 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \psi_D'' \\ \omega_D'' \\ \phi_D'' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} M_a & 0 & 0 \\ 0 & M_b & 0 \\ 0 & 0 & M_c \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{\psi}_D \\ \ddot{\omega}_D \\ \ddot{\phi}_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11 b)$$

sendo: $J_a = 1,528 \times 10^3$; $J_b = 563,632$; $J_c = 31,478$; $J_d = 203,9$; $J_e = -211,629$; $J_g = 171,858$; $J_h = -195,782$; $J_i = -6,802$; $M_a = M_b = 15,95799$; e $M_c = 1,32224 \times 10^{-4}$. E cujos conjuntos de equações desacopladas são expressos por:

$$\begin{cases} -q_1'''' - 0,223520 \cdot q_1'' + 2,90766 \times 10^{-6} \cdot \ddot{q}_1 = 0 \\ -q_2'''' - 5,182800 \cdot q_2'' + 0,02945 \cdot \ddot{q}_2 = 0 \\ -q_3'''' - 151,17765 \cdot q_3'' + 0,05535 \cdot \ddot{q}_3 = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} -q_1'''' - 0,06586 \cdot q_1'' + 2,90766 \times 10^{-6} \cdot \ddot{q}_1 = 0 \\ -q_2'''' + 2,18753 \cdot q_2'' + 0,02945 \cdot \ddot{q}_2 = 0 \\ -q_3'''' + 3,34287 \cdot q_3'' + 0,05535 \cdot \ddot{q}_3 = 0 \end{cases} \quad (11 a - b)$$

Agora, de forma análoga ao exemplo anterior, na Tabela 5 são listados os seis primeiros modos de vibração para o pilar de madeira em duplo T, tanto para o contraventamento em Z quanto em X. Enfatizando que o parâmetro λ para cada um dos sistemas de lintéis, valem: $\lambda_{\text{lintéis Z}} = H \cdot \sqrt{s_1} \equiv 3,5 \text{ m} \cdot \sqrt{0,22352} \equiv 1,65474$; e $\lambda_{\text{lintéis X}} = H \cdot \sqrt{s_1} \equiv 3,5 \text{ m} \cdot \sqrt{0,06586} \equiv 0,89818$. A aproximação da modelagem via TMC e MEF dos lintéis em X foi de 97,18 % para os três primeiros modos de vibração, enquanto para os lintéis em Z foi observado um erro médio de apenas 0,57 %, definida também para os três primeiros modos de vibração. Já para os seis primeiros modos de vibração foram observados erros médios de 1,80 % e de 3,64 % para os módulos de contraventamento dispostos em Z e em X, respectivamente.

Tabela 5. Comparação dos seis primeiros modos de vibração para o pilar de madeira em núcleo duplo T

λ		$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$
1,65474 (lintéis em Z)	$f_i^* [\text{Hz}]$	0,63513	3,67912	10,11633	13,38208	16,15970	21,81167
	k_{aj}	$\frac{1}{40} \cdot \frac{1}{2,3}$	$\frac{1}{40} \cdot \frac{1}{2,3}$	$\frac{1}{40} \cdot \frac{1}{2,6}$	$\frac{1}{40} \cdot \frac{1}{2}$	$\frac{1}{40} \cdot \frac{1}{1,7}$	$\frac{1}{40} \cdot \frac{1}{1,75}$
	$f_{TMC}^* [\text{Hz}]$	5,636	32,645	79,406	136,552	193,994	254,363
	$f_{ANSYS} [\text{Hz}]$	5,650	32,236	79,557	131,630	194,560	242,070
	Δ	0,25 %	1,27 %	0,19 %	3,74 %	0,29 %	5,08 %

λ		$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$
0,89818 (lintéis em X)	$f_i^* [Hz]$	0,57755	3,43884	9,87032	13,25694	16,06011	21,76302
	k_{aj}	$\frac{1}{40} \cdot \frac{3}{2}$	$\frac{1}{40} \cdot \frac{3}{2}$	$\frac{1}{40} \cdot \frac{2,5}{2}$	$\frac{1}{40} \cdot \frac{3}{2}$	$\frac{1}{40} \cdot 1,75$	$\frac{1}{40} \cdot 1,75$
	$f_{TMC}^* [Hz]$	17,680	105,271	251,794	405,825	573,575	777,251
	$f_{ANSYS} [Hz]$	17,340	100,550	256,430	419,030	614,830	805,510
	Δ	1,96 %	4,70 %	1,81 %	3,15 %	6,71 %	3,51 %

Concluindo que o coeficiente de ajuste para o quarto (4º) modo de vibração para o contraventamento em Z vale $\left(\frac{1}{40} \cdot \frac{1}{2}\right)$, este advindo do primeiro (1º) modo de vibração exposto na tabela 2 e decorrente de Martins (1998). Neste sentido, extrapola-se o coeficiente de ajuste do primeiro (1º) e do segundo (2º) modos, como sendo: $\left(\frac{1}{40} \cdot \frac{1}{2,3}\right)$. Bem como, procede-se o ajuste de $\left(\frac{1}{40} \cdot \frac{1}{1,7}\right)$ para o quinto (5º) e o sexto (6º) modos de vibração. E como ponto auxiliar é estabelecido o coeficiente de ajuste $\left(\frac{1}{40} \cdot \frac{1}{2,6}\right)$ para o terceiro (3º) modo.

Ademais, no sistema de contraventamento em X é observado o coeficiente de ajuste valendo $\left(\frac{1}{40} \cdot \frac{3}{2} \equiv \frac{1}{40} \cdot 1,5\right)$ para os: primeiro (1º), segundo (2º) e quarto (4º) modos de vibração do pilar de madeira em análise, sendo advindo do segundo (2º) modo de vibração elencado na Tabela 2, ver Martins (1998). Em seguida, do processo de extrapolação são elencados os coeficientes de ajuste: $\left(\frac{1}{40} \cdot 1,25\right)$ para o terceiro (3º); e $\left(\frac{1}{40} \cdot 1,75\right)$ para o quinto (5º) e sexto (6º) modos.

Na Figura 6 (a) é elencado o primeiro modo de vibração para o pilar em formato de duplo T e contraventado por lintéis em Z, enquanto na Figura 6 (b) é apresentado o pilar contraventado em X, obtidos por modelagem no software já descrito. Ao passo que nas Figuras 6 (c) e 6 (d) são procedidos os detalhamentos gráficos dos coeficientes de ajustes para os módulos de contraventamento Z e X, respectivamente.

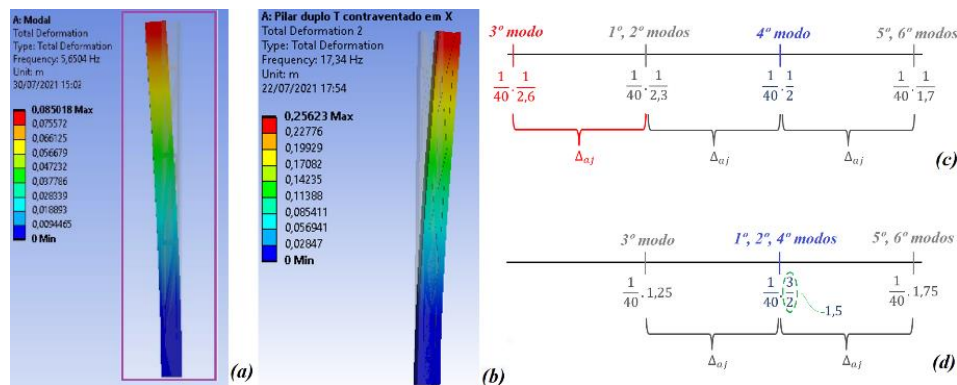


Figura 6. Modos de vibração do pilar de madeira com seção de duplo T: (a) 1º modo para os lintéis em Z, (b) 1º modo dos lintéis em X, além da representação dos coeficientes de ajuste dos lintéis dispostos em: (c) Z e (d) X

5. CONCLUSÕES

Em virtude da análise estrutural do pilar de madeira em formato de núcleo duplo T pela TMC é observada a listagem das equações de equilíbrio estático e dos modos de vibração natural, como primeira contribuição deste artigo. Ademais, como segunda contribuição são apresentados os parâmetros balizadores da análise matricial dos sistemas de contraventamento horizontal, em Z e em X. Em seguida, tabelas adimensionais são postuladas, mediante TMC, com a destinação de quantificar as seis primeiras frequências de vibração à flexão dos lintéis, adequando, obviamente, o intervalo de existência do parâmetro λ para o funcionamento estrutural de pilares de madeira em paredes finas.

Levando em consideração a pequena estatura dos pilares de madeira, no item 3.1 é procedido o ajuste teórico da teoria clássica de análise dos deslocamentos dos elementos diferenciais dos painéis-parede componentes do pilar em tela, resgatando desta forma, a Teoria de Timoshenko e tornando mais precisos os resultados das frequências obtidas pela TMC.

A partir destas observações e das aplicações em exemplos de pilares em núcleo C e em duplo T, ver item 4, percebe-se uma correspondência média 98,20% para a primeira frequência de vibração, adotando a modelagem no software comercial como padrão de validação e verificação. E por último, nos seis primeiros modos de vibração é observado erro médio de apenas 2,33% para o sistema de contraventamento em módulo Z. Já, no sistema de contraventamento em X é perceptível a convergência média de 96,75% entre a TMC e os valores obtidos no mencionado software de verificação.

6. REFERÊNCIAS

- Alalwan, A., Larsson, J., 2019, *Stability and dynamic properties of tall structures*. Sweden, Gothenburg, Master's Thesis. Disponível em: < <https://odr.chalmers.se/handle/20.500.12380/300467>>
- Arboleda-Monsalve, L. G., Zapata-Medina, D. G., Aristizabal-Ochoa, J. D., 2007. "Stability and natural frequencies of a weakened Timoshenko beam-column with generalized end conditions under constant axial load". *Journal of Sound and Vibration*., Vol. 310, pp. 1057–1079. doi: 10.1016/j.jsv.2007.08.014.
- Barbosa, J. A., 1978, *Edifícios com paredes de secção aberta contraventadas por lintéis sob carga lateral*. EESC/USP, São Carlos, Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas. Disponível em: < <http://sistemas.set.eesc.usp.br/producao/591> >
- Hashemi, A., Masoudnia, R., Quenneville, P. A., 2016. "A numerical study of coupled timber walls with slip friction damping devices". *Construction and Building Materials*., Vol. 121, pp. 373–385. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2016.05.160.
- Laredo, M., 1977, *Grands Batiments: contreventements, dynamique des structures et calcul automatique*. Eyrolles, Paris.
- Mancini, E., 1972, *Associação contínua tridimensional de pórticos e paredes com engastamentos elásticos*. EESC/USP, São Carlos, Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas. Disponível em: < <http://sistemas.set.eesc.usp.br/producao/564> >
- Maney, G. A., 1915. "Secondary stresses and other problems in rigid frames: a new method of solution". *Studies in Engineering*., Bulletin 1 – University of Minesota, pp. 1–17.
- Martins, J. F., 1998, *Influência da inércia de rotação e da força cortante nas frequências naturais e na resposta dinâmica de estruturas de barras*. EESC/USP, São Carlos, Tese de Doutorado em Engenharia de Estruturas. Disponível em: < <https://teses.usp.br/teses/disponiveis/18/18134/tde-18042018-102329/pt-br.php>>
- Melo, W. I. G., Barbosa, N. P., 2020 a. "Dynamic modeling of metal columns with open thin-walled sections". *International Journal of Steel Structures*., Vol. 20, No. 3, pp. 833–855. doi: 10.1007/s13296-020-00326-4.
- Melo, W. I. G., Barbosa, N. P., 2020 b. "Dynamic decoupling in reinforced concrete columns in structural core shape and applied to bridges". *International Journal of Advanced Engineering Research and Science*., Vol. 7, No. 5, pp. 48–58. doi: 10.22161/ijaers.75.7.
- Melo, W. I. G., Barbosa, N. P., 2020 c. "Pilares de pontes com seção de paredes finas e elevada altura, uma análise teórica e numérica pela Técnica do Meio Contínuo e pelo Método dos Elementos Finitos". *Revista de Engenharia da Universidade Católica de Petrópolis*., Vol. 14, No. 1, pp. 25–45. Disponível em: < <http://seer.ucp.br/seer/index.php/REVCEC/article/view/1840>>.
- Melo, W. I. G., Luz, P. V. C. A., Barbosa, N. P., 2021. "Dynamic modelling of thin-walled slender columns braced by lintels in systems Z and X". *Revista de Engenharia da Universidade Católica de Petrópolis*., Vol. 15, No. 1, pp. 36–56. Disponível em: < <http://seer.ucp.br/seer/index.php/REVCEC/article/view/2043>>.
- Ramage, M., Foster, R., Smith, S., Flanagan, K., Bakker, R., 2017. "Super tall timber: design research for the next generation of natural structure". *The Journal of Architecture*., Vol. 22, No. 1, pp. 104–122. doi: 10.1080/13602365.2016.1276094.
- Ricaldoni, J., 1958, *Nota sobre el efecto de torsion en edificios elevados*. Publicaciones Instituto de Estática, Montevideo.
- Ricaldoni, J., 1959, *Estruturas de edifícios elevados*. Publicaciones Instituto de Estática, Montevideo.
- Stamato, M., Stafford, S. B., 1969. "An approximate method for the three dimensional analysis of tall buildings". *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*., Vol. 43, No. 3, pp. 361–379. doi: 10.1680/iicep.1969.7331.
- Stamato, M., 1966, *Distribuição das cargas do vento entre os painéis de contraventamento*. EESC/USP, São Carlos.
- Stamato, M., 1971, *Associação contínua de painéis de contraventamento*. EESC/USP, São Carlos.
- Souza C. P. G., Cruz, G. G., 2018. "Análise comparativa das teorias de Euler-Bernoulli e de Timoshenko via método das diferenças finitas com implementação computacional em Scilab". *Revista Tecnologia Fortaleza*., Vol. 39, No. 1, pp. 1–12. doi: 10.5020/23180730.2018.7916.
- Vlassov, B. Z., 1964, *Pièces longues en voiles minces*. Eyrolles, Paris.
- Wei, P., Wang, B. J., Li, H., Wang, L., Peng, S., Zhang, L., 2019. "A comparative study of compression behaviors of cross-laminated timber and glued-laminated timber columns". *Construction and Building Materials*., Vol. 222, pp. 86–95. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2019.06.139.
- Xing, H., Xue, S., Zong, G., 2011. "Dynamic properties of conventional beam-column timber structure under successive damage". *Journal of Asian Architecture and Building Engineering*., Vol. 10, pp. 195–202. doi: 10.3130/jaabe.10.195.

7. RESPONSABILIDADE AUTORAL

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho.

CONTINUOUS MEDIUM TECHNIQUE APPLIED TO MODAL ANALYSIS OF THIN-WALLED WOODEN COLUMNS IN C-SHAPE AND DOUBLE-T-SHAPE

Wesley Imperiano Gomes de Melo, wesleyimperiano@hotmail.com¹

Luiz Guilherme Calheiros Alves Vieira, luiz.guilhermevieira.eng@gmail.com²

Glivio Gayerk Batista Freire, glivioengcivilufrpe@outlook.com²

Daniel Alves da Silva Junior, danieltimekiller@gmail.com²

Ricardo Augusto Filho, ricardoaugusto153@gmail.com²

¹ Federal Rural University of Pernambuco, Professor, Rua Cento e Sessenta e Três – 300 – Garapú – Cabo de Santo Agostinho/PE.

² Federal Rural University of Pernambuco, Student in Civil Engineering, Rua Cento e Sessenta e Três – 300 – Garapú – Cabo de Santo Agostinho/PE.

Abstract. *The dynamic modelling of wooden columns with thin-walled section is currently consolidated in the literature through models developed solely for overlaying solid rectangular elements with beam-defined spacing. With this gap in mind, this article presents the modal analysis of such wooden columns, expanding the thin-walled sections to C-shaped and double-T-shaped thin walls, besides analyzing them under the perspective of parallel bracing, with lintels in Z and in X. In this sense, the relevance of this publication is to present a modal analysis routine to C-shaped and double-T-shaped thin-walled columns through the Continuous Method Technique (CMT), which allows to swiftly check over modelings performed in commercial software programs that only output the final results. The applied methodology was literature review in addition to the demonstration of modal analysis of the aforementioned columns, parting from the differential equation resolution to the static and dynamic analysis of C and double-T cores, braced or not. Thereafter, the results obtained by the CMT were validated through the Finite Element Method (FEM), using ANSYS Student. The results achieved were the following: the balance system; the differential equations solved in the generalized coordinate system; the expression of the transcendental equation; the tabulation of the parameters necessary to quantify the vibration frequencies via CMT; in addition to present the forms of vibration of the aforementioned columns, either through CMT or by the analysis in commercial software. Finally, the adjustment coefficients between the theory of Euler-Bernoulli and the theory of Timoshenko were established, allowing the analysis of the deformed state of the differential elements of the panel-walls. Subsequently, two examples were developed; one for the C core column and one for the double-T core column, obtaining the average convergence of 97.32% between the frequencies calculated via CMT and FEM.*

Keywords: *Continuous Method Technique, wooden columns, forms of vibration, thin-walled, lintels.*