

APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS DE MÍNIMOS QUADRADOS - LSFEM NA RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE CONVECÇÃO

Sabrina dos Santos Ferreira, sabrina@fem.unicamp.br¹
Luiz Felipe Mendes de Moura, felipe@fem.unicamp.br²

^{1,2}Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas - FEM/UNICAMP. Rua Mendelejev, 200 - CEP 13083-860 Cidade Universitária "Zeferino Vaz" Barão Geraldo Campinas - SP

Resumo. O objetivo desse estudo é aplicar o método dos elementos finitos de mínimos quadrados (LSFEM) na resolução da equação de convecção em regime permanente e transiente. O método Cranck - Nicolson foi utilizado para discretizar o tempo, a quadratura de Gauss-Legendre foi utilizada para o cálculo das integrais. Para a solução do sistema algébrico utilizou-se o método dos gradientes conjugados, pois, a matriz é simétrica, esparsa e definida positiva, características resultantes da formulação via LSFEM. Para obtenção dos resultados um código em linguagem C foi implementado, quando comparados os resultados nos regimes permanente e transiente o erro obtido igual a 1,06%.

Palavras chave: Método dos Elementos Finitos de Mínimos Quadrados (LSFEM), Equação de Convecção.

Abstract. The objective of this study is to apply the least squares finite element method (LSFEM) to obtain the solution of the convection equation in permanent and transient regimes. The Cranck - Nicolson method was used to discretize time, the Gaussian Quadrature - Legendre method for calculating integrals. For the solution of the algebraic system the conjugated gradients method was used, because the matrix is symmetrical, sparse and positive defined, characteristics resulting from the formulation via LSFEM. To obtain the results, a code in C language was implemented, when comparing the results in the steady and transient regimes the error obtained equal to 1,06%.

Keywords: Least Squares Finite Element Method (LSFEM), Convection Equation.

1. INTRODUÇÃO

Com o avanço da tecnologia, os engenheiros são desafiados a realizar projetos cada vez mais caros e mais complexos estando sujeitos a severas restrições de confiabilidade e segurança, estes projetos abrangem diferentes áreas do conhecimento, tais como, a indústria aeroespacial, aeronáutica, indústria nuclear e também áreas destinadas a proteger o meio ambiente através do controle de isolamento térmico, acústico, poluição química e gestão dos recursos hídricos, segundo Dhatt et al. (1984). Uma variedade de problemas em engenharia pode ser modeladas utilizando equações diferenciais parciais (EDP), mas a obtenção de soluções analíticas para estas equações em geometrias arbitrárias são difíceis de ser encontradas devido à complexidade matemática, para superar esta dificuldade é necessário a utilização de métodos numéricos para obtenção da solução, de acordo com Dhatt et al. (1984).

O método dos elementos finitos de mínimos quadrados (LSFEM) é uma forma variante do método dos elementos finitos, segundo Ferreira e Moura (2019). De acordo com Bon (1998) o método dos elementos finitos de mínimos quadrados (LSFEM) apresenta vantagens em relação a outros métodos, pois, pode ser utilizado para resolver qualquer tipo de EDP, e também apresenta grande performance computacional, pois, o sistema linear obtido apresenta matriz simétrica, esparsa e definida positiva. No trabalho de Camprub et al. (2000) o LSFEM foi utilizado na resolução de problemas de convecção difusão com altos números de Peclet, apresentando bons resultados para o caso com difusão dominante. Em Ferreira (2004) usando as formulações de velocidade-pressão-vorticidade e velocidade-pressão-tensão, simulações de escoamentos incompressíveis foram realizadas. No trabalho de Claro; Campos; Moura (2011) foi apresentado a solução numérica da equação de Poisson e Helmholtz via LSFEM e método de Galerkin. Ferreira (2015) apresentou a solução da equação de convecção difusão bidimensional com propriedades constantes e propriedades variáveis com a temperatura.

O objetivo desse estudo foi aplicar o método dos elementos finitos de mínimos quadrados (LSFEM) para obtenção da solução da equação de convecção em regime permanente e transiente, verificar que a solução transiente tende a solução permanente com o passar do tempo através da análise da diferença entre as duas soluções.

2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA EM ESTUDO

A equação de convecção transiente em um domínio genérico $\Omega \in R^2$ limitado e fechado com condições de contorno do tipo Dirichlet e condições iniciais em estudo é apresentada na Eq.(1),

$$\underbrace{\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t}}_{\text{termo transiente}} + \underbrace{u \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x} + v \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y}}_{\text{termo convectivo}} = 0 \quad (1)$$

onde (u, v) é o campo de velocidade uniforme adotado.

3. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS DE MÍNIMOS QUADRADOS(LSFEM)

O método dos resíduos ponderados inicia-se com uma equação diferencial genérica apresentada na Eq. (2),

$$L(u(x, y)) = f \quad \text{em} \quad \Omega \quad (2)$$

Devido às dificuldades de obtenção da solução analítica, pode se obter a solução aproximada denominada, $\tilde{u}(x, y)$, combinando-se as funções de interpolação ou de forma, $N_i(x, y)$, e os coeficientes de Fourier u_1, u_2, \dots, u_n .

$$\tilde{u}(x, y) = \sum_{i=1}^n u_i N_i(x, y) \quad (3)$$

Como resultado da substituição da Eq.(3) na Eq.(2) um erro ou resíduo, $R(\tilde{u}(x, y))$ é obtido, Eq.(4),

$$R(\tilde{u}(x, y)) = L(\tilde{u}) - f. \quad (4)$$

O produto interno entre o resíduo, Eq.(4) e a função de ponderação, ω_i , é igualado a zero, Eq.(5),

$$\langle R(\tilde{u}(x, y)), \omega_i \rangle = \int_{\Omega} \omega_i R(\tilde{u}(x, y)) d\Omega = 0 \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

onde Ω é o domínio do problema e o número de funções ponderadoras é igual ao número de coeficientes desconhecidos α_i . A escolha da função de ponderação $\omega_i(x)$ define o tipo do método de resíduo ponderado a ser utilizado. A idéia central do método dos mínimos quadrados é determinar $\tilde{u}(x, y) \in \Omega^e$ para a minimização da integral do quadrado do resíduo. O funcional quadrático é definido de acordo com a Eq.(6),

$$I(\tilde{u}(x, y)) = |[R(\tilde{u}(x, y))]|^2 = \int_{\Omega} R(\tilde{u}(x, y))^2 d\Omega \quad (6)$$

com $\tilde{u}(x, y) \in \Omega^e = \{ \tilde{u} \in H^2 \}$, onde H^2 é o espaço de Hilbert de ordem 2. A solução $\tilde{u}(x, y)$ será um minimizador do funcional, Eq.(6) se a primeira variação $\delta I(\tilde{u}(x, y))$ for igual a zero, Eq.(7),

$$\delta I(\tilde{u}(x, y)) = 2 \int_{\Omega} (\delta R) R(x) d\Omega = 0 \quad \text{ou} \quad \delta I(\tilde{u}(x, y)) = \int_{\Omega} (\delta R) R(x) d\Omega = 0 \quad (7)$$

Comparando a Eq.(7) com a Eq.(5) pode-se concluir que a função de ponderação ω_i será igual a primeira variação do resíduo δR sendo este o método dos mínimos quadrados. A solução aproximada, $\tilde{T}(x, y, t)$, é dada pela Eq.(8), e as derivadas parciais de primeira ordem de $\tilde{T}(x, y, t)$ em relação a x e y , são apresentadas nas Eq.(9) e Eq.(10),

$$\tilde{T}(x, y, t) = \sum_{i=1}^{Nnos} T_i(t) N_i(x, y) \quad (8)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}(x, y, t)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{Nnos} T_i(t) \frac{\partial N_i(x, y)}{\partial x} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}(x, y, t)}{\partial y} = \sum_{i=1}^{Nnos} T_i(t) \frac{\partial N_i(x, y)}{\partial y} \quad (10)$$

Isolando termo transiente da Eq.(1), tem-se, a Eq.(11),

$$\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x} + v \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \right) \quad (11)$$

De acordo com Ferreira e Moura (2020) o método utilizando $\theta = 0.5$ será adotado, pois essa é a melhor alternativa para discretizar o tempo via LSFEM.

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{T}_n^{s+1} - \tilde{T}_n^s}{\Delta t} &= \theta \left\{ -u \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} - v \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \right\}^{s+1} + (1-\theta) \left\{ -u \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} - v \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \right\}^s = 0.5 \left\{ -u \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} - v \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \right\}^{s+1} \\ &+ 0.5 \left\{ -u \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} - v \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \right\}^s \end{aligned} \quad (12)$$

O resíduo, $R(x, y)$, é apresentado na Eq.(13), e Agrupando-se os termos no tempo s e no tempo $s+1$ tem-se a Eq.(14),

$$R(x, y) = \frac{\tilde{T}^{s+1}}{\Delta t} - \frac{\tilde{T}^s}{\Delta t} - 0.5 \left\{ -u \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} - v \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \right\}^{s+1} - 0.5 \left\{ -u \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} - v \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \right\}^s \quad (13)$$

$$\begin{aligned} R(x, y) &= \left\{ \frac{\tilde{T}}{\Delta t} + 0.5u \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + 0.5v \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \right\}^{s+1} + \left\{ -\frac{\tilde{T}}{\Delta t} + 0.5u \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + 0.5v \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} \right\}^s \\ R(x, y) &= \left\{ \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^{s+1} N_i + 0.5u \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^{s+1} \frac{\partial N_i}{\partial x} + 0.5v \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^{s+1} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right\} \\ &+ \left\{ -\frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^s N_i + 0.5u \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^s \frac{\partial N_i}{\partial x} + 0.5v \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^s \frac{\partial N_i}{\partial y} \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

A primeira variação, $\delta R(x, y)$, do resíduo é dada pela Eq.(15),

$$\delta R(x, y) = \frac{\partial R(x, y)}{\partial T_i} \delta T_i = \left(\frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^{Nnos} N_i + 0.5u \sum_{i=1}^{Nnos} \frac{\partial N_i}{\partial x} + 0.5v \sum_{i=1}^{Nnos} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \delta T_i \quad (15)$$

Aplicando o método dos mínimos quadrados, obtém-se a Eq.(16)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} R(x, y) \delta R d\Omega &= \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^{s+1} N_i + 0.5u \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^{s+1} \frac{\partial N_i}{\partial x} + 0.5v \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^{s+1} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) + \left(-\frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^s N_i \right. \right. \\ &+ \left. \left. 0.5u \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^s \frac{\partial N_i}{\partial x} + 0.5v \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^s \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right\} \left\{ \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^{Nnos} N_i + 0.5u \sum_{i=1}^{Nnos} \frac{\partial N_i}{\partial x} \right. \\ &+ \left. 0.5v \sum_{i=1}^{Nnos} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right\} \delta T_i d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

como $\delta T_i \neq 0$ tem-se a Eq.(17),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} R(x, y) \delta R d\Omega &= \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^{s+1} N_i + 0.5u \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^{s+1} \frac{\partial N_i}{\partial x} + 0.5v \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^{s+1} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) + \left(-\frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^s N_i \right. \right. \\ &+ \left. \left. 0.5u \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^s \frac{\partial N_i}{\partial x} + 0.5v \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^s \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right\} \left\{ \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^{Nnos} N_i + 0.5u \sum_{i=1}^{Nnos} \frac{\partial N_i}{\partial x} + 0.5v \sum_{i=1}^{Nnos} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right\} d\Omega = 0. \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^{s+1} N_i + 0.5u \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^{s+1} \frac{\partial N_i}{\partial x} + 0.5v \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^{s+1} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \left(\frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^{Nnos} N_i + 0.5u \sum_{i=1}^{Nnos} \frac{\partial N_i}{\partial x} \right. \\ &+ \left. 0.5v \sum_{i=1}^{Nnos} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^s N_i + 0.5u \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^s \frac{\partial N_i}{\partial x} + 0.5v \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^s \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \left(\frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^{Nnos} N_i \right. \\ &+ \left. 0.5u \sum_{i=1}^{Nnos} \frac{\partial N_i}{\partial x} + 0.5v \sum_{i=1}^{Nnos} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Isola-se na Eq.(17) os valores T_i^s conhecidos, obtendo-se a Eq.(18),

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^{s+1} N_i + 0.5u \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^{s+1} \frac{\partial N_i}{\partial x} + 0.5v \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^{s+1} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \left(\frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^{Nnos} N_i + 0.5u \sum_{i=1}^{Nnos} \frac{\partial N_i}{\partial x} + 0.5v \sum_{i=1}^{Nnos} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^s N_i + 0.5u \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^s \frac{\partial N_i}{\partial x} + 0.5v \sum_{i=1}^{Nnos} T_i^s \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \left(\frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^{Nnos} N_i + 0.5u \sum_{i=1}^{Nnos} \frac{\partial N_i}{\partial x} + 0.5v \sum_{i=1}^{Nnos} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Omega. \quad (18)$$

Reorganizando a Eq.(18) obtem-se o sistema linear apresentado na Eq.(19),

$$[A]\{T^{s+1}\} = [b]\{T^s\} \quad (19)$$

onde

$$A_{i,j} = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\Delta t} N_i + 0.5u \frac{\partial N_i}{\partial x} + 0.5v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \left(\frac{1}{\Delta t} N_j + 0.5u \frac{\partial N_j}{\partial x} + 0.5v \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega \quad (20)$$

$$b_{i,j} = - \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{\Delta t} N_i + 0.5u \frac{\partial N_i}{\partial x} + 0.5v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \left(\frac{1}{\Delta t} N_j + 0.5u \frac{\partial N_j}{\partial x} + 0.5v \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\Omega \quad (21)$$

4. METODOLOGIA

Para a resolução da equação de convecção em regimes transiente e permanente via LSFEM, foi implementado um código em linguagem C. Para a discretização espacial foi utilizado elemento com 8 nós, o método de Crank-Nicolson foi utilizado para a discretização temporal, o método de Gauss-Legendre foi utilizado no cálculo das integrais. A resolução do sistema linear deu-se via método dos gradientes conjugados, pois a matriz resultante é simétrica, esparsa e definida positiva, resultado da aplicação do LSFEM. Para visualização dos resultados utilizou-se a função `contourf()` do Matlab.

5. RESULTADOS

Nesse estudo a solução da equação de convecção em regime permanente e transiente obtidas via LSFEM, foram obtidas a partir do código em linguagem C desenvolvido e comparadas. Para o caso transiente o passo de tempo foi igual a $\Delta t = 0.025$ s. Os resultados apresentados nas Fig. 2, Fig. 4 foram obtidas utilizando a função `contourf()` do Matlab.

5.1 Equação de Convecção em Regime Permanente

A equação diferencial para o problema de convecção em regime permanente é apresentada na Eq.(22),

$$u \frac{\partial T(x,y)}{\partial x} + v \frac{\partial T(x,y)}{\partial y} = 0. \quad (22)$$

As condições de contorno do tipo Dirichlet são dadas pelas Eq.(23),

$$\begin{aligned} T(0,y) &= 1^\circ\text{C} \\ T(x,0) &= 1^\circ\text{C} \\ T(1,y) &= 0^\circ\text{C} \\ T(x,1) &= 1^\circ\text{C} \end{aligned} \quad \text{com} \quad 0 \leq (x,y) \leq 1. \quad (23)$$

O campo de velocidade $\vec{U} = (u,v)$ é uniforme e faz um ângulo de 45° com as direções cartesianas, adotando-se $u = v = -2$ m/s, o domínio do problema é apresentado na Fig. 1.

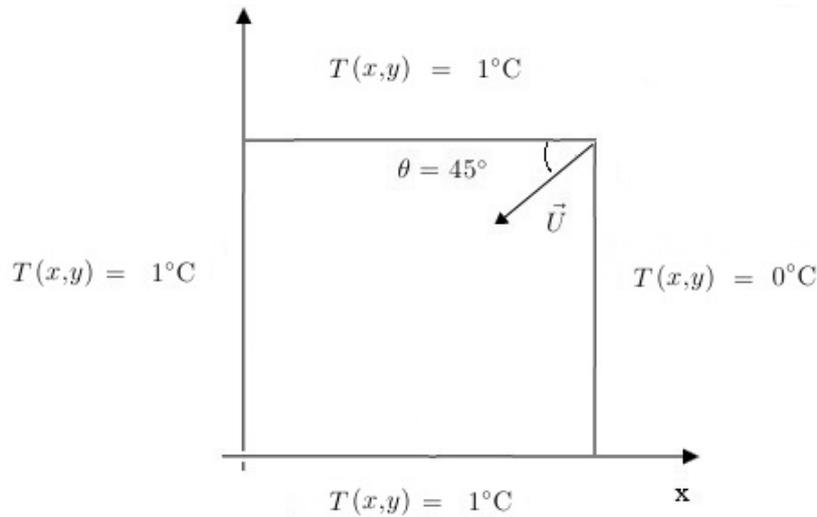


Figura 1. Domínio do Problema de Convecção em Regime Permanente - Eq.(22 - 23).

Para a obtenção da solução numérica o domínio foi discretizado utilizando-se 1600 elementos quadriláteros com 8 nós. A solução numérica obtida para esse caso é apresentada na Fig.2.

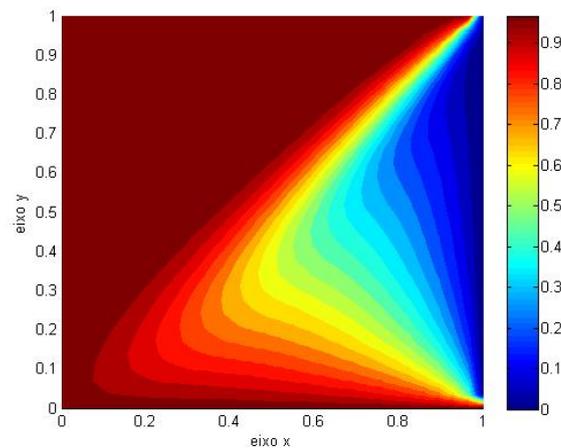


Figura 2. Solução Numérica do Problema de Convecção em Regime Permanente via LSFEM - Eq.(22 - 23).

Pode-se observar na Fig. 2 que o transporte de calor ocorre partir da condição de contorno $T(1, y)$ para a condição de contorno $T(x, 0)$ ocorrendo um resfriamento da superfície devido a convecção.

5.2 Equação de Convecção em Regime Transiente

A equação diferencial para o problema de convecção em regime transiente é apresentada na Eq.(24),

$$\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} + u \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x} + v \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} = 0. \quad (24)$$

As condições de contorno e condição inicial são dadas pela Eq. (25),

$$\begin{aligned} T(0, y, t) &= 1^\circ\text{C} \\ T(x, 0, t) &= 1^\circ\text{C} \\ T(1, y, t) &= 0^\circ\text{C} \\ T(x, 1, t) &= 1^\circ\text{C} \\ T(x, y, 0) &= 0^\circ\text{C} \quad \text{com} \quad 0 \leq (x, y) \leq 1. \end{aligned} \quad (25)$$

O campo de velocidade $\vec{U} = -(u, v)$ é uniforme e faz um ângulo de 45° com as direções cartesianas, adotando-se $u = v = -2$ m/s, o domínio do problema é apresentado na Fig. 3.

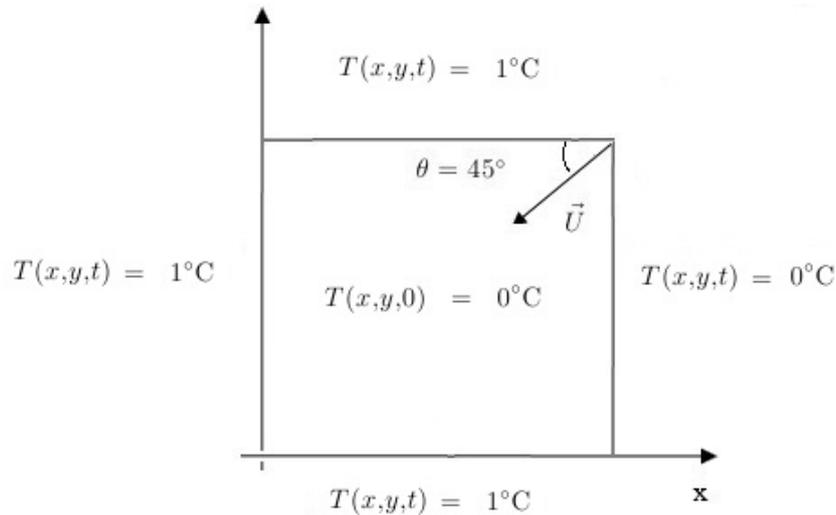


Figura 3. Domínio de Solução do Problema de Convecção em Regime Transiente - Eq.(24 - 25).

Para a obtenção da solução numérica o domínio foi discretizado utilizando-se 1600 elementos quadriláteros com 8 nós. Para a discretização temporal utilizou-se um passo de tempo $\Delta t = 0.025$ s. A solução numérica obtida para esse caso é apresentada na Fig. 4 onde o transporte de calor ocorre partir da condição de contorno $T(1, y, t)$ para a condição de contorno $T(x, 0, t)$ ocorrendo um resfriamento da superfície devido a convecção.

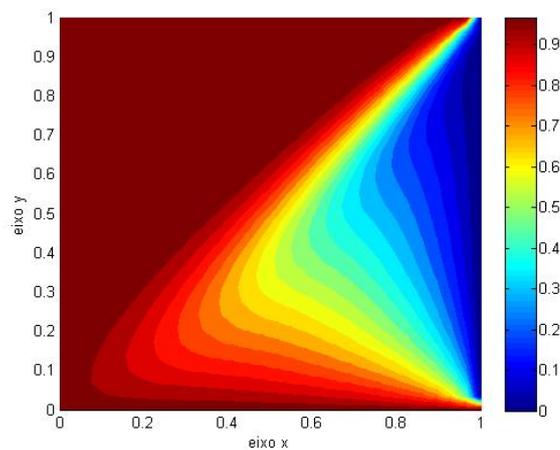


Figura 4. Solução Numérica do Problema de Convecção em Regime Transiente via LSFEM - Eq.(24 - 25).

A solução de um problema transiente tende a solução de um problema permanente quando $t \rightarrow \infty$. A solução é obtida marchando no tempo a partir de dados no instante inicial t_0 até ser alcançado no tempo final t_f . Na prática quando a variação da temperatura $T(x, y, t)$ em instantes sucessivos de tempo, t e $t + \Delta t$, se tornar desprezível, ou seja, $|T(x, y, t)^{t+\Delta t} - T(x, y, t)^t| \rightarrow 0$, conclui-se que foi atingido o estado permanente.

Para validação da solução transiente, Eq. (24 - 25), foi realizada a comparação entre uma linha desse caso e a solução do problema permanente, Eq. (22 - 23). Essa comparação pode ser observada na Fig. 5 e os valores são apresentados na Tab. 1.

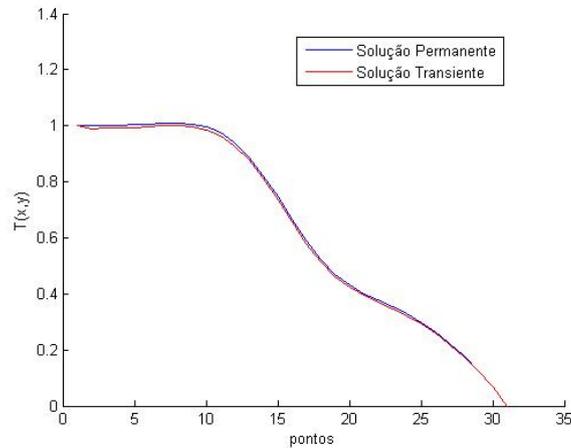


Figura 5. Comparação entre as Soluções Numéricas em Regime Permanente e Transiente.

Tabela 1. Solução Permanente (sol_{per}), Solução Transiente (sol_{trans}) e a Diferença Comparando-se uma Linha.

pontos	sol_{per}	sol_{trans}	$ sol_{per} - sol_{trans} $	pontos	sol_{per}	sol_{trans}	$ sol_{per} - sol_{trans} $
1	1,0000	1,0000	0,0000	17	0,5896	0,5797	0,0100
2	0,9999	0,9904	0,0095	18	0,5231	0,5136	0,0095
3	1,0002	0,9909	0,0093	19	0,4702	0,4612	0,0090
4	1,0012	0,9920	0,0092	20	0,4306	0,4222	0,0084
5	1,0031	0,9939	0,0091	21	0,4012	0,3934	0,0077
6	1,0058	0,9966	0,0092	22	0,3770	0,3699	0,0070
7	1,0085	0,9992	0,0093	23	0,3535	0,3472	0,0063
8	1,0097	1,0003	0,0094	24	0,3276	0,3220	0,0056
9	1,0068	0,9971	0,0097	25	0,2975	0,2927	0,0048
10	0,9963	0,9864	0,0099	26	0,2625	0,2585	0,0040
11	0,9747	0,9645	0,0102	27	0,2224	0,2191	0,0033
12	0,9390	0,9286	0,0104	28	0,1769	0,1743	0,0025
13	0,8878	0,8772	0,0106	29	0,1253	0,1236	0,0017
14	0,8222	0,8116	0,0106	30	0,0668	0,0659	0,0009
15	0,7462	0,7356	0,0105	31	0,0000	0,0000	0,0000
16	0,6661	0,6558	0,0103				

Observando a Fig. 5 e a Tab. 1 que com o passar do tempo a solução transiente atingiu o estado permanente, podemos perceber que as soluções apresentam valores próximos, pois a maior diferença entre elas é igual a $0,0106 \approx 1,06\%$. Logo podemos concluir que a solução transiente tende a solução permanente no decorrer do tempo.

6. CONCLUSÕES

- Baseado nos resultados obtidas para o caso de convecção permanente, conclui-se que o código em linguagem C implementado está correto, pois, os fenômenos físicos esperados são retratados.
- Os resultados obtidos para o caso da convecção transiente tendem a serem iguais a solução permanente com o decorrer do tempo como esperado.
- A maior diferença entre ambas as soluções foi igual a $1,06\%$.

7. AGRADECIMENTOS

Agradeço a CAPES(Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro.

8. REFERÊNCIAS

Bochev, P. e Gunzburger, M., 2006. Least-Squares Finite Element Methods. Proceedings on the International Congress of Mathematicians, p. 1137-1162, vol. 166.

Bon, N. J. The least - squares finite element method: theory and applications in computational fluid dynamics and electromagnetics. Springer, 1998. Camprub et al. 2000. Galerkin, least square and galerkin least square numerical approaches for convective diffusive transport problems. European congress on computational in applied science and engineering, p. 11–14.

Claro, Romão Estaner; Campos, Marcos Donizete; Moura, Luiz Felipe Mendes. 2011. Application of the Galerkin and Least-Squares Finite Element Methods in the solution of 3D Poisson and Helmholtz equations. Computers and Mathematics with Applications, p. 4288-4299, N. 62.

Dhatt, G., Touzot, G., Lefrançois E., Finite element method. Wiley, 1984.

Ferreira, Sabrina dos Santos. 2015. Estudo do Método dos Elementos Finitos de Mínimos Quadrados - LSFEM para Resolução da Equação de Convecção - Difusão Bidimensional. 2020. 95f. Dissertação (Mestrado)- Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil.

Ferreira, Sabrina dos Santos e Moura, Luiz Felipe Mendes. Least squares finite element method - LSFEM for resolution of equation convection diffusion two dimensional. Proceedings of the 25nd International Congress of Mechanical Engineering - COBEM 2019, Uberlândia, MG, Brazil.

Ferreira, Sabrina dos Santos e Moura, Luiz Felipe Mendes. Convection Diffusion Equation in Transiente Regime with Physical Properties Variable Temperature using Least squares finite element method - LSFEM. Proceedings of the 18nd Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering - ENCIT(2020),Online.

Perrreira, Vanessa D. 2005. Simulação numérica de escoamentos de fluidos pelo método de elementos finitos de mínimos quadrados. Universidade Estadual Paulista.2005.

9. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.