

## ANÁLISE ESTÁTICA DO FENÔMENO DE ATRITO ENTRE AS SUPERFÍCIES DE CORPOS RÍGIDOS

Laura Sofia de Andrade, [laura.sofia.lsa@gmail.com](mailto:laura.sofia.lsa@gmail.com)<sup>1</sup>  
Júlia de Araújo dos Santos, [juliaarasan@gmail.com](mailto:juliaarasan@gmail.com)<sup>1</sup>  
Carlos Eduardo Angelo Stoco, [du.stocco@gmail.com](mailto:du.stocco@gmail.com)<sup>1</sup>  
Antonio Carlos Valdiero, [antoniocvaldiero@gmail.com](mailto:antoniocvaldiero@gmail.com)<sup>1</sup>

<sup>1</sup>UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Departamento de Engenharia Mecânica, Campus Universitário EMC-CTC, Bairro Trindade, Caixa-postal: 476, 88040-900 - Florianópolis, SC –Brasil

**Resumo.** Estudam-se as características do atrito entre duas superfícies de corpos rígidos por meio de um objeto educacional baseado em testes experimentais de análise estática do comportamento de blocos em um plano com diferentes inclinações. O trabalho visa a aplicação prática de um conteúdo de expressiva importância no cenário da engenharia mecânica, auxiliando na compreensão do fenômeno de atrito estático, incentivando o desenvolvimento dos estudantes e tornando a metodologia do experimento acessível. A partir dos experimentos, mediu-se o ângulo de inclinação máximo da superfície antes do deslizamento do bloco, possibilitando os cálculos das componentes da força peso, força de atrito e coeficiente de atrito estático máximos. Além disso, é realizada uma análise do equilíbrio estático do sistema e se explora a possibilidade de o bloco tombar antes que aconteça o deslizamento. Como resultados deste trabalho também se tem a sistematização metodológica dos conceitos, fundamentos e orientações que podem auxiliar um engenheiro num caso prático de problemas envolvendo atrito. Pretende-se assim contribuir para um melhor entendimento de um fenômeno complexo da mecânica clássica, tornando o assunto mais interessante e atrativo aos estudantes de engenharia.

**Palavras chave:** Atrito, Objeto Educacional, Análise estática

**Abstract.** The friction's characteristics between two surfaces of rigid bodies are studied through an educational object based in experimental tests of statics analysis of the behavior of blocks in a plan with different inclinations. The work aims the practical application of an extremely important subject in the mechanical engineering field, helping the comprehension of this event, promoting the students' development, and making the experiment methodology accessible. From the experiments, the maximum inclination angle of the surface before the body's slide, making it possible to calculate the weight force's components, the maximum frictional force, and the friction coefficient. Furthermore, static equilibrium analysis is executed and the possibility of body toppling before the slide is studied. As a result of this project, there is a methodological systematization of the concepts, foundations, and orientations that can help an engineer to solve a practical case involving friction. It is intended to contribute to a better understanding of a complex phenomenon of classical mechanics, making the subject more interesting and attractive to engineering students.

**Keywords:** Friction, Educational Object, Static Analysis

### 1. INTRODUÇÃO

Este trabalho aborda os conceitos relacionados a atrito estático em superfícies por meio de um experimento de blocos em diferentes planos inclinados. Nesse contexto, apresenta-se a análise comportamental do atrito estático máximo em diferentes interações, identificando e caracterizando tal comportamento com o objetivo de expandir o aprendizado do atrito em sala de aula.

A aplicação dos conhecimentos adquiridos em um ambiente prático gera envolvimento do aluno com o tópico abordado. E, segundo o que aponta Almeida (2002), incentiva o aprendizado através da construção do conhecimento e torna a autonomia e participação dos alunos essenciais.

Isto é, através da identificação do problema o estudante buscará uma solução alternativa à convencional, inovando ao desenvolver uma abordagem experimental. Como afirmado por Fuzetti (2009) e o teórico Schumpeter (1982), a inovação e o empreendedorismo estão altamente conectados, sendo o empreendedor o indivíduo responsável pela construção de novas metodologias para problemas existentes na sociedade. Assim, a execução de atividades desse escopo estimula no estudante características empreendedoras desde sua formação.

Segundo pesquisas, há no mundo essa necessidade de formar alunos com maior empreendedorismo e autonomia, e que possam criar inovações no ramo da tecnologia (Araújo et al., 2013). Essa preocupação também é expressa nos objetivos para o desenvolvimento sustentável (Nações Unidas, 2015), o qual almeja o fortalecimento da pesquisa científica, incentivo da inovação e aumento no número de trabalhadores da pesquisa e desenvolvimento (meta 9.5). Nos objetivos também é desejado o aumento substancial no número de jovens e adultos que tenham habilidades relevantes para o mercado de trabalho e empreendedorismo (meta 4.4).

Nesse contexto, procurou-se uma abordagem inteligível e prática de um conteúdo de relevância para a engenharia mecânica e o assunto que se adequou nesses requisitos foi o estudo das forças de atrito presente no contato de superfícies com tendência ao movimento.

É ressaltado por pesquisadores que o fenômeno de atrito ocorre em todos os sistemas físicos que incorporam partes com movimento relativo (Borsotto et al., 2007), sendo de grande influência em automóveis e máquinas de comando numérico, por exemplo. Segundo Wit e Lischinsky (1997) o atrito está presente em todas as máquinas que possuem um movimento relativo de peças e causa erros no controle de posição e atrasos para seguimento da trajetória programada, podendo gerar inclusive instabilidade.

O atrito estático é uma força de reação proporcional à força aplicada que pode alcançar um limite máximo  $F_s$ , dependendo da rugosidade dos materiais que estão em contato e das relações de equilíbrio do sistema (Valdiero, 2012). Posto isso, procurou-se utilizar materiais diversos e corpos rígidos com pesos diferentes para os testes, visando abrangência do comportamento do atrito em diferentes situações.

A combinação das diversas características de atrito pode resultar numa função não linear semelhante ao gráfico da Fig. 1 que representa a força de atrito versus a velocidade em regime permanente. O atrito de Coulomb (também conhecido como atrito a seco) ocorre quando as superfícies não estão lubrificadas e é proporcional a força normal, enquanto o atrito viscoso ocorre quando há lubrificação e é proporcional a velocidade relativa entre as superfícies. O atrito de Stribeck acontece quando essa velocidade é baixa, e se caracteriza por sua não linearidade, como observado na Fig. 1.

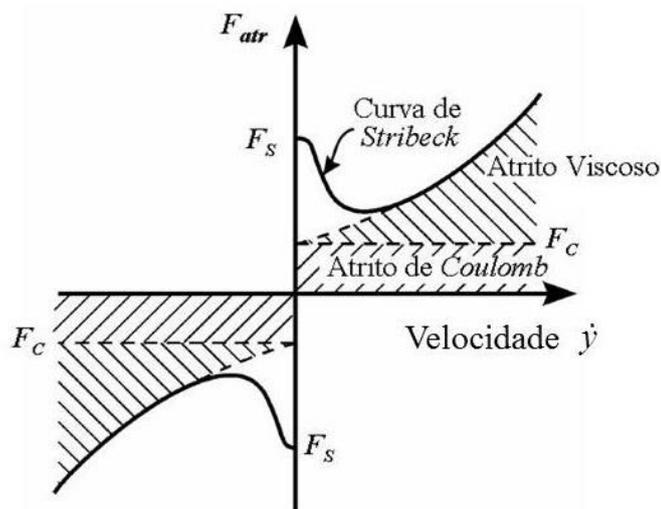


Figura 1. Gráfico da combinação das características de atrito em regime permanente (Valdiero, 2012)

Segundo Meriam e Kraige (2014), a maior força de atrito acontece quando o corpo está na iminência de iniciar seu movimento e o atrito passa de ser estático e se torna cinético. Nesse momento o coeficiente de atrito estático é máximo, e a obtenção do seu valor será o foco dos experimentos realizados neste trabalho.

Na seção seguinte será descrita a metodologia utilizada nos experimentos e análises, a seção 3 apresenta os resultados obtidos e por fim serão apresentadas as conclusões.

## 2.METODOLOGIA

A metodologia aplicada é composta por 5 fases: escolha do escopo do projeto e escolha da experiência a ser desenvolvida, desenvolvimento dos experimentos, análise dos resultados obtidos, formatação e desenvolvimento de uma planilha de cálculos e redação do relatório final.

Na primeira fase, desenvolveu-se uma análise fundamentada na problemática da escassez de estudos sobre o atrito e dificuldade de estudantes do ensino fundamental, médio e superior em compreender esse tema utilizando aplicações práticas conforme Almeida (2002). A partir da pesquisa de Valdiero (2012) e brainstorms de ideias houve a tomada de decisão sobre o modelo do experimento a ser realizado. A tomada de decisão teve como base 2 aspectos: o experimento

deveria ter elementos que a maioria dos estudantes tivessem acesso de suas casas e envolver diretamente o escopo escolhido anteriormente.

Durante a segunda fase, ocorreu o desenvolvimento dos experimentos. Sendo um fenômeno não linear e multifacetado, o atrito pode ser: estático, seco, viscoso e de arraste, conforme Valdiero et al. (2007). Sendo o atrito estático o tratado neste projeto. A proposta experimental é fundamentada na variação angular de planos inclinados a fim de obter a angulação máxima que antecede o deslizamento de um bloco sob essa superfície. Conforme apresentado por Meriam e Kraige (2014), calcula-se o valor do coeficiente de atrito da superfície a partir do ângulo máximo obtido. Assim, selecionaram-se variados materiais, visando diversificar o tipo de superfície e alcançar diferentes níveis de rugosidade. Também se calculou o valor da força de atrito máxima, obtida pela componente Normal da força Peso de cada bloco e a angulação máxima conforme elucidado por Meriam e Kraige (2014).

Além disso, analisou-se a possibilidade de o bloco tombar antes de deslizar, considerando todas as estruturas homogêneas, aproximando o centro do centróide para o centro de gravidade e realizando o cálculo do somatório dos momentos em z para entender o comportamento das forças quando bloco se encontra na iminência de tombar.

Na terceira fase, desenvolveu-se uma análise através de cálculos sobre a experiência realizada a fim de agrupar esses dados posteriormente em uma planilha determinada, atingindo, assim, a quarta fase que consistiu na formatação da planilha de cálculos com os dados de todos os experimentos condensados.

A quinta e última fase foi a comparação analítica dos resultados obtidos e o desenvolvimento do relatório.

### 3. RESULTADOS

Selecionaram-se blocos com formas de prisma de base retangular com faces na forma de paralelepípedos. Optou-se por blocos com esse formato a fim de facilitar o cálculo do centro de massa já que a matéria tende a ser distribuída de maneira uniforme nessa geometria.

As superfícies foram selecionadas a fim de se obter um cenário amplo de rugosidade, mas que simultaneamente fosse de fácil acesso nas moradias. Assim, foi possível observar como o material da superfície afetava no valor do ângulo de iminência do movimento, utilizando um mesmo bloco para diferentes superfícies. Assim como, observar como o material do bloco poderia interferir, utilizando uma mesma superfície para diferentes blocos.

Todos os cálculos envolvendo o bloco abrangem o diagrama do corpo livre identificado na Fig 2.

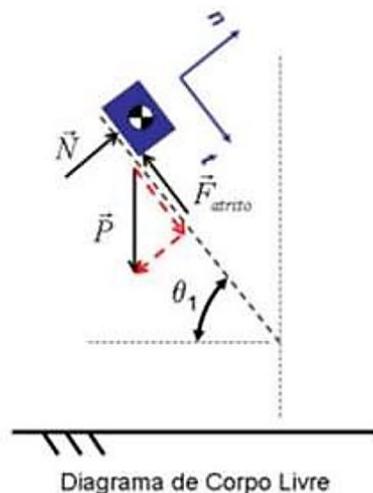


Figura 2. Diagrama de corpo livre de um bloco

A Fig. 2 mostra o DCL (Diagrama de Corpo Livre) de um bloco de massa  $m$  no plano inclinado. Note que as forças atuantes são a força peso,  $\vec{P}$ , a força normal,  $\vec{N}$ , e a força de atrito,  $\vec{F}_{atrito}$ . A força peso é uma força de campo, tem direção vertical do campo gravitacional e sentido da massa para o centro da terra. A força normal é uma força de contato, direção perpendicular à superfície e sentido da superfície para a massa. A força de atrito também é uma força de contato, direção paralela à superfície de contato e sentido contrário ao movimento. Importante ressaltar que as forças de contato só existem se há contato da massa com a superfície.

Pela aplicação da segunda lei de Newton para o bloco na posição  $\theta_1$  em cada uma das direções normal ( $n$ ) e tangencial ( $t$ ), de acordo com o sistema coordenadas generalizadas representado na figura anterior, tem-se na condição de equilíbrio estático que:

$$\sum F_n = N - P_n = m \cdot a_n = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_t = P_t - F_{atrito} = m \cdot a_t = 0 \quad (2)$$

Note que não existe movimento na direção vertical, logo a componente normal da aceleração ( $a_n$ ) é nula. As componentes normal,  $P_n$ , e tangencial,  $P_t$ , da força peso podem ser facilmente determinadas a partir do ângulo de inclinação do plano. Logo, facilmente pode-se deduzir que para a condição de repouso (velocidade nula) do bloco sobre a superfície do plano inclinado, tem-se o regime de atrito estático:

$$F_{atrito} = P_t = P \sin \theta_1 \leq \mu_s N = \mu_s P \cos \theta_1 = F_s \quad (3)$$

Assim, obtém-se o coeficiente máximo de atrito estático ( $\mu_s$ ) da seguinte forma:

$$\mu_s = \tan \theta_{m\acute{a}x} \quad (4)$$

Sendo  $\theta_{m\acute{a}x}$ , calculado pelo sistema de medição angular presente em dispositivos de telefones móveis, o ângulo de deslizamento. A fim de obtê-lo, posicionou-se o dispositivo juntamente ao bloco e, conforme a variação angular manual do plano, o sistema estimou a inclinação. Após o início do deslizamento do bloco, o sistema foi pausado e fixado no ângulo para anotação, sendo este o  $\theta_{m\acute{a}x}$ . As Fig. 3, 4 e 5 mostram fotos de alguns dos experimentos realizados.



Figura 3. Experimento 1 (borracha na madeira revestida) quando o objeto está prestes a deslizar

Assim, obtiveram-se os seguintes valores de  $\mu_s$  para as diferentes interações, conforme sistematizado na Tab. 1.

Tabela 1. Comparação coeficiente de atrito e ângulo máximo entre superfícies

| Materiais              | $\theta$ (graus) | $\mu_s$ |
|------------------------|------------------|---------|
| Madeira r. mdf - Metal | 10               | 0,18    |
| Papelão - Papelão      | 19               | 0,34    |
| Plástico - Papelão     | 20               | 0,36    |
| Argila - Papelão       | 25               | 0,47    |
| Madeira - Borracha     | 39               | 0,81    |
| Papel - Borracha       | 21               | 0,38    |

A partir do ângulo de deslizamento obtido, é possível calcular as componentes normal ( $P_n$ ) e tangencial ( $P_t$ ) da força peso através da relação trigonométrica dada pela Fig 2.

Obtém-se  $P_n$  e  $P_t$  por:

$$P_n = P \cos \theta_{m\acute{a}x} \quad (5)$$

$$P_t = P \sin \theta_{m\acute{a}x} \quad (6)$$

Segundo Meriam e Kraige (2014) a força de atrito máxima acontece quando o objeto está na iminência do movimento e é proporcional à força Normal, ou seja, a força que a superfície exerce no corpo. Como neste caso a força normal é igual à componente vertical da força peso, a força de atrito máximo é dada por:

$$F_{at\ m\acute{a}x} = P_n \mu_s \quad (7)$$

Assim, pode-se calcular cada componente conforme representado na Tab. 2,

Tabela 2. Componentes da força peso dos diferentes objetos

| Material do objeto | $P_t$ | $P_n$ |
|--------------------|-------|-------|
| Borracha           | 0,094 | 0,11  |
| Metal (hd)         | 0,21  | 1,21  |
| Metal              | 1,90  | 7,62  |
| Papel              | 0,03  | 0,09  |
| Papelão            | 0,19  | 0,56  |
| Borracha           | 0,85  | 1,05  |

Já a relação  $F_{at\ m\acute{a}x}$  depende dos materiais e do objeto, assim tem-se os valores calculados e mostrados na Tab. 3:

Tabela 3. Valores de  $F_{at\ m\acute{a}x}$  para cada combinação de materiais de superfície e bloco.

| Material da superfície   | Material do Objeto | $F_{at\ m\acute{a}x}$ (N) |
|--------------------------|--------------------|---------------------------|
| Madeira revestida em mdf | Borracha           | 0,09                      |
| Madeira revestida em mdf | Metal (hd)         | 0,21                      |
| Madeira revestida em mdf | Metal              | 1,9                       |
| Madeira revestida em mdf | Papel              | 0,03                      |
| Papelão                  | Papelão            | 0,19                      |
| Plástico                 | Papelão            | 0,20                      |
| Argila                   | Papelão            | 0,25                      |
| Madeira                  | Borracha           | 0,85                      |
| Papel                    | Borracha           | 0,48                      |



Figura 4: Exemplificação do experimento: Caixa de papelão na superfície de tijolo



Figura 5: Exemplificação do experimento da caixa de papelão na superfície de madeira

Também é possível analisar as forças explicadas anteriormente seguindo o Diagrama de corpo livre (Figura 1) e Valdiero (2020) obtemos as seguintes equações. Somatório das forças no sentido  $x$  (tangencial):

$$\sum F_t = F_{at} - P_t = 0 = F_{at} = P_t \quad (8)$$

Assim, obtemos que a força de atrito máxima é igual a componente tangencial ( $x$ ) da força peso. O que de fato ocorre, observe nas Tab. 2 e 3 que mesmo os cálculos sendo feitos por equações diferentes, a força de atrito máxima coincide com a componente tangencial da força peso. Somatório das forças no sentido  $y$  (normal):

$$\sum F_n = N - P_n = 0 \quad (9)$$

$$N = P_n \quad (10)$$

Assim, obtemos que a reação normal da superfície é igual a componente normal da força peso.

### 3.1 Análise da possibilidade de tombamento do bloco

Segundo apresentado na disciplina de estática para engenharia pelo professor Antônio Carlos Valdiero e segundo J. L. Meriam e L.G. Kraige (2014) essa seção analisa a possibilidade de o bloco tombar antes de deslizar. A seguir, será mostrado que isso ocorre em blocos que têm o centro de gravidade mais altos e demonstrado analiticamente o motivo de isso não ter ocorrido nos experimentos realizados pelo grupo.

Como citado anteriormente, a escolha da geometria do objeto em formato de um bloco foi realizada com o intuito de facilitar os cálculos e assim aproximá-los do comportamento real do experimento. Assim, para os cálculos

consideramos todas as estruturas homogêneas e aproximamos o centro do centróide para o centro de gravidade, que na estrutura de um bloco se localiza no meio.

Realizando o cálculo do somatório dos momentos em  $z$  para entender o comportamento das forças quando bloco se encontra na iminência de tombar. Sendo “B” o comprimento do bloco, “h” a altura do centro de gravidade até a superfície e posicionando a origem do sistema de coordenadas em uma das quinas do bloco o desenvolvimento da equação é dado por:

$$\sum M_z = 0 \quad (11)$$

$$P_t \cdot h - \frac{P_n \cdot B}{2} = 0 \quad (12)$$

$$\sin \theta_{m\acute{a}x} \cdot h = \frac{\cos \theta_{m\acute{a}x} \cdot B}{2} \quad (13)$$

$$\frac{\sin \theta_{m\acute{a}x}}{\cos \theta_{m\acute{a}x}} = \frac{B}{2h} = \tan \theta_{m\acute{a}x} \quad (14)$$

Usando este resultado, obtemos o ângulo máximo em que a superfície poderia seria inclinada antes de o bloco tombar através da seguinte equação:

$$\theta_{m\acute{a}x} = \tan^{-1} \frac{B}{2h} \quad (15)$$

Tabela 4. Comparação dos ângulos de deslizamento e tombamento

| Número do Experimento | Ângulo de Deslizamento | Ângulo de Tombamento |
|-----------------------|------------------------|----------------------|
| 1                     | 40                     | 45,71                |
| 2                     | 10                     | 33,34                |
| 3                     | 14                     | 33,02                |
| 4                     | 20                     | 68,02                |
| 5                     | 19                     | 54,64                |
| 6                     | 20                     | 54,64                |
| 7                     | 25                     | 54,64                |
| 8                     | 39                     | 84                   |
| 9                     | 21                     | 84                   |

Como observado na tabela acima o ângulo necessário para o bloco tombar é maior do que a inclinação necessária para o bloco deslizar, ou seja, o momento que é necessário gerar para o bloco tombar só é possível em um cenário posterior a quando a componente tangencial da força peso é maior que a força de atrito, momento em que o bloco desliza. Mas, como falado anteriormente, quanto maior a altura do bloco maior a chance desse cenário se inverter já que a altura do bloco é inversamente proporcional ao ângulo necessário para o bloco tombar. Um possível experimento a ser realizado é mudar a maneira que o bloco está posicionado na superfície, fazendo sua maior dimensão ser a dimensão da altura e verificando se o bloco tomba antes de deslizar e em qual ângulo isso ocorre.

#### 4. CONCLUSÕES

Este trabalho proporciona a análise do comportamento do atrito de maneira tangível e acessível, possibilitando uma aplicação dos conteúdos de estática e abordando um assunto de relevância para o meio da engenharia mecânica. Foi observado como o valor do coeficiente de atrito e a força máxima de atrito podem variar de acordo com os materiais utilizados, e como o comportamento dos blocos pode variar de acordo com suas características. Os dados obtidos a partir dos cálculos e análises apresentados estão em consonância com a literatura científica evidenciando que, quanto maior a rugosidade de uma superfície, maior seu coeficiente de atrito estático. Em pesquisas futuras, pretende-se verificar a repetibilidade dos resultados por meio da repetição, automatizar os testes para que a pesquisa fique menos sujeita a erro humano e propor o estudo das características do atrito não só em corpos rígidos, mas também em máquinas de comando numérico a fim de compreender a não linearidade desse.

#### 5. AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio do Departamento de Engenharia Mecânica (EMC), da Universidade Federal de Santa Catarina – Brasil, nos projetos “Identificação da não linearidade de atrito para fins de inovação e projeto

de máquinas inteligentes” (SIGPEX, no. 202002173) e “Desenvolvimento de Soluções Criativas com Controle Numérico” (SIGPEX, no. 202002437). Os autores são agradecidos aos colegas e familiares pelo apoio incondicional durante a trajetória acadêmica.

## 6. REFERÊNCIAS

- Almeida, L. S. Facilitar a aprendizagem: ajudar aos alunos a aprender e a pensar. *Psicol. Esc. Educ.* (Impr.) vol.6 no.2 Campinas Dec. 2002. <<http://dx.doi.org/10.1590/S1413-85572002000200006> >
- Alves, M. R. ; Goergen, R. ; Stein, E. O. ; Souza, M. G. ; Rasia, L. A. ; Valdiero, A. C. . Determinação experimental do atrito em atuadores pneumáticos sem haste. *BOLETIM TÉCNICO DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DE SÃO PAULO*, v. 46, p. 83-83, 2018.
- Araújo, E.A. et al. Resultados do projeto nivelamento acadêmico aplicado ao ensino de química teórica no campus universitário de Tucuruí – UFPA. In: *CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA*, 41. Gramado. Anais... Gramado: UFRGS, 2013.
- Borsotto, B., Godoy, E., Beauvois, D., Devaud, E., 2007, “An identification method for static and dynamic friction coefficients”, *Proceedings of the ICCAS '07, International Conference on Control, Automation and Systems*, 2007, pp. 933 – 938.
- Canudas-De-Wit, C., Lischinsky, P., 1997, “Adaptive friction compensation with partially known dynamic friction model”, *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Vol.11, pp.65-80.
- Fuzetti, D. L. K. “Empreendedorismo Na Visão Schumpeteriana Como Fator De Estratégia De Inovação Empresarial: Estudo em uma metalurgia”
- Meriam J.L. e Kraige L.G., 2014, *Mecânica para Engenharia: Estática*, LTC, Rio de Janeiro, 6ª edição.
- Nações Unidas, 2015. *Objetivos de Desenvolvimento Sustentável- “Indicadores Brasileiros para os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável”* 10 Dez. 2020 <<https://odsbrasil.gov.br/>>.
- Hibbeler, R. C. *Mecânica Estática*, 8a Edição, Rio de Janeiro: LTC Editora, 1999. KOMATSU, J. S
- Valdiero, A. C.. *Modelagem matemática de robôs hidráulicos*. 1. ed. Ijuí: Unijuí, 2012. v. 1. 200p .
- Valdiero, A. C., Guenther, R., Pieri, E. R., Negri, V. J., 2007, “Cascade control of hydraulically driven manipulators with friction compensation”, *International Journal of Fluid Power*, Vol. 8, pp. 7-16.

## 7. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.