



INFLUÊNCIA DA CINEMÁTICA DE GRANDES DEFORMAÇÕES NA DEFINIÇÃO DE MODELOS DE PERMEABILIDADE EM POROELASTICIDADE NÃO-LINEAR

José Luís Medeiros Thiesen, Universidade Federal de Santa Catarina, jose.thiesen@posgrad.ufsc.br
<https://orcid.org/0000-0002-915-1824>

Bruno Klahr, Universidade Federal de Santa Catarina, bruno.klahr@posgrad.ufsc.br
<https://orcid.org/0000-0002-3610-2215>

Otávio Teixeira Pinto, Universidade Federal de Santa Catarina, otavio.pinto@posgrad.ufsc.br
<https://orcid.org/0000-0003-124-3366>

Thiago André Carniel, Universidade Comunitária da Região de Chapecó, thiago.carniel@unochapeco.edu.br
<https://orcid.org/0000-0002-040-2556>

Eduardo Alberto Fancello, Universidade Federal de Santa Catarina, eduardo.fancello@ufsc.br
<https://orcid.org/0000-0001-085-3901>

Resumo. Nos casos em que se modela tecidos biológicos moles através de cinemática finita (grandes deformações), a hipótese de manter a permeabilidade constante ao longo do processo cinemático, apesar de simplificar a formulação do problema, acaba por dificultar o processo de interpretação dos resultados. Isto se deve ao fato de que, ao deformar um meio poroso, é natural imaginar-se que os poros se fecham ao serem comprimidos. Este trabalho visa implementar um modelo de permeabilidade dependente da deformação volumétrica, tornando possível que sejam discutidas interpretações físicas para as análises numéricas. Desta forma, propõe-se o estudo de um caso de compressão semi-confinada de uma amostra com parâmetros constitutivos coerentes com ordens de grandeza de tecidos biológicos moles. Os resultados dos campos de força, deslocamento e variação de volume são discutidos e justificados pelo modelo de permeabilidade isotrópico exponencial utilizado.

Palavras chave: tecidos biológicos moles, permeabilidade exponencial, poroelasticidade, elementos finitos, compressão semi-confinada

1. INTRODUÇÃO

A biomecânica consiste em uma área pluridisciplinar que, de modo geral, envolve esforços das áreas de física, engenharia, matemática aplicada, química, biologia e medicina. O panorama das relações entre os processos mecânicos e biológicos que ocorrem entre as complexas escalas espaciais observadas nos tecidos biológicos tem sido objeto de estudo de muitas das pesquisas em mecânica dos tecidos biológicos. A elucidação de como estímulos mecânicos são capazes de modificar a biomecânica das células torna a mecânica computacional uma área extremamente promissora no desenvolvimento e estudo de técnicas relacionadas à mecanobiologia (e.g. reparo, remodelação e crescimento tecidual).

Os componentes celulares que formam a estrutura básica dos tecidos biológicos moles estão imersos em uma substância base abundante em água (Mescher, 2018). Ao considerar estruturas pouco vascularizadas (e.g. tendões, ligamentos e discos intervertebrais), tem-se por hipótese que o fenômeno de difusão assume um papel fundamental no processo de transporte de nutrientes do ambiente externo para o interior do tecido. Os tecidos moles formam estruturas que, por natureza, estão sujeitas a regimes de grandes deformações, fenômenos de deformação dependente do tempo, danificação, interação fluido-estrutura, acoplamento difusivo-mecânico, entre outros. Além disto, duas fases podem ser consideradas para distinguir a estrutura básica de um tecido biológico mole: (i) uma fase sólida de macromoléculas estruturais (colágeno, elastina e proteoglicanos) e células, e (ii) uma fase fluida de água e solutos (Malandrino e Moeendarbary, 2019). Com estas características, é comum a utilização de modelos baseados em misturas bifásicas considerando cinemática finita (Almeida e Spilker, 1997b,a; Ateshian e Weiss, 2010).

Na formulação de modelos bifásicos, a equação de transporte de Darcy é utilizada para descrever o fluxo de fluido através do meio poroso. Nesta equação, a relação entre a velocidade relativa de fluido e o gradiente do campo de pressões de poro é dada através de um tensor de segunda ordem chamado de tensor de condutividade hidráulica, ou tensor de permeabilidade de Darcy (Coussy, 2003). Este tensor determina o quão resistente é o meio à passagem de fluido dentre seus poros interconectados. Quanto menor a permeabilidade, maior o gradiente de pressão necessário para possibilitar que o fluido escoe. Entretanto, dado que os tecidos biológicos moles (e.g. tendões) estão sujeitos a cinemáticas fisiológicas



enebi 2022

de grandes deformações, é necessário considerar um aspecto fundamental: a utilização de modelos de permeabilidade dependente da deformação conforme são aplicados esforços compressivos ou trativos. Assim, através deste tensor, é possível criar uma dependência do parâmetro de permeabilidade com o nível de deformação volumétrica (Ateshian e Weiss, 2010). Desta forma, no início das análises, a amostra apresenta uma permeabilidade inicial κ_0 . Ao aplicar forças compressivas, os poros passam a se fechar progressivamente, diminuindo a permeabilidade do meio.

Neste trabalho, pretende-se realizar experimentos numéricos em uma amostra de tendão possuindo características similares às encontradas em trabalhos experimentais (Böl et al., 2015). Nas análises, será considerado o chamado modelo de permeabilidade isotrópico exponencial. Desta forma, será comparado o comportamento do modelo bifásico quando sujeito a dois tipos de comportamento: 1) permeabilidade constante ao longo de todo o processo; 2) permeabilidade variando exponencialmente com a deformação volumétrica.

2. POROELASTICIDADE EM CINEMÁTICA FINITA

O quadro teórico apresentado nesta seção é inspirado na chamada Teoria das Misturas e particularizado para o caso de meios bifásicos. Algumas hipóteses são admitidas de modo a adequar a descrição à mecânica dos tecidos biológicos moles, sendo estas obtidas em trabalhos clássicos da literatura (Mow et al., 1980; Spilker e Suh, 1990; Levenston et al., 1998).

2.1 Definição de hipóteses

Considerando a caracterização de tecidos biológicos moles, os chamados modelos bifásicos podem ser formulados a partir das seguintes hipóteses:

1. Desconsideração das forças de corpo e das forças de inércia.
2. Incompressibilidade dos microconstituintes sólido e fluido, ou seja, assume-se que não há variação temporal nas densidades intrínsecas (reais) destas fases.
3. Total saturação da mistura na configuração deformada, dado que a soma das frações volumétricas de fluido e de sólido na configuração espacial é sempre unitário.
4. É válido o princípio das tensões efetivas, onde a tensão total é determinada a partir de uma parcela efetiva (dependente da deformação do esqueleto sólido) e de uma parcela hidrostática (dependente do fluido).

2.2 Modelo totalmente acoplado

Seja $\Omega_t \in \mathbb{R}^3$ o domínio espacial de uma matriz porosa hiperelástica e saturada por uma fase fluida. Estima-se a porosidade Euleriana $\phi_t = \phi_t(\mathbf{x}, t)$ a partir da razão

$$\phi_t = \frac{dV_t^f}{dV_t}, \quad (1)$$

onde dV_t^f e dV_t são, respectivamente, o elemento de volume de poros interconectados na configuração atual e o elemento de volume da mistura na configuração atual. A equação de balanço de massa da mistura pode ser escrita por

$$\text{div}(\mathbf{v}^s + \mathbf{w}) = 0, \quad (2)$$

onde a variável $\mathbf{v}^s$ denota a velocidade da fase sólida na configuração espacial. Em (2), a variável $\mathbf{w}$ é a velocidade relativa de fluido, calculada por

$$\mathbf{w} = \phi_t (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s), \quad (3)$$

com $\mathbf{v}^f$ denotando a velocidade espacial do fluido. Substituindo a lei de transporte de Darcy em (2), obtém-se a equação hidrodinâmica da mistura,

$$\text{div} \mathbf{v}^s + \text{div}(\mathbf{k} \nabla p) = 0, \quad (4)$$

onde $\mathbf{k}$ é o tensor de segunda ordem de permeabilidade de Darcy (condutividade hidráulica) e ∇p é o gradiente do campo de pressão de poro. Agora, para obter a equação de equilíbrio mecânico da mistura, parte-se do princípio de tensões efetivas para a tensão de Cauchy,

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^e - \alpha p \mathbf{I}, \quad (5)$$



enebi 2022

onde α é o coeficiente de Biot-Willis, σ^e é a tensão efetiva, determinada através do modelo constitutivo do esqueleto sólido, e $\mathbf{I}$ é o tensor identidade. Nota-se que, ao assumir a hipótese 2, o coeficiente α assume o valor 1. Da equação de conservação da quantidade de movimento linear, obtém-se

$$\operatorname{div} \sigma = 0. \quad (6)$$

Substituindo a equação (5) em (6), obtém-se

$$\operatorname{div} \sigma^e = \nabla p. \quad (7)$$

Neste trabalho, o comportamento macroscópico do esqueleto sólido é descrito matematicamente por meio de uma lei constitutiva hiperelástica. Assim, o tensor de tensão efetiva é derivado de um potencial escalar, também chamado de função energia livre Helmholtz $\Psi = \Psi(\mathbf{C})$. O modelo material aqui utilizado é o neo-Hookean, cujo potencial escalar é definido por

$$\Psi = \frac{\mu}{2} (I_1 - 3) - \mu \ln J + \frac{\lambda}{2} (\ln J)^2, \quad (8)$$

onde $I_1 = \operatorname{tr} \mathbf{C}$ indica o primeiro invariante do tensor de deformação à direita de Cauchy-Green $\mathbf{C}$ e J é o determinante do tensor gradiente de deformação do esqueleto sólido $\mathbf{F}$. O segundo tensor tensão de Piola-Kirchhoff efetivo $\mathbf{S}^e$ é obtido através da derivada parcial de Ψ em relação ao tensor de deformação de Green-Lagrange $\mathbf{E}$ do esqueleto sólido,

$$\mathbf{S}^e = 2 \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{E}}, \quad \text{com} \quad \sigma^e = \frac{1}{J} \mathbf{F} \mathbf{S}^e \mathbf{F}^T. \quad (9)$$

Com isto, pode-se definir o chamado problema de poroelasticidade em grandes deformações, que consiste em determinar os campos $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ e $p(\mathbf{x}, t)$, com $\mathbf{x} \in \Omega_t$ e $t \in (0, T)$, tal que

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma^e = \nabla p & \text{em } \Omega_t \times (0, T), \\ \operatorname{div} \mathbf{v}^s + \operatorname{div} (\mathbf{k} \nabla p) = 0 & \text{em } \Omega_t \times (0, T). \end{cases} \quad (10)$$

As equações definidas em (10) em conjunto com condições de contorno adequadas para $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ e $p(\mathbf{x}, t)$, e as equações constitutivas, definem o problema de valor de contorno poroelástico em deformações finitas.

2.3 Modelo de permeabilidade

Já que o fluxo de fluido através do esqueleto sólido é modelado através da lei de transporte de Darcy ($\mathbf{w} = \mathbf{k} \nabla p$), a relação linear entre o vetor velocidade relativa de fluido $\mathbf{w}$ e o gradiente do campo de pressão de poro ∇p deve ser estabelecida. No caso de problemas envolvendo cinemática infinitesimal, a consideração de que a permeabilidade do meio não varia com o campo de deformações volumétricas é aceitável. Entretanto, quando o domínio da amostra é submetido a forças compressivas que causam grandes deformações, o fenômeno de fechamento dos poros deve ser considerado. Na literatura, foram propostos diversos modelos de permeabilidade dependentes da deformação volumétrica do meio. Dentre eles, destacam-se os modelos de permeabilidade variando exponencialmente com a deformação volumétrica e modelos de permeabilidade anisotrópica (Ateshian e Weiss, 2010).

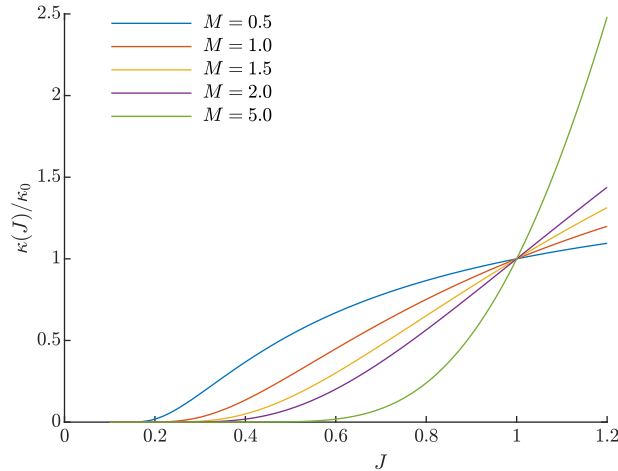
Neste trabalho, o fechamento dos poros será descrito através do chamado modelo de permeabilidade exponencial, estabelecido através da equação

$$\mathbf{k} = \kappa(J) \mathbf{I}, \quad \text{com} \quad \kappa(J) = \kappa_0 \exp \left(M \frac{J - 1}{J - \varphi_0} \right), \quad (11)$$

onde κ_0 representa o parâmetro de permeabilidade inicial, φ_0 é a medida Lagrangiana da solidez do meio e $M \geq 0$ é um parâmetro material que controla a dependência da permeabilidade espacial com a variação da deformação volumétrica. A Figura 1 ilustra a dependência do parâmetro material M na medida de permeabilidade $\kappa(J)/\kappa_0$ quando $\varphi_0 = 0, 2$ e $\varphi_0 < J < 1, 2$.

3. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

De modo a avaliar os efeitos do regime de grandes deformações na evolução da permeabilidade do meio durante a cinemática do corpo, *i.e.* no fechamento/abertura dos poros interconectados, propõe-se a modelagem de uma amostra cujas propriedades elásticas/poroelásticas são definidas dentro da faixa de propriedades encontradas na literatura para o

Figura 1. Curvas do modelo de permeabilidade exponencial para diferentes parâmetros M .

tensão. A Figura 2 especifica a geometria da amostra, juntamente com as condições de contorno aplicadas na análise. De acordo com a Fig. 2a, pode-se observar que o experimento numérico simula uma condição em que a amostra está sujeita a um ensaio de compressão, sendo o fluxo de fluido permitido apenas na direção transversal X_1 (em relação ao sistema de coordenadas da Fig. 2b). O procedimento de compressão é realizado sob deslocamento prescrito com uma taxa de 20 mm/min, sendo o deslocamento máximo igual a 2 mm. Este deslocamento prescrito máximo permanece sendo aplicado por mais 30 s, o que permite observar o fenômeno de relaxação de tensão.

Durante o período em que o deslocamento permanece fixo, o excesso de pressão de poro ao qual o fluido está sujeito passa a diminuir, fazendo com que a amostra apresente o fenômeno de relaxação (similar ao visualizado em modelos de viscoelasticidade). Este comportamento viscoso do modelo de poroelasticidade se decorre da velocidade relativa entre o esqueleto sólido e o fluido.

Para as simulações numéricas, utilizou-se uma malha com 1000 elementos finitos Lagrangianos mistos, com 20 nós para o campo de deslocamentos e 8 nós para o campo de pressões de poro. O fato de se utilizar uma interpolação quadrática para o deslocamento e linear para a pressão de poro faz com que este elemento seja estável (condição LBB), e não apresente problemas de travamento. Utilizou-se o esquema de solução monolítico para resolver as equações do problema acoplado, juntamente com o método de Newton-Raphson com *line-search* para a solução do sistema não linear (Bonet e Wood, 2008). Os sistemas lineares foram solucionados utilizando o *solver* direto presente no pacote PardisoTM. A Tabela 1 apresenta os parâmetros constitutivos referentes ao potencial (8) e os parâmetros do modelo de permeabilidade exponencial.

Tabela 1. Parâmetros do modelo constitutivo e da lei de transporte com permeabilidade exponencial.

μ [MPa]	λ [MPa]	κ_0 [mm ⁴ /N.s]	φ_0	M
1,0	1,5	1,0	0,2	0-10

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

De modo a avaliar a influência do regime de grandes deformações no fechamento de poros durante o ensaio de compressão semi-confinado, utiliza-se três valores representativos para o parâmetro M da Eq. (11): 0, 5 e 10. Pelo formato da Eq. (11), nota-se que, quando M assume valores próximos de 0, o parâmetro $\kappa(J)$ passa a independe do Jacobiano de transformação volumétrica J , i.e., $\kappa(J) \rightarrow \kappa_0$. Desta forma, retoma-se o chamado modelo de permeabilidade constante. Para os casos onde $M > 0$, observa-se que o parâmetro de permeabilidade diminui exponencialmente com o Jacobiano de transformação volumétrica.

A Figura 3a ilustra a força de reação da amostra ao longo do tempo de análise. Aqui, pode-se visualizar o fenômeno de relaxação decorrente do deslocamento constante ao longo do intervalo de tempo [6, 36] s. Ao observar a Fig. 3b, nota-se que, conforme M aumenta, até o instante de tempo $t = 6$ s, o volume da amostra decai com uma menor inclinação. Isto se decorre do fato de que, conforme é aplicado o deslocamento prescrito, os poros se fecham progressivamente; assim,

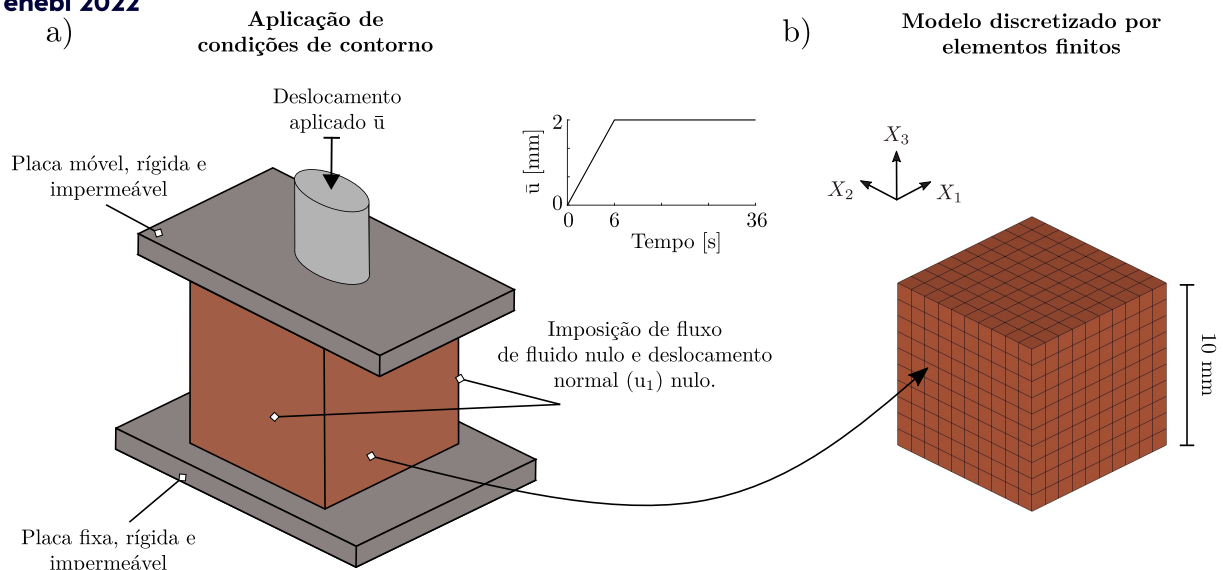


Figura 2. Modelo numérico em elementos finitos. a) Esquematização do ensaios numérico com as condições de contorno. b) Corpo de prova numérico discretizado

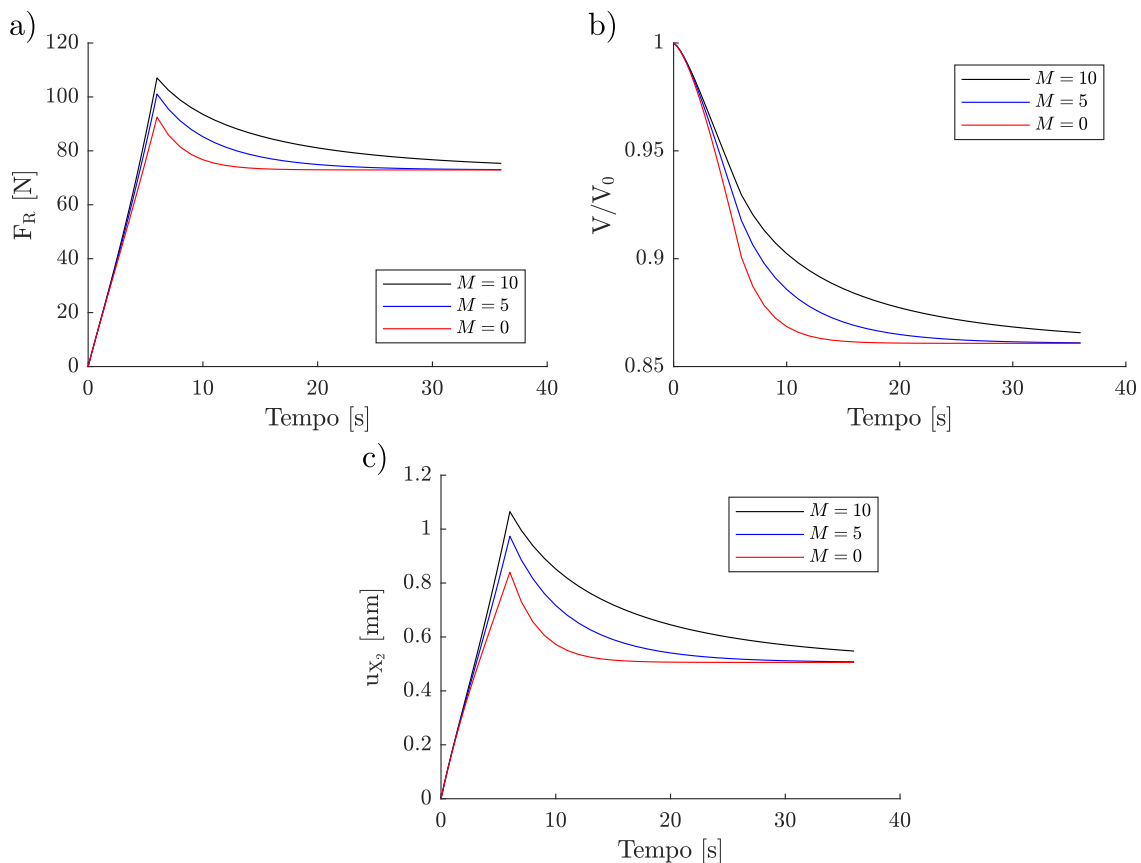


Figura 3. a) Força de reação F_R ao longo do tempo na superfície superior do corpo de prova. b) Variação relativa do volume total da amostra numérica durante o ensaio. c) Variação do deslocamento lateral (direção X_2) máximo ao longo do ensaio.

há uma maior dificuldade para que o fluido escoe dentre os poros, fazendo com que a vazão de fluido entre as paredes livres seja menor. Assim, o volume de uma amostra com um menor valor de M tende a ser menor ao final da aplicação de carregamento ($t = 6$ s). Após o instante $t = 6$ s, quando inicia-se o processo de relaxação, a resposta de todas as análises aproxima-se assintoticamente do comportamento puramente elástico, já que o excesso de pressão de poro tende



enebi 2022

a zero. Além disto, conforme aumenta-se o valor de M , o tempo de relaxação também aumenta. Na Fig 3c, observa-se o deslocamento lateral (direção X_2) da amostra no ponto onde ocorre a máxima amplitude.

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho, avaliou-se o comportamento de uma amostra de tecido biológico mole sob estado de compressão semi-confinada e verificou-se a influência de grandes amplitudes de deformação no fechamento de poros do tecido. Esta influência foi investigada através do chamado modelo de permeabilidade isotrópica exponencial (Ateshian e Weiss, 2010), onde a permeabilidade do meio é uma função exponencial que tem como variável dependente o Jacobiano de transformação volumétrica. Conclui-se que o modelo de permeabilidade dependente da deformação possui um grande apelo físico, ao contrário do modelo de permeabilidade constante. Assim, com este modelo, é possível interpretar de maneira intuitiva a fenomenologia de difusão. Além disto, pela maior quantidade de parâmetros, este modelo define um maior espaço de solução em problemas de identificação de parâmetros. Sendo assim, através dele, é possível caracterizar tecidos biológicos em situações/condições de contorno mais complexas.

6. REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, E. S. SPILKER, R. L. Mixed and Penalty Finite Element Models for the Nonlinear Behavior of Biphasic Soft Tissues in Finite Deformation: Part II - Nonlinear Examples. **Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering**, 1(2):151–170, jan 1997a. ISSN 1025-5842. doi: 10.1080/01495739708936700. URL <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/01495739708936700>.
- ALMEIDA, E. S. SPILKER, R. L. Mixed and Penalty Finite Element Models for the Nonlinear Behavior of Biphasic Soft Tissues in Finite Deformation: Part I - Alternate Formulations. **Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering**, 1(1):25–46, jan 1997b. ISSN 1025-5842. doi: 10.1080/01495739708936693. URL <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/01495739708936693>.
- ATESHIAN, G. A. WEISS, J. A. Anisotropic hydraulic permeability under finite deformation. **Journal of Biomechanical Engineering**, 132(11), Oct. 2010. doi: 10.1115/1.4002588. URL <https://doi.org/10.1115/1.4002588>.
- BÖL, M.; EHRET, A. E.; LEICHSENTRING, K.; ERNST, M. Tissue-scale anisotropy and compressibility of tendon in semi-confined compression tests. **Journal of Biomechanics**, 48(6):1092–1098, 2015.
- BONET, J. WOOD, R. D. **Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis**. Cambridge University Press, 2nd ed. edition, 2008.
- COUSSY, O. **Poromechanics**. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, UK, dec 2003. ISBN 9780470092712. doi: 10.1002/0470092718.
- LEVENSTON, M.; FRANK, E.; GRODZINSKY, A. Variationally derived 3-field finite element formulations for quasistatic poroelastic analysis of hydrated biological tissues. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 156(1-4):231–246, apr 1998. ISSN 00457825. doi: 10.1016/S0045-7825(97)00208-9.
- MALANDRINO, A. MOEENDARBARY, E. Poroelasticity of living tissues. pages 238–245. Elsevier, 2019. doi: 10.1016/b978-0-12-801238-3.99932-x. URL <https://doi.org/10.1016/b978-0-12-801238-3.99932-x>.
- MESCHER, A. L. **Junqueira's Basic Histology: Text & Atlas**. McGraw-Hill Education, New York, NY, 2018. ISBN 978-1-260-02617-7.
- MOW, V. C.; KUEI, S. C.; LAI, W. M.; ARMSTRONG, C. G. Biphasic creep and stress relaxation of articular cartilage in compression: Theory and experiments. **Journal of Biomechanical Engineering**, 102(1):73–84, 1980. ISSN 15288951. doi: 10.1115/1.3138202.
- SPILKER, R. L. SUH, J. K. Formulation and evaluation of a finite element model for the biphasic model of hydrated soft tissues. **Computers and Structures**, 35(4):425–439, 1990. ISSN 00457949. doi: 10.1016/0045-7949(90)90067-C.

7. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à “Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES”, ao “Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq” e a “Fundação de Amparo à Pesquisa e inovação do Estado de Santa Catarina - FAPESC, Nº 2021TR000634” pelo apoio financeiro a esta pesquisa.

8. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.