

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE POWELL PARA DETERMINAÇÃO DA DEFLEXÃO E ROTAÇÃO MÁXIMA DE UMA VIGA DE EULER-BERNOULLI

D.P. SANTOS¹, dpdsantos.3l@gmail.com

F.R. CHAVARETTE¹, e-mail¹

¹ Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - UNESP, SP, Brasil,

Resumo: O trabalho do profissional que atua nas diferentes áreas da engenharia resume-se na incessante busca pelo aumento da produtividade e rendimento, e pela redução do impacto das restrições como, consumo, custo, peso sobre os sistemas. Contudo, a solução de problemas de engenharia na sua forma analítica e exata só é possível para sistemas muito simples, desta forma, sistemas mais complexos, que geralmente possuem várias soluções, faz-se necessário optar por procedimentos de aproximação numérica com precisão aceitável e métodos de otimização para determinar a melhor solução dentre as existentes. Neste estudo apresenta-se a modelagem de uma viga cúbica com extremidade em balanço modelada como um único elemento finito para obtenção da energia potencial total a ser minimizada pelo Método das Direções Conjugadas de Powell com o intuito de obter a deflexão e rotação máxima da extremidade livre.

Palavras-chave: Elementos Finitos, Otimização, Método de Powell.

1. INTRODUÇÃO

Mediante os desafios cotidianos no âmbito da engenharia, faz-se necessário o uso de um ferramental matemático adequado para auxiliar o engenheiro nestas tarefas, muitas vezes matematicamente árdua. Deste modo, estes ferramentais caracterizam-se em procedimentos de aproximação numérica com precisão aceitável e métodos de otimização para determinar a melhor solução dentre as existentes^{(6) (8) (9)}.

Neste trabalho a utilização do método de Powell visa demonstrar uma perspectiva diferente na aplicação dos métodos de otimização, onde o objetivo transcende a otimização de natureza geométrica e passa a ser a minimização e/ou maximização de outros parâmetros, como deflexão, resistência, rotação, de um sistema com forma determinada. Portanto com o auxílio do Método dos Elementos Finitos pretende-se demonstrar uma forma alternativa de construir a função objetivo a ser minimizada pelo Método das Direções Conjugadas de Powell para determinar a deflexão e rotação máxima da extremidade livre de uma viga modelada como um único elemento finito.

2. OTIMIZAÇÃO

Otimização consiste em encontrar uma solução ou um conjunto de soluções ótimas para uma determinada função ou conjunto de funções. À medida que o número de funções e o número de variáveis aumentam a dificuldade em se determinar o conjunto de soluções ótimas também aumenta^{(3) (5) (8)}.

É neste contexto que surge a necessidade de desenvolver técnicas matemáticas e computacionais que refinem o processo de otimização, dado que este é amplamente utilizado para resolver problemas de engenharia.

Os algoritmos numéricos para solução de problemas de otimização são essencialmente classificados em métodos de programação matemática e métodos probabilísticos. Os métodos de programação matemática são classificados em métodos de programação linear, programação não-linear e métodos baseados em teoria de aproximações como programação linear sequencial e programação quadrática sequencial. Por sua vez, os métodos de programação não-linear são classificados em métodos para solução de problemas de otimização sem restrição e com restrição⁽⁹⁾.

A diferença essencial dos métodos de programação matemática para os métodos probabilísticos é que os últimos procuram encontrar o mínimo global do problema de otimização evitando os mínimos locais. Já os métodos de programação matemática fornecem um mínimo local.

2.1. PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO NÃO-LINEARES SEM RESTRIÇÃO.

Nessa sessão são descritos problemas em que a função objetivo e restrições não são lineares em relação às variáveis de projeto. A solução para estes problemas estão divididos em métodos para a solução de problemas sem restrição e com restrição.

Basicamente existem duas razões para estudar métodos para solução de problemas sem restrições. Primeiro porque os métodos para a solução de problemas com restrições baseiam-se nos métodos para a solução de problemas sem restrições; segundo porque existem métodos que convertem o problema com restrição num problema sem restrição para depois resolvê-lo^{(3) (5)}.

Nos métodos de solução irrestritos a cada iteração procura-se inicialmente encontrar uma direção (s_0) a seguir que reduza a função objetivo. Uma vez obtida essa direção, decidem o quanto "andar" nessa direção (α). Através desse procedimento, a cada passo, um problema de encontrar n variáveis (x) é reduzido a um problema de encontrar uma variável (α), como descrito na Eq. (1).

$$x = x_0 + \alpha s_0 \Rightarrow f(x) = f(x_0 + \alpha s_0) = f(\alpha) \quad (1)$$

Sendo x_0 o ponto inicial. O problema de encontrar α pode ser resolvido agora usando técnicas de minimização de uma função com uma variável que são de aplicação mais simples. Essa etapa é denominada busca unidimensional e quando a direção s coincide com a direção de um dos eixos coordenados é denominada busca univariada.

3. DEFLEXÃO TRANSVERSAL EM VIGAS

Existem dois modelos principais de vigas, Euler-Bernoulli e Timoshenko. O modelo de Timoshenko considera que as seções transversais planas permanecem planas, mas não necessariamente perpendiculares ao eixo longitudinal da viga⁽⁷⁾.

Já o modelo Euler-Bernoulli considera que as seções transversais mantêm-se planas e normais ao eixo da barra após a deformação, ou seja, não é considerada a deformação devida ao corte⁽²⁾.

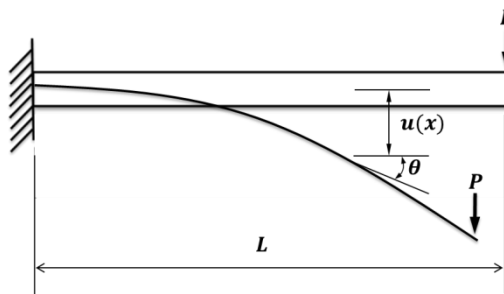


Figura 1. Deflexão de uma viga em balanço.

Tendo como referência a Fig. 1, pode-se observar que devido ao carregamento concentrado P forma uma curvatura, no qual a porção superior fica tracionada e a porção inferior fica comprimida. A intensidade da curvatura desenvolvida em uma dada seção transversal depende diretamente do momento atuante na seção⁽¹⁾.

Para cada ponto na coordenada x o deslocamento em y é dada por $u(x)$. Assim a inclinação da viga, ponto a ponto, dá-se pela derivada de $u(x)$ e a curvatura da viga, também ponto a ponto, pode ser calculada pela derivada segunda de $u(x)$.

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = \tan \theta \quad (2)$$

$$u''(x) = \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{\rho} \quad (3)$$

A lei de Euler-Bernoulli afirma que o momento fletor M é inversamente proporcional ao raio de curvatura ρ da curva produzida pela ação do carregamento, onde E é o módulo de elasticidade longitudinal do material e I o momento de inércia da seção transversal em relação à linha neutra.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (4)$$

4. PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL

Para a construção deste trabalho foi realizada aplicação dos métodos estudados por meio de um algoritmo computacional com o intuito de determinar a deflexão e rotação máxima da extremidade livre de uma viga modelada

como um único elemento finito conforme esquematizado na Fig. 2. A viga foi assumida ser feita de aço com comprimento $L = 10[m]$, módulo de elasticidade $E = 210 [GPa]$, a seção transversal da viga é quadrada com $b = 0,5 [m]$, $h = 0,5 [m]$ e momento de inércia $I = 5,2083 \times 10^{-3} [m^4]$. Por fim uma carga concentrada $P = 5 [kN]$ na extremidade em balanço.

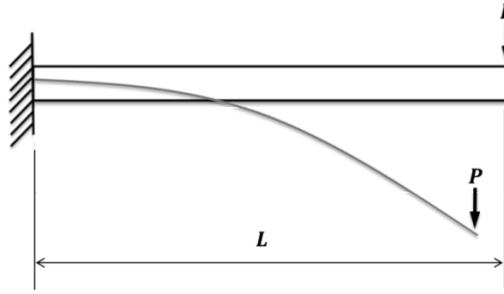


Figura 2. Viga carregada com extremidade em balanço.

A utilização do Método dos Elementos Finitos faz-se necessário para o processo de modelagem do sistema e equacionamento da energia potencial total da viga. A Fig. 3 mostra o esquema de um elemento de viga com dois nós e quatro graus de liberdade.



Figura 3: Elemento de viga com dois nós.

Assim fica claro que a função objetivo a ser obtida será uma função com múltiplas variáveis, é neste contexto que surge a necessidade de aplicação do Método das Direções Conjugadas de Powell que sugere um método conveniente de otimização sem restrição que gera direções conjugadas linearmente independentes, ao passo que a função a ser minimizada é aproximada localmente por uma função quadrática^{(6) (9)}.

O algoritmo de Powell é descrito abaixo:

1. Minimize f ao longo das direções coordenadas (busca univariada), iniciando em x_0^k e gerando os pontos $x_1^k, \dots, x_m^k$ onde k é o número da iteração;
2. Após encerrar a busca univariada encontre o índice m correspondente à direção em que a função f apresenta o maior decréscimo indo de x_{m-1}^k para x_m^k ;
3. Calcule a direção “padrão” (soma de todos os movimentos univariados) e determine o valor de α que minimize f tal que: $x = x_0^k + \alpha s_p^k$;
4. Se $|\alpha| < \left[\frac{f(x_0^k) - f(x_0^{k+1})}{f(x_{m-1}^k) - f(x_m^k)} \right]^{\frac{1}{2}}$ então utilize as mesmas direções para a próxima busca univariada. Se a equação não for satisfeita, então substitua a m -ésima direção pela direção padrão s_k^p ;
5. Comece a nova busca univariada com as direções obtidas no passo 4, e repita os passos 2, 3, e 4 até que a convergência seja atingida, ou seja: $\|x_0^{k+1} - x_0^k\| \leq \varepsilon$.

5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A aplicação do MEF para o trecho de viga de comprimento L foi iniciada escrevendo uma função aproximadora polinomial de terceiro grau, onde, o número de termos é igual ao número de graus de liberdade $(u_1, \theta_1, u_2, \theta_2)$.

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \quad (5)$$

De acordo com a Eq. (5) é possível obter os pontos nodais.

$$\begin{aligned}
 u(0) &= u_1 = a_1 \\
 \frac{du(0)}{dx} &= \theta_1 = a_2 \\
 u(L) &= u_2 = a_1 + a_2 L + a_3 L^2 + a_4 L^3 \\
 \frac{du(L)}{dx} &= \theta_2 = a_2 + 2a_3 L + 3a_4 L^2
 \end{aligned} \tag{6}$$

Solucionando o sistema de equações acima em função de a_i ($i = 1, \dots, 4$).

$$\begin{aligned}
 u(0) &= u_1 = a_1 \\
 \frac{du(0)}{dx} &= \theta_1 = a_2 \\
 u(L) &= u_2 = a_1 + a_2 L + a_3 L^2 + a_4 L^3 \\
 \frac{du(L)}{dx} &= \theta_2 = a_2 + 2a_3 L + 3a_4 L^2
 \end{aligned} \tag{7}$$

Agora, substituindo os valores de a_i na, Eq. (5), obtém-se a equação do deslocamento transversal no eixo y .

$$u(x) = u_1 + \theta_1 x + \left[-\frac{3u_1}{L^2} - \frac{2\theta_1}{L} + \frac{3u_2}{L^2} - \frac{\theta_2}{L} \right] x^2 + \left[\frac{2u_1}{L^3} + \frac{\theta_1}{L^2} - \frac{2u_2}{L^3} + \frac{\theta_2}{L^2} \right] x^3 \tag{8}$$

Simplificando a Eq. (8) para colocar em evidencia os deslocamentos nodais, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \frac{1}{L^3} (2x^3 - 3x^2 L + L^3) u_1 + \frac{1}{L^3} (x^3 L - 2x^2 L^2 + x L^3) \theta_1 + \frac{1}{L^3} (-2x^3 + 3x^2 L) u_2 \\
 &\quad + \frac{1}{L^3} (x^3 L - x^2 L^2) \theta_2
 \end{aligned} \tag{9}$$

Desta forma, o deslocamento transversal pode ser expresso matricialmente pela Eq. (10) onde $[N]$ são as funções de forma da viga e $\{d^e\}$ vetor dos deslocamentos nodais⁽¹⁰⁾.

$$u(x) = [N] \{d^e\} \tag{10}$$

$$u(x) = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{L^3} (2x^3 - 3x^2 L + L^3) \\
 N_2 &= \frac{1}{L^3} (x^3 L - 2x^2 L^2 + x L^3) \\
 N_3 &= \frac{1}{L^3} (-2x^3 + 3x^2 L) \\
 N_4 &= \frac{1}{L^3} (x^3 L - x^2 L^2)
 \end{aligned} \tag{12}$$

De acordo com o Princípio da Mínima Energia Potencial Total, a expressão para a energia de deformação de uma viga, levando em consideração que deve satisfazer as condições de uma viga de Euler-Bernoulli, que considera que as seções transversais retas permanecem planas e normais à tangente ao eixo fletido da viga, pode ser expressa como^{(1) (2) (4)}:

$$\Pi = W_{int} - W_{ext} \tag{13}$$

$$\Pi = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right)^2 dx + P u_2 \tag{14}$$

Como a viga foi considerada engastada em $x = 0$, os deslocamentos nodais no ponto 1 são nulos, ou seja, $u_1 = 0$ e $\theta_1 = 0$. Assim, inserindo a Eq. (9) na Eq. (14).

$$\Pi = \frac{EI}{2L^3}(12u_2^2 + 4\theta_2^2 L^2 - 12u_2\theta_2 L) + Pu_2 \quad (15)$$

Agora, realizando um rearranjo, onde: $f = 2\Pi L^3/EI$; $x_1 = u_2$; $x_2 = \theta_2 L$ e $(2PL^3)/EI = 9142.8571 \times 10^{-6}$ (constante), o problema inicial de elementos finitos agora passa a ser um problema de minimização da seguinte função.

$$f = 12x_1^2 + 4x_2^2 - 12x_1x_2 + 9142.8571 \times 10^{-6}x_1 \quad (16)$$

Neste caso será utilizado o Método das Direções Conjugadas de Powell na solução do problema e para efeito de comparação o resultado analítico exato pode ser calculado diferenciando a função objetivo em relação x_1 e x_2 , como mostrado abaixo.

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx_1} &= -12x_2 + 24x_1 + 9142.8571 \times 10^{-6} \\ \frac{df}{dx_2} &= 8x_2 - 12x_1 \end{aligned} \quad (17)$$

Resolvendo o sistema da Eq. (17) tem-se que os valores ótimos são $x_1^* = -0,0015$ e $x_2^* = -0,0023$.

Agora, para iniciar as iterações do método de Powell, foram utilizados os seguintes parâmetros iniciais: ponto inicial $x_0^1 = [-1/2 \quad -1/2]^T$ e direção coordenadas $s_1^1 = [1 \quad 0]^T$ e $s_2^1 = [0 \quad 1]^T$. A Tab. 1 mostra os pontos obtidos nas iterações até se obter o resultado esperado.

Tabela 1. Resultados das iterações.

Pontos	x_1	x_2
x_0^1	-0,5	-0,5
x_1^1	-0,2504	-0,5
x_2^1	-0,2504	-0,3756
x_0^2	-0,2504	-0,3756
x_1^2	-0,1882	-0,3756
x_2^2	-0,1882	-0,2823
x_0^3	-0,0015	-0,0023

Portanto, o resultado foi obtido ao final da segunda iteração, exatamente igual comparado ao calculado de forma analítica. Agora, substituindo as coordenadas $x_0^3 = [-0,0015 \quad -0,0023]^T$ nas equações abaixo foi possível obter os resultados para deflexão máxima e rotação máxima da extremidade livre da viga.

$$u_2 = x_1 = -0,0015 [m] \quad (18)$$

$$x_2 = \theta_2 L = -0,0023 \quad (19)$$

$$\theta_2 = \frac{x_2}{L} = -\frac{0,0023}{10} = -0,00023 [rad] \text{ ou } 0,013 [^\circ] \quad (20)$$

Com o intuito de comparar os resultados e verificar a assertividade dos resultados a Tab. 2 confronta o resultado exato obtido analiticamente com o resultado obtido através da otimização da energia potencial da viga pelo Método de Powell.

Tabela 2. Resultados da deflexão máxima.

Método	Deflexão Máx	Diferença
Analítico	-1.5238095166667 [mm]	—
Powell	-1.5238095166654 [mm]	-7.1433×10^{-9}

6. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi estudada uma diferente abordagem para solução de problemas de engenharia estrutural via métodos de otimização. Onde foi empregado um algoritmo baseado no Método das direções Conjugadas de Powell que apresentou excelentes resultados para o problema da viga engastada com extremidade em balanço, obtendo-se uma precisão altamente satisfatória comparada ao resultado analítico. Desta forma, conclui-se que o método proposto com base no método de otimização de Powell e no Método dos Elementos Finitos é bastante eficiente e confiável.

Logo, fica fomentada a ideia de aplicar o conceito utilizado em outros problemas geometricamente mais complexos, contudo implementando algoritmos de otimização bio-inspirados para solução de problemas de engenharia estrutural, tais como: otimização topológica de estruturas e peças mecânicas.

7. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a UNESP/FEIS/PPGEM ao Grupo de pesquisa SISPLEXOS por oferecer sua estrutura como suporte acadêmico à pesquisa e pelo apoio financeiro ao trabalho.

8. REFERÊNCIAS

1. Alves Filho, A. Elementos Finitos: A Base da Tecnologia CAE: Avelino Alves Filho. São Paulo; Érica, 2000.
2. Azevedo, A. F. M. Método dos Elementos Finitos. Porto; Universidade do Porto, 2003.
3. Brent, R. P. "Section. 7.3: Powells algorithm". Algorithms for minimization without derivatives. New Jersey. Englewood Cliffs, 1973.
4. Fish, J; Belytschko, T. A First Course in Finite Elements. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2007.
5. Powell M. J. D. An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives. The Computer Journal, Volume 7, Issue 2. 1964. pp 155-162.
6. del Valle, M., Alonso, J., Poch, M., Bartrolí, J. Application of the Powell Method to the optimization of flow injection systems. Journal of Chemometrics. 2005.
7. Sampaio, R. Vibrações Mecânicas: Dinâmica das Estruturas Flexíveis. Rio de Janeiro; PUC-RJ, 2007.
8. Saramago; Steffen. Introdução às Técnicas de Otimização em Engenharia. Uberlândia; UFU, 2017.
9. Silva, E. C. N. Apostila: Métodos Numéricos Aplicados em Problemas de Otimização em Engenharia. São Paulo; USP, 2017.
10. Vaz, L. E. Método dos elementos finitos em análise de estruturas / Luiz Eloy Vaz. Rio de Janeiro; Elsevier, 2011.

9. RESPONSABILIDADE AUTURAL

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho.

APPLICATION OF THE POWELL METHOD TO DETERMINE THE MAXIMUM DEFLECTION AND ROTATION OF A EULER-BERNOULLI BEAM

D.P. SANTOS¹, dpdsantos.3l@gmail.com

F.R. CHAVARETTE¹, e-mail¹

¹ Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP, SP, Brasil,

Abstract. *The professional's work in the different areas of engineering condenses to the incessant search for increase productivity, efficiency and income, by reducing the impact of constraints such as consumption, cost, and weight on systems. However, the solution of engineering problems in its analytical and accurately is only possible for very simple systems thus more complex systems generally have several solutions, it is necessary to opt for numerical approximation procedures with acceptable accuracy and optimization methods to determine the best solution among the existing ones. In this study it is present the modeling of a cubic beam with swinging end, modeled as a single finite element to obtain the total potencial energy to be minimized by the Powell's Conjugated Direction Method in order to obtain the deflection and maximum rotation of the free end.*

Keywords: *Finite Element Method, Optimizaton, Powell's Conjugated Direction Method.*