XXVI Congresso Nacional de Estudantes de Engenharia Mecânica,
CREEM 2019
19 a 23 de agosto de 2019, Ilhéus, BA, Brasil

CONTROLE NUMÉRICO DE UM SISTEMA *BALL AND BEAM* VIA ALOCAÇÃO DE POLOS

Luiz Felipe Gomes do Nascimento, luizfelipedeo98@gmail.com
Sanderson Manoel da Conceição, sandersonconceicao@ufgd.edu.br

Universidade Federal da Grande Dourados, Rodovia MS–270, Cidade Universitária, (Dourados – Itahum, km12- MS), CEP: 79807-970

Resumo. *O presente trabalho visa controlar a posição de uma bola sobre um determinado feixe por meio da técnica de alocação de polos. A modelagem matemática foi realizada com base nas equações de Lagrange, as quais foram fundamentais para a representação dinâmica do sistema estudado. Os resultados mostraram que, quanto mais afastados à esquerda estão os polos arbitrados, mais rápida é a resposta à referência utilizada (função degrau unitário). Ademais, o projeto via alocação de polos foi bem-sucedido em seu emprego, uma vez que gerou resultados satisfatórios.*

Palavras chave*: Ball and Beam. Modelagem Matemática. Controle de Sistemas. Alocação de polos*

1. INTRODUÇÃO

Nos mais diferentes campos da engenharia, os sistemas de controle têm um papel muito importante no que diz respeito a atingir objetivos pré-determinados. Nos navios atuais, por exemplo, sistemas elétricos, mecânicos e hidráulicos, em conjunto, geram comandos de leme a fim de direcionar o navio para a posição pretendida (Nise, 2013). Até mesmo o corpo humano possui sistemas de controle. O fígado, por exemplo, controla a transformação da glicose ingerida em glicogênio (Cox, Lehninger e Nelson, 2014).

A estabilidade é o principal objetivo a ser atingido em um sistema de controle. Uma vez que ela é atingida, podem-se estabelecer requisitos de desempenho a serem cumpridos. A maioria das técnicas de controle moderno são dependentes de um modelo matemático, os quais podem assumir diferentes aspectos e, dependendendo de um sistema e das circunstâncias particulares, um modelo pode ser mais conveniente que outro.

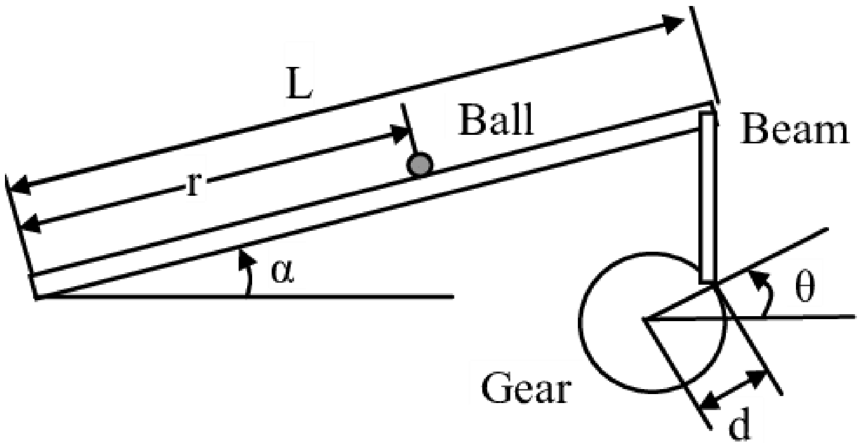
A técnica de alocação de polos é muito eficiente para garantir a estabilidade de sistemas instáveis. Essa técnica permite alocar polos que estão do lado direito (região instável) do plano complexo para o lado esquerdo (região estável), em posições previamente estabelecidas, permitindo que o sistema responda conforme as especificações de desempenho.

O objetivo do atual trabalho é modelar e projetar um controle para um sistema do tipo *ball and beam*. A técnica de controle utilizada foi a alocação de polos, que foi eficaz em manter a bola em uma posição pré-estabelecida.

2.MODELAGEM DO SISTEMA *BALL AND BEAM*

A seguir, segue uma imagem ilustrativa do presente trabalho.

Figura 1. Imagem ilustrativa do sistema *ball and beam* estudado neste artigo, retirada de LV, *et al*., 2011



Para determinar a equação que descreve o movimento da bola, utilizaram-se as equações de Lagrange. Na modelagem, o efeito do atrito entre a bola e o feixe foi desconsiderado. As equações de Lagrange, para um sistema de n graus de liberdade, têm a seguinte forma (RAO,2009).:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j^{(n)} \tag{1}$$

Em que $\dot{q}_J = \frac{\partial q_j}{\partial t}$ é a velocidade generalizada e $Q_j^{(n)}$ é a força generalizada não-conservativa correspondente à coordenada generalizada q_j(esse termo, neste trabalho, é nulo, uma vez que não está sendo considerada qualquer força de caráter dissipativo). Os termos T e V representam, respectivamente, as energias cinética e gravitacional da bola. Assim, temos:

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{r})^2 + \frac{1}{2} J(\dot{\alpha})^2 \tag{2}$$

$$V = mg\, sen\, \alpha\, r \tag{3}$$

Substituindo as Eq. (2) e Eq. (3) na Eq. (1), obtém-se a seguinte equação de movimento:

$$\left(\frac{J}{R^2} + m\right)\ddot{r} + mg\, sen\, \alpha - mr\dot{\alpha}^2 = 0 \tag{4}$$

A linearização dessa equação sobre o ângulo do feixe $\alpha = 0$ nos dá a seguinte aproximação linear do sistema:

$$\left(\frac{J}{R^2} + m\right)\ddot{r} + mg\, sen\, \alpha = 0 \tag{5}$$

Considerando pequenas variações para o ângulo α, temos que sen $\alpha \cong \alpha$. Desse modo, temos:

$$\left(\frac{J}{R^2} + m\right)\ddot{r} + mg\alpha = 0 \tag{6}$$

A seguir, a Tab. 1 mostra os valores supostos para os parâmetros do presente trabalho:

Tabela 1. Valores dos parâmetros utilizados neste trabalho, acompanhados de suas respectivas unidades

Parâmetros	Valor	Unidade de medida (SI)
Massa da bola (m)	0,11	kg
Raio da bola (R)	0,015	m
Deslocamento do braço de alavanca (d)	0,03	m
Aceleração da gravidade (g)	9,81	m/s^2
Comprimento da viga (L)	1	m
Momento de inércia da bola (J)	$9{,}99 \times 10^{-6}$	$kg.m^2$

2.1 Representação em espaço de estados

Com a equação diferencial que descreve o sistema em questão (Eq.(6)), uma mudança de variáveis foi feita, de modo a representar o sistema em uma representação de espaço de estados. A representação por espaço de estados permite o acesso a todas variáveis do sistema (Dorf e Bishop, 2015).

As variáveis de estados que serão levadas em consideração neste trabalho são as seguintes: posição e velocidade da bola bem como posição e velocidade angulares da barra, na seguinte ordem:
Posição da bola = r
Velocidade da bola = $\dot{r}$
Posição angular = α
Velocidade angular = $\dot{\alpha}$

A representação geral em espaço de estados tem a seguinte forma:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{y=Cx+Du} \tag{8}$$

Em que
A é a matriz de estado ou matriz dinâmica
B é a matriz de entrada
C é a matriz de saída
D é a matriz de transmissão direta (considera os efeitos dos ruídos)
x é o vetor de estado
y é vetor de saída
u é a força externa

Para o presente caso, a representação em espaço de estados tem o seguinte formato:

$$\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \ddot{r} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-mg}{\left(\frac{J}{R^2}+m\right)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \alpha \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{9}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \alpha \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Em que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-mg}{\left(\frac{J}{R^2}+m\right)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

3. PROJETO VIA ALOCAÇÃO DE POLOS PARA SERVOSSISTEMAS

O projeto de servossistemas consiste, basicamente, em controlar a posição de determinado objeto de estudo, que é exatamente o objetivo deste trabalho. Para alocar um estado inicial para um estado final desejado, o sistema em questão deve ser completamente controlável (Ogata, 2010). Uma maneira de verificar se o sistema é completamente controlável é a partir do posto da matriz de controlabilidade: se o posto da matriz de controlabilidade for igual à ordem da matriz de controlabilidade, então o sistema é de estado completamente controlável. O posto de uma matriz é, por definição, o número de filas (linhas ou colunas) linearmente independentes. A matriz de controlabilidade, de ordem n , é definida por:

$$\boldsymbol{C_M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{A^2B} & \dots & \boldsymbol{A^{n-1}B} \end{bmatrix} \tag{11}$$

Dessa forma, considerando os valores da Tab. 1, a matriz de controlabilidade fica da seguinte forma:

$$\mathbf{C_M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Após uma análise, conclui-se que o posto dessa matriz é 4. Dado que o posto é igual à ordem da matriz, o sistema é de estados completamente controláveis.

3.1 Determinação da matriz de ganho K

No presente trabalho, a matriz de ganho **K** será obtida por meio do método da substituição direta. Considerando que o sistema é de estado completamente controlável, existe uma matriz **K** tal que:

$$|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}| = (s-\mu_1)\,(s-\mu_2)\,(s-\mu_3)\,(s-\mu_4) \tag{12}$$

Em que μ_1, μ_2, μ_3 e μ_4 são os polos arbitrários escolhidos. Assim, tem-se:

$$\left| s\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&-7&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & k_3 & k_4\end{bmatrix} \right| = (s-\mu_1)(s-\mu_2)(s-\mu_3)(s-\mu_4) \tag{13}$$

Como ambos os lados da equação característica são polinômios em s, igualando os coeficientes de mesma potência em s, é possível determinar os valores para k_1, k_2, k_3 e k_4. Quando a ordem da matriz de controlabilidade for maior ou igual a 4 ($n \geq 4$), o algebrismo para encontrar **K** torna-se muito tedioso (Ogata,2010); dessa forma, utilizou-se o software Scilab, a partir do comando *ppol*, para realizar todas as iterações necessárias para encontrar a matriz de ganho **K**.

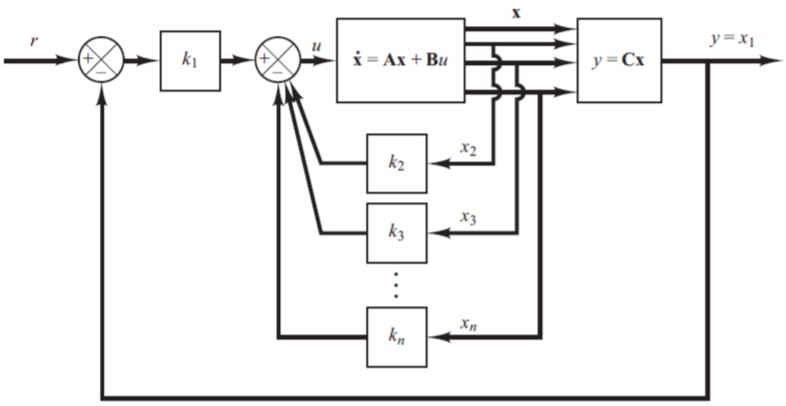
Vale frisar que o comando *ppol* iguala os coeficientes de mesma potência da equação característica com realimentação com a equação do polimônio dos polos arbitrados e, então, encontra a matriz **K.**

Considerando o presente projeto como uma planta que possui um integrador, é possível escolher a saída igual a uma das variáveis de estado. Foi considerada, neste trabalho, a saída $y = r$, que é a posição da bola sobre o feixe. Nesta análise, o sinal de referência considerado foi a função degrau. No presente sistema, utilizou-se o seguinte esquema de controle por realimentação de estado:

$$u = -[0\ k_2\ k_3 \dots k_n]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix} + k_1(r-x_1) = -\mathbf{Kx} + k_1 r \tag{14}$$

A figura 2 mostra uma configuração geral de servossistemas quando a planta possuiu um integrador.

Figura 2. Configuração geral de servossistemas considerando que a planta possuiu um integrador (Ogata, 2010)



Substituindo a Eq.(14) na Eq.(7), tem-se

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK})\boldsymbol{x} + k_1 r \tag{15}$$

e

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Cx} + \boldsymbol{Du} \tag{16}$$

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES DAS SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Antes de partir para a análise de resultados e discussões, é necessário especificar os requisitos de desempenho que servirão como critério avaliativo para as análises dos resultados. São eles:

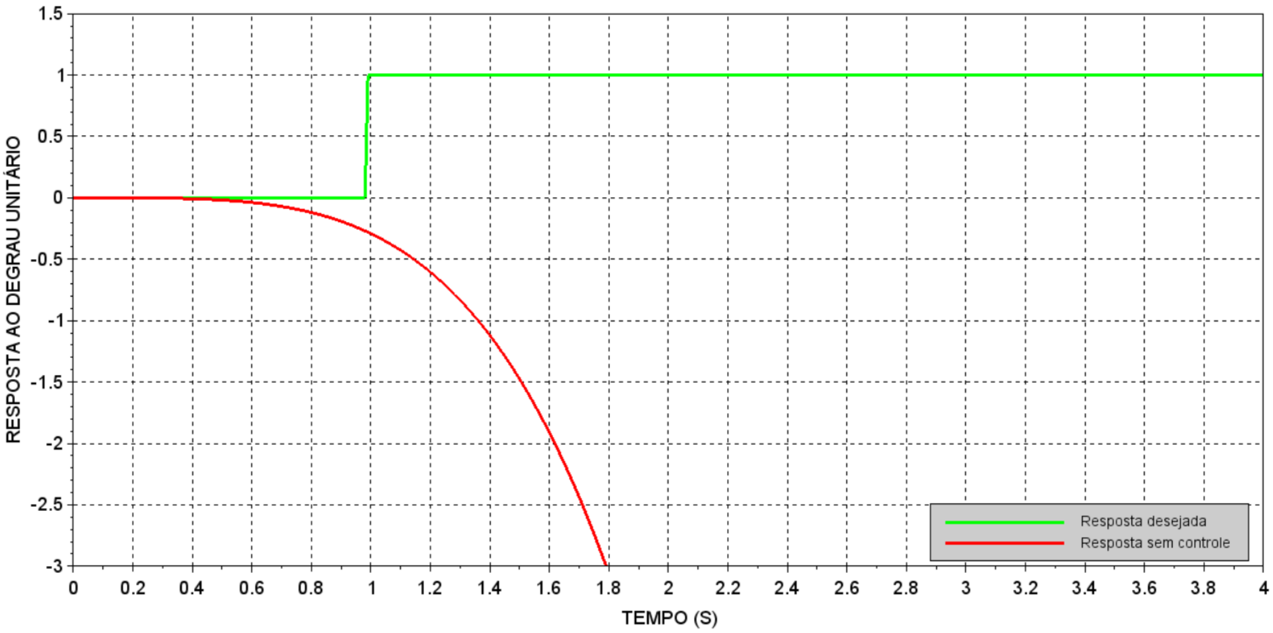
- Máximo sobressinal inferior a 5%
- Tempo de acomodação inferior a 3 segundos

De acordo com Ogata (2010), esses parâmetros têm a seguinte definição:
Máximo sobressinal: máximo valor atingido pela curva de resposta do sistema, medido a partir da unidade.

Tempo de acomodação: tempo necessário para que a curva de resposta alcance valores em uma faixa (normalmente de 2% a 5%) do valor final, aí permanecendo indefinidamente.

A Fig. 3 mostra a resposta do sistema sem controle.

Figura 3. Resposta sem controle do sistema estudado



A partir da Fig. 3, fica claro que o sistema é instável em malha aberta; com isso, a bola rolaria para fora do feixe. Portanto, faz-se necessária a ação de algum método para controlar a posição da bola sobre o feixe.

A fim de encontrar polos que satisfaçam os requisitos de desempenho estipulados e que também tenham uma resposta agradável com relação à função degrau unitário, foram arbitrados os seguintes polos:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -1+3i \\ \mu_2 &= -1-3i \\ \mu_3 &= -2+2i \\ \mu_4 &= -2-2i \end{aligned} \tag{17}$$

A matriz de ganho **K**, de acordo com a Eq. (13), é:

K=[-11,416922 -7,9918451 26 6]

Substituindo-a na Eq. (15), tem-se:

$$\mathbf{A-BK}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11,416922 & -7,9918451 & 26 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 11,416922 & 7,9918451 & -26 & -6 \end{bmatrix}$$

Assim, a equação de estado do sistema projetado é:

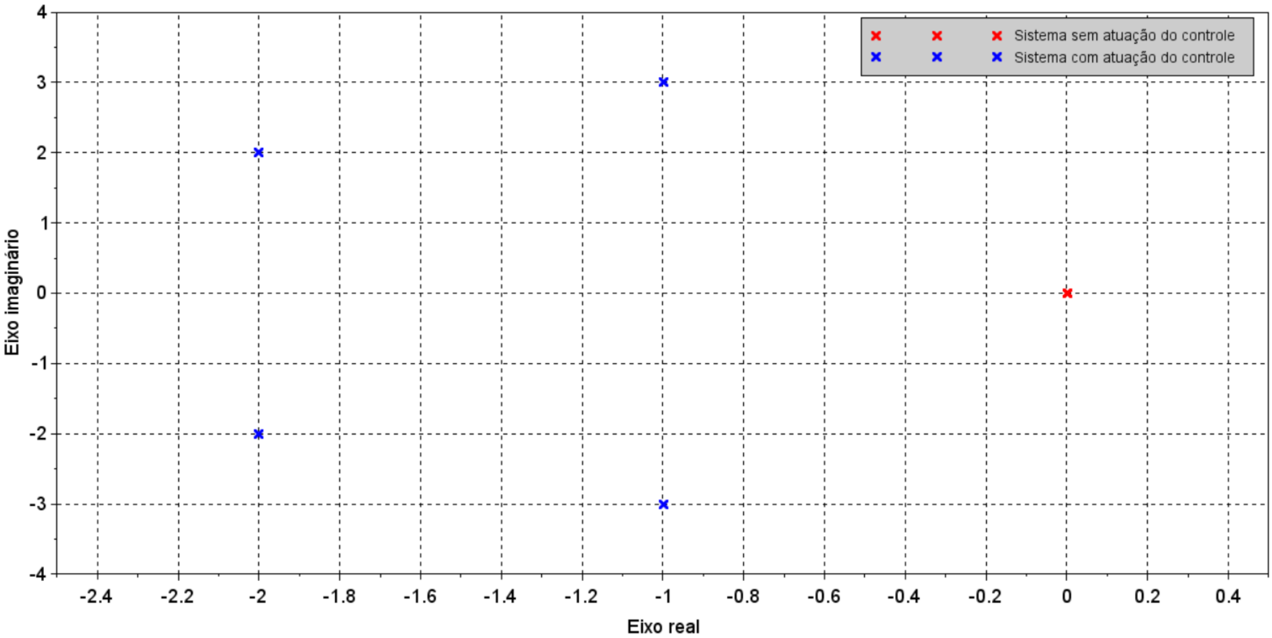
$$\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \ddot{r} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 11,416922 & 7,9918451 & -26 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -11,416922 \end{bmatrix} r \tag{18}$$

E, por fim, a equação de saída, a partir da Eq. (16), é

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r\\ \dot{r}\\ \alpha\\ \dot{\alpha}\end{bmatrix} \tag{19}$$

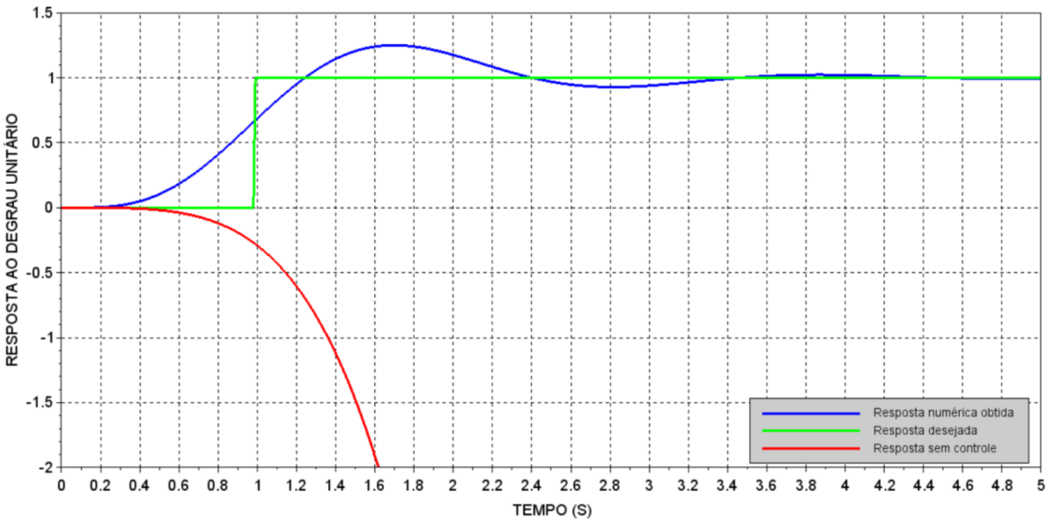
O gráfico mostrando a localização dos polos do sistema antes e após a ação do controle, considerando os polos em (17), é mostrado a seguir:

Figura 4. Gráfico dos polos considerados em (18)



A figura 5 mostra a resposta ao degrau unitário, considerando os polos da Fig. 4 e as Eq. (18) e Eq. (19).

Figura 5. Resposta ao degrau unitário considerando os polos representados na Fig.4



Fazendo-se uma análise na Fig. 5, vê-se que a resposta ao degrau unitário foi atingida. Os requisitos de desempenho, todavia, não foram atingidos. Primeiramente, o máximo sobressinal, pela Fig, 5, ficou em torno de 25%, que é superior ao valor exigido no início. Além disso, o tempo de acomodação também não foi cumprido, uma vez que, pela figura Fig. 5, o tempo de acomodação ficou em torno de 3,5 segundos, que também é superior ao valor estipulado no início.

Deve-se, então, supor outros polos. Os novos seguintes polos foram arbitrados:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= -5+2i \\ \mu_2 &= -5-2i \\ \mu_3 &= -4+3i \\ \mu_4 &= -4-3i \end{aligned} \tag{20}$$

A matriz de ganho **K,** de acordo com a Eq. (13), é

K= [-103,46585 -68,786952 134 18]

Substituindo-a na Eq. (15), tem-se que

$$\mathbf{A\text{-}BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [-103,46585 \quad -68,786952 \quad 134 \quad 18] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 103,46585 & 68,786952 & -134 & -18 \end{bmatrix}$$

Assim, a equação de estado do sistema projetado é:

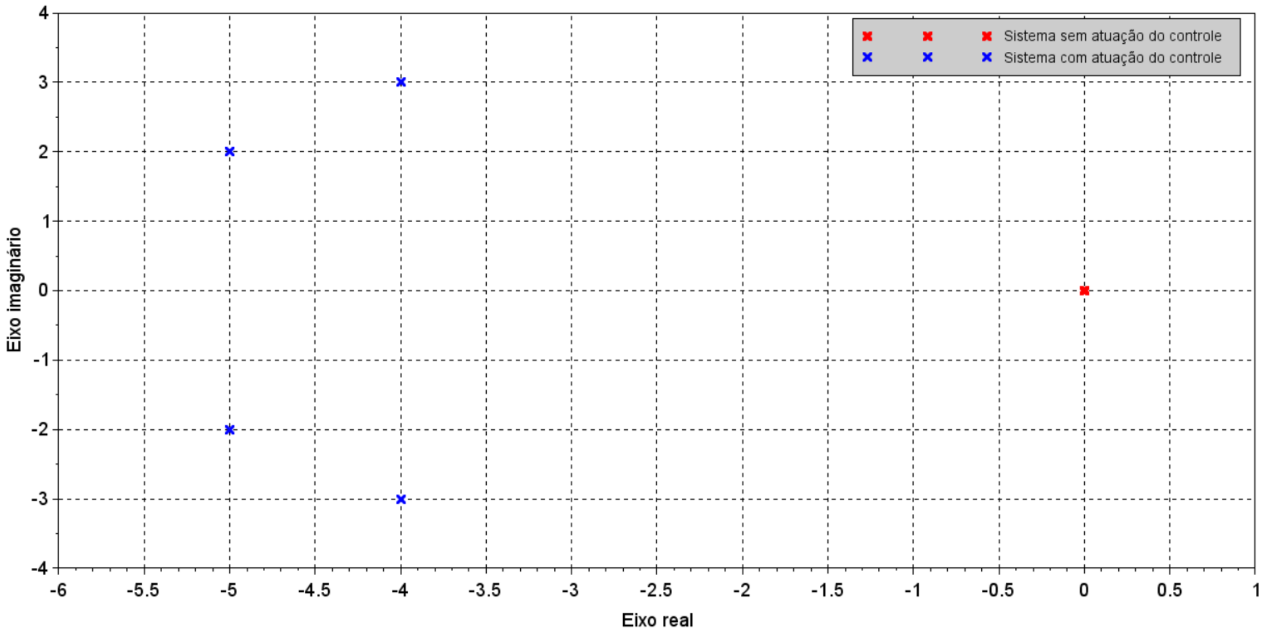
$$\begin{bmatrix} \dot{r} \\ \ddot{r} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 103,46585 & 68,786952 & -134 & -18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -103,46585 \end{bmatrix} r \tag{21}$$

E, por fim, a equação de saída, a partir da Eq. (16), é

$$\mathbf{y} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \alpha \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \tag{22}$$

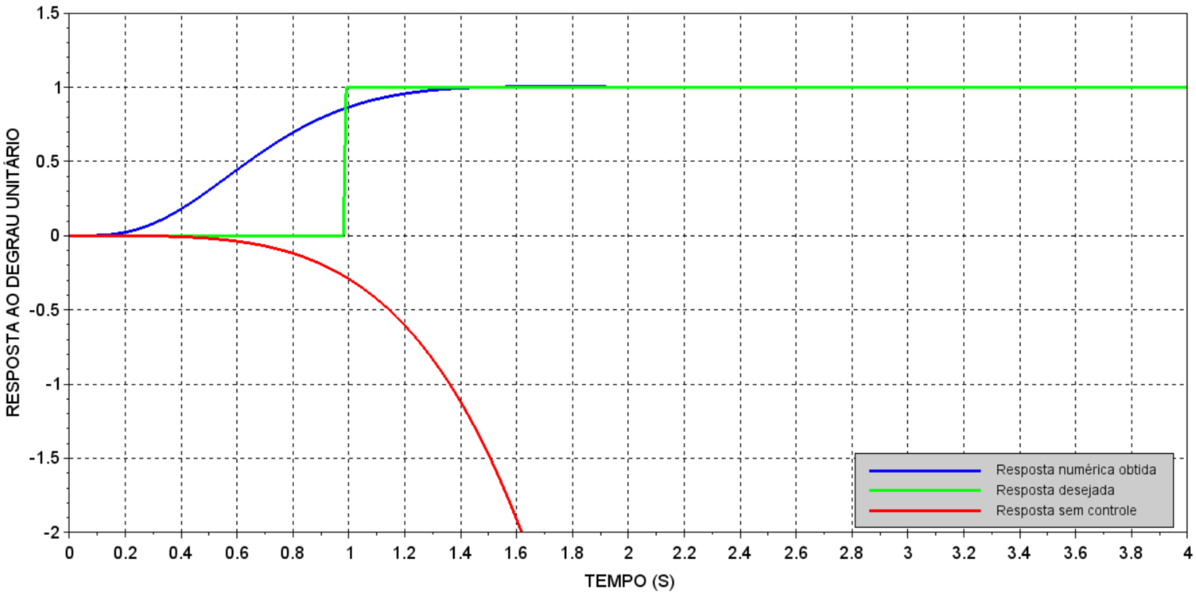
O gráfico dos polos dados em (20) é mostrado a seguir:

Figura 6. Gráfico dos polos considerados em (20)



Agora, a resposta ao degrau unitário, de acordo com os polos da Fig. (6) e com as Eq. (21) e Eq. (22), é a seguinte:

Figura 7. Resposta ao degrau unitário considerando os polos representados na Fig. 6



O tempo de acomodação, pela Fig. 7, está em torno de 1,4 segundo. Esse valor está conforme o requisito inicial. Percebe-se, ainda, pela Fig. 7, que o máximo sobressinal está em torno de 3%, o que também está de acordo com a consideração inicial.

5. CONCLUSÃO

De acordo com os resultados mostrados, o projeto de alocação de polos foi bem-sucedido, uma vez que a posição da bola foi controlada de acordo com a referência (função degrau unitário). Verificou-se que, quanto mais afastados à esquerda do plano imaginário estão os polos arbitrados, mais rápida é a resposta. Isso é devido ao termo real do polo, pois quanto maior é o seu valor, mais amortecimento ele adiciona ao sistema, fazendo com que a resposta seja mais rápida. É importante ressaltar que no sistema físico, para se ter uma resposta mais rápida, é necessário ter um motor mais potente, o qual fornecerá mais tensão ao sistema.

Pretende-se, num futuro próximo, fazer o aparato experimental do presente projeto, bem como ensaios experimentais e compará-los com as simulações numéricas obtidas neste trabalho. Tal aparato será projetado a fim de obter a melhor relação custo e desempenho do controlador.

6. REFERÊNCIAS

Dorf, Richard C., Bishop, Robert H., Sistemas de Controle Modernos, Rio de Janeiro, LTC, 2015.
Lehninger, A. L, Nelson, D. L, Cox, M. M, Princípios de Bioquímica. São Paulo, Sarvier, 2014.
LV, Xiao Hu et al. Design of ball-beam control system based on Machine vision. In: Applied mechanics and materials. Trans Tech Publications, 2011. p. 4219-4225.
Nise, Norman S, Engenharia de Sistemas de Controle, Rio de Janeiro, LTC, 2013.
Ogata, Katsuhiko, Engenharia de Controle Moderno, São Paulo, Person Prentice Hall, 2010.
Rao, Singiresu S., Vibrações Mecânicas, São Paulo, Pearson Prentice Hall, 2008.

7. RESPONSABILIDADE PELAS INFORMAÇÕES

Os autores são os únicos responsáveis pelas informações incluídas neste trabalho.