

ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DO NÚMERO DE CFL NA CONVERGÊNCIA DE PROBLEMAS DE ESCOAMENTOS SUPERSÔNICOS

Jussie Soares da Rocha, jussie.soares@ifpi.edu.br¹

Pedro Augusto Silva de Sousa, augusto.96@gmail.com²

Raimundo Nonato Correia Neto, r.correia17@hotmail.com²

¹Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – IFPI / Valença, Av. Joaquim Manoel, S/N, Valença (PI) - CEP 64300-000

²Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – IFPI / Teresina, Praça da Liberdade, 1597, Centro - Teresina (PI) - CEP: 64000-040

Resumo: Diversas áreas do conhecimento têm consolidado o uso de ferramenta matemático modelado em linguagem computacional para ganho de velocidade e desempenho em cálculos que vão desde os mais simples até os de alta complexidade. Em dinâmica dos fluidos temos, por exemplo, a solução das Equações de Navier-Stokes e de Euler. Nestes, os escoamentos analisados são externos e internos, tanto os bidimensionais como os tridimensionais. Na realização dessas simulações são empregadas diversas estratégias numéricas, às quais deve-se atenção especial. Algumas dessas consistem em técnicas que transformam as equações governantes, que são do tipo parciais não-lineares, em equações algébricas. O presente trabalho consiste na solução das Equações de Euler na forma conservativa, no espaço bidimensional empregando a técnica de diferenças finitas para a discretização espacial usando o método de Euler explícito para marcha temporal. É considerado o problema físico de escoamento supersônico ao longo de uma configuração de rampa. Para isso são implementados o Algoritmo de Jameson e Mavriplis e o Modelo Linear de Dissipação Artificial de Pulliam. É implementado o passo de tempo variável com o objetivo de acelerar a convergência para a solução de regime permanente. O principal propósito desse trabalho é analisar a ferramenta DISSIP2D_EULER, resultante das implementações, aplicando-a ao problema físico de escoamento de gás ao longo da configuração do tipo rampa, a fim de verificar a qualidade da solução através da variação do número de CFL e da adição explícita de dissipação artificial.

Palavras-chave: Simulação numérica, Algoritmo de Jameson e Mavriplis, Equações de Navier-Stokes e de Euler, Diferenças finitas, Dissipação Artificial.

1. INTRODUÇÃO

Tão importante quanto a escolha da técnica numérica a ser utilizada na discretização das equações que modelam o problema físico é a escolha da técnica de aceleração de convergência a ser trabalhada. O desenvolvimento de técnicas de aceleração de convergência para obtenção de soluções de problemas de estado estacionário constitui outro foco de extensa pesquisa em CFD. Muitas técnicas foram elaboradas e vários trabalhos procuraram descrever ferramentas computacionais para aceleração de convergência que produzissem códigos mais eficientes e ao mesmo tempo menos custosos.

Uma das técnicas utilizadas neste trabalho a fim de acelerar a convergência dos esquemas estudados é o passo no tempo variável para cada célula da malha computacional. A ideia no passo tempo variável, é manter um número de CFL constante no domínio de cálculo e, com isso, garantir passos no tempo adequados para cada região da malha convergente.

2. EQUAÇÕES DE EULER

As Equações de Euler no espaço bidimensional, em sua forma diferencial, conservativa e no sistema de coordenadas generalizadas (ξ, η) são descritas por:

$$\partial_{\tau} \bar{Q} + \partial_{\xi} \bar{E} + \partial_{\eta} \bar{F} = 0 \quad (1)$$

Onde $\bar{Q}$ é o vetor das variáveis conservadas para o sistema de coordenadas generalizadas; $\bar{E}$ e $\bar{F}$ são os vetores de fluxo de Euler nas direções ξ e η , respectivamente. Esses vetores são descritos por:

$$\bar{Q} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{Bmatrix}, \bar{E}_e = J^{-1} \begin{Bmatrix} \rho U \\ \rho u U + p \xi_x \\ \rho v U + p \xi_y \\ (e + p)U - p \xi_t \end{Bmatrix}, \bar{F}_e = J^{-1} \begin{Bmatrix} \rho V \\ \rho u V + p \eta_x \\ \rho v V + p \eta_y \\ (e + p)V - p \eta_t \end{Bmatrix} \quad (2)$$

As velocidades contravariantes, para malha estacionária, são definidas como:

$$U = \xi_x u + \xi_y v, V = \eta_x u + \eta_y v \quad (3)$$

A pressão é relacionada ao sistema matricial das Equações de Euler pela equação de estado:

$$p = (\gamma - 1) \left[e - 1/2 \rho (u^2 + v^2) \right] \quad (4)$$

Nas equações acima, ρ é a densidade do fluido; u e v são as componentes do vetor velocidade nas direções x e y , respectivamente; e é a energia total; p é a pressão estática; U e V são as velocidades contravariantes; ξ_x , ξ_y , η_x e η_y são as derivadas de ξ e η em relação à x e y ; γ é a razão de calores específicos (para essas simulações, o valor de γ para o gás hélio é estimado em 1,67 obtido em KTA, (1978)). A escolha desse gás se dá na perspectiva de uso do código DISSIP2D_EULER em simulações futuras para o escoamento de gás hélio no núcleo de reatores nucleares do tipo VHTGR. Detalhes em Rocha *et al.*, (2017).

O Jacobiano de transformações e termos de métrica são definidos como:

$$\xi_x = J y_\eta, \xi_y = -J x_\eta, \eta_x = -J y_\xi, \eta_y = J x_\xi, J = \frac{1}{x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi} \quad (5)$$

3. ALGORITMO DE JAMESON E MAVRIPLIS

As derivadas espaciais $\partial_\xi \bar{E}_e$, $\partial_\xi \bar{E}_v$, $\partial_\eta \bar{F}_e$ e $\partial_\eta \bar{F}_v$ podem ser aproximadas por diferenças centrais de segunda ordem. Portanto, a Eq. (1) pode ser reescrita como:

$$\Delta \bar{Q} = -\Delta t \left[\partial_\xi (\bar{E}_e - \bar{E}_v) + \partial_\eta (\bar{F}_e - \bar{F}_v) \right] \quad (6)$$

onde,

$$\delta_\xi \bar{E}_{e,i,j} = \frac{\bar{E}_{e,i+1,j} - \bar{E}_{e,i-1,j}}{2}, \delta_\xi \bar{E}_{v,i,j} = \frac{\bar{E}_{v,i+1,j} - \bar{E}_{v,i-1,j}}{2}, \delta_\eta \bar{F}_{e,i,j} = \frac{\bar{F}_{e,i,j+1} - \bar{F}_{e,i,j-1}}{2}, \delta_\eta \bar{F}_{v,i,j} = \frac{\bar{F}_{v,i,j+1} - \bar{F}_{v,i,j-1}}{2} \quad (7)$$

Portanto, a Eq. (6) é escrita da seguinte forma:

$$\bar{Q}^{n+1} = \bar{Q}^n - \Delta t \left(\frac{\bar{E}_{e,i+1,j} - \bar{E}_{e,i-1,j} - \bar{E}_{v,i+1,j} + \bar{E}_{v,i-1,j} + \bar{F}_{e,i,j+1} - \bar{F}_{e,i,j-1} - \bar{F}_{v,i,j+1} + \bar{F}_{v,i,j-1}}{2} \right) \quad (8)$$

A introdução do operador de dissipação D é necessária para garantir a estabilidade numérica, por exemplo, no caso de desacoplamento par-ímpar de soluções e de instabilidades não-lineares, como ondas de choque. Então a Eq. (8) é reescrita como:

$$\bar{Q}^{n+1} = \bar{Q}^n - \Delta t \left(\frac{\bar{E}_{e_{i+1,j}} - \bar{E}_{e_{i-1,j}} - \bar{E}_{v_{i+1,j}} + \bar{E}_{v_{i-1,j}} + \bar{F}_{e_{i,j+1}} - \bar{F}_{e_{i,j-1}} - \bar{F}_{v_{i,j+1}} + \bar{F}_{v_{i,j-1}}}{2} \right) + D_\xi + D_\eta \quad (9)$$

onde D_ξ e D_η são operadores nas direções ξ e η , respectivamente.

4. MODELO DE DISSIPACÃO ARTIFICIAL

O Modelo de Dissipação Artificial estudado neste trabalho baseia-se em Pulliam (1986): trata-se do Modelo de Dissipação Artificial Isotrópico Escalar Linear de Pulliam, o qual consiste em fornecer dissipação uniforme no domínio de cálculo e nas quatro equações de conservação, atuando independentemente em cada direção coordenada. Em outras palavras, a dissipação fornecida na direção ξ leva em conta uma ponderação proveniente da informação originada das instabilidades na direção η com o mesmo peso relativo da direção ξ , caracterizando, então, um isotropismo no modelo. Tal operador pode ser definido por:

$$D_\xi = D_\xi^{(4)} = -\Delta t_{i,j} \varepsilon_E J^{-1} (\nabla_\xi \Delta_\xi)^2 J \bar{Q}^n, D_\eta = D_\eta^{(4)} = -\Delta t_{i,j} \varepsilon_E J^{-1} (\nabla_\eta \Delta_\eta)^2 J \bar{Q}^n \quad (10)$$

O parâmetro ε_E tem seu valor ajustado através de experimentação numérica.

5. PASSO NO TEMPO VARIÁVEL ESPACIALMENTE

A idéia básica deste procedimento consiste em manter constante o número de CFL em todo o domínio computacional, permitindo, portanto, o uso de passos no tempo apropriados para cada região específica da malha durante o processo de convergência. Desta forma, e de acordo com a definição do número de CFL, é possível escrever:

$$\Delta t_{i,j} = \frac{CFL(\Delta s)_{i,j}}{c_{i,j}} \quad (11)$$

em que CFL é o número de “Courant-Friedrichs-Lewy” para prover estabilidade numérica ao esquema; $c_{i,j}$ é a velocidade característica máxima do transporte de informações no domínio de cálculo, e $(\Delta s)_{i,j}$ é um comprimento característico de transporte de informações. De acordo com formalismo de diferenças finitas, em um sistema de coordenadas curvilíneas generalizadas, podem ser definidos como $(\Delta s)_{i,j} = \Delta \xi = \Delta \eta = 1$ e $c_{i,j} = \left(\max(|U| + a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2}, |V| + a\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2}) \right)_{i,j}$.

6. CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO

A condição inicial adotada no problema proposto é a de escoamento não perturbado para todo o domínio de cálculo. O vetor de variáveis conservadas é definido como segue:

$$Q_\infty = \left\{ 1 \quad M_\infty \cos \theta \quad M_\infty \sin \theta \quad \left[\frac{1}{\gamma(\gamma-1)} + \frac{M_\infty^2}{2} \right] \right\}^t \quad (12)$$

em que M_∞ representa o número de Mach de escoamento não-perturbado e θ é o ângulo de incidência do escoamento à montante da configuração em análise. Já as condições de contorno são basicamente de três tipos: entrada, parede e saída. Detalhes em Rocha *et al.*, 2015.

7. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A implementação do Algoritmo de Jameson e Mavriplis (1986) e do Modelo Linear de Dissipação Artificial de Pulliam (1986) resultou em um código computacional escrito em linguagem Fortran, para análise de escoamentos através de várias geometrias, denominado DISSIP2D_EULER. Nesse estudo, foi realizada a análise de um escoamento supersônico de gás hélio através de uma configuração geométrica do tipo rampa. A malha gerada algebricamente para resolver as equações de Euler é mostrada na Fig. 1.

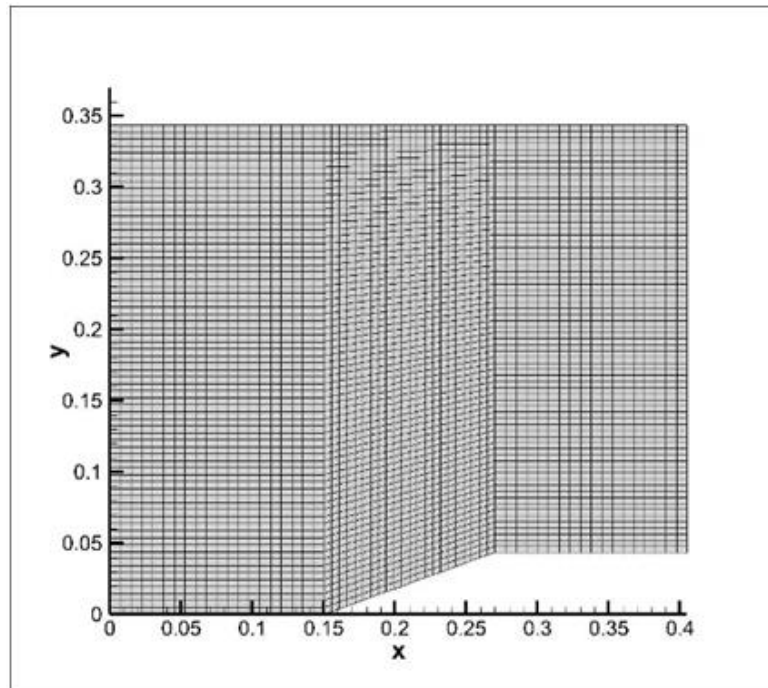


Figura 1: Malha para a configuração de rampa

Os testes foram realizados em um "INTEL CORE i5-4210U - 2,70GHz e 8 Gbytes de memória RAM. Para a simulação, o número de Mach de escoamento livre adotado foi 2,0 (caracterizando fluxo supersônico). O valor utilizado para o número CFL neste trabalho variou de 0,1 a 1,0; o γ utilizado foi 1,67 e, para o ângulo de ataque, o valor adotado foi de $0,0^\circ$. O Modelo Linear de Pulliam (1986) produziu resultados convergidos para um resíduo da ordem de 10^{-7} . Com o objetivo de apresentar o comportamento dos contornos de pressão e número de Mach, foram realizadas simulações com valores de ε_E variando de 10 a 100, para cada valor do número de CFL variando de 0,1 a 1,0. A variação do parâmetro ε_E e do número de CFL reflete diretamente no número final de iterações, como pode ser visto na Tab. 1. Foi verificado que com o aumento do valor ε_E , houve uma diminuição da quantidade de iterações, o que era esperado, uma vez que o aumento de ε_E implica uma maior dissipação adicionada ao sistema. O número de iterações com o aumento do número de CFL também diminuiu, porém os resultados convergiram até o valor de 0,4 para o CFL.

Tabela 1 – Iterações em função dos valores de ε_E e CFL

$\gamma = 1,67$					
ε_E	CFL				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
10	3143	-	-	-	-
20	2751	2068	-	-	-
30	2517	1921	1547	-	-
40	2370	1891	1510	-	-
50	2280	1852	1470	1237	-
60	2190	1792	1414	1216	-
70	2122	1706	1377	-	-
80	2057	1671	1355	-	-
90	2018	1622	-	-	-
100	1956	1555	-	-	-

A qualidade da solução é diretamente afetada com o aumento dos valores de ε_E e CFL. Para efeito de comparação, serão expostos alguns dos contornos obtidos, o que é suficiente para constatação. As Figs. 2a, 2b, 2c e 2d dizem respeito aos contornos de número de Mach obtidos. Importante observar que, à medida em que é adicionada dissipação com o aumento do parâmetro ε_E , a solução tende a ficar mais homogênea, fato evidenciado pelo aumento da uniformidade das regiões antes do choque (entrada da rampa) e após o choque (zona de rarefação).

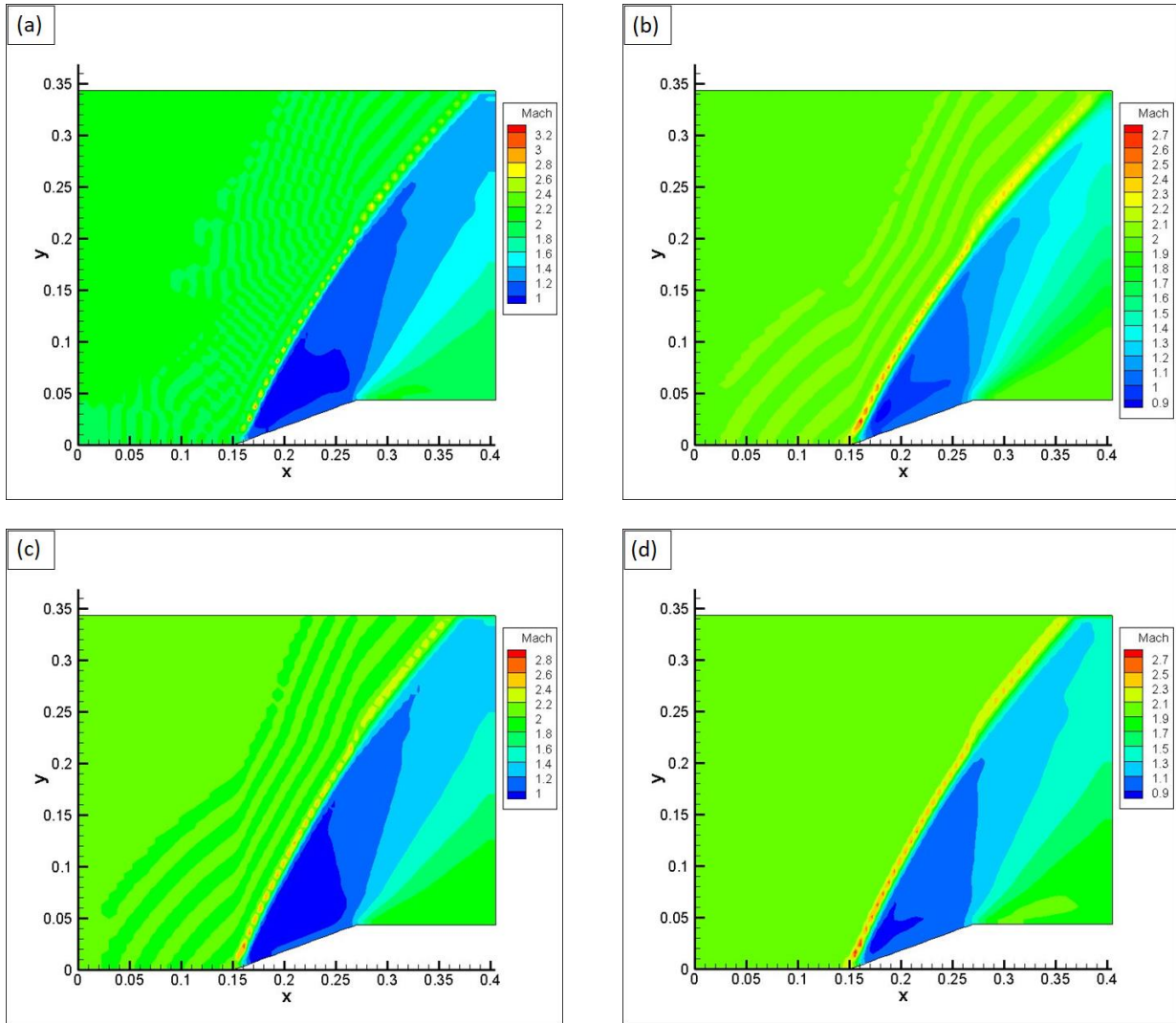
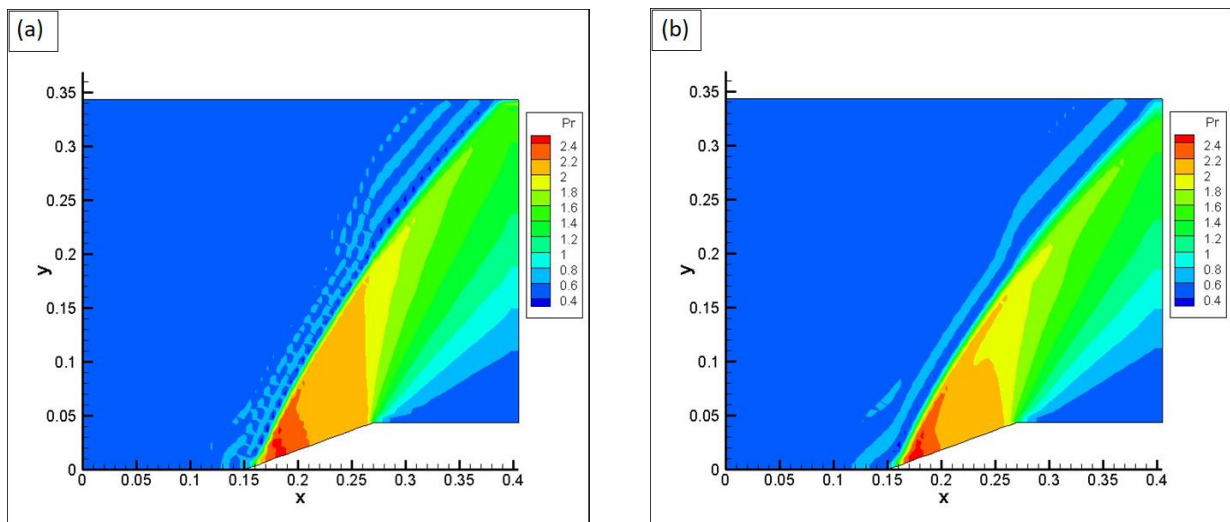


Figura 2: a) Contornos de Mach para $CFL = 0,1$ e $\varepsilon_E = 10$; b) Contornos de Mach para $CFL = 0,1$ e $\varepsilon_E = 40$; c) Contornos de Mach para $CFL = 0,3$ e $\varepsilon_E = 30$; d) Contornos de Mach para $CFL = 0,3$ e $\varepsilon_E = 40$.

As Figs. 3a, 3b, 3c e 3d dizem respeito aos contornos de Pressão obtidos. Novamente, seguindo o que é demonstrado pelos contornos de número de Mach supracitados, é possível evidenciar aumento da uniformidade das regiões antes do choque e após o choque.



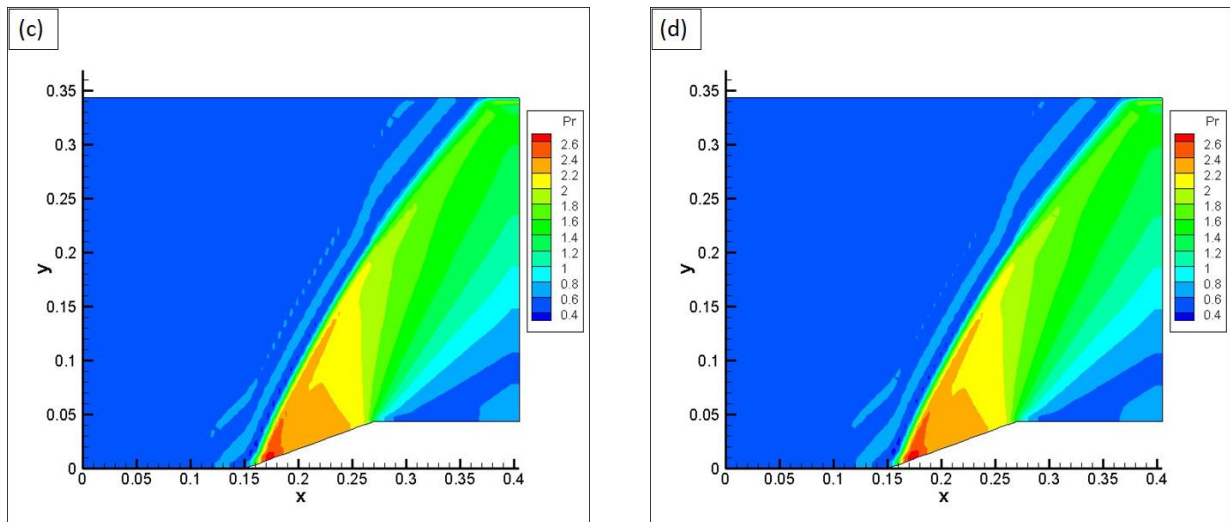


Figura 3: a) Contornos de Pressão para $CFL = 0,1$ e $\varepsilon_E = 10$; b) Contornos de Pressão para $CFL = 0,1$ e $\varepsilon_E = 40$; c) Contornos de Pressão para $CFL = 0,3$ e $\varepsilon_E = 30$; d) Contornos de Pressão para $CFL = 0,3$ e $\varepsilon_E = 40$.

8. CONCLUSÃO

O presente trabalho apresenta a implementação do Algoritmo de Jameson e Mavriplis (1986) e do Modelo Linear de Dissipação Artificial de Pulliam (1986) segundo o formalismo de diferenças finitas, resultando em um código computacional escrito em linguagem Fortran, para análise de escoamentos através de geometrias diversas. Para isso, as equações de Euler em suas formas conservativa e estruturada, são resolvidas no espaço bidimensional, através de uma formulação de diferenças finitas para a discretização espacial com a utilização do método de Euler explícito para marcha no tempo. Foi feita a implementação de passo no tempo variável espacialmente no sentido de acelerar a convergência para a solução de estado estacionário.

Após as simulações, verificou-se a notória diferença entre soluções com a variação do parâmetro ε_E e do número CFL: o aumento de ε_E tende a homogeneizar a solução, com a adição explícita de dissipação ao sistema. Apesar do evidente ganho de qualidade nas soluções, deve-se lembrar que deve haver um compromisso entre o valor de ε_E e da solução gerada: seu aumento indiscriminado pode prejudicar fortemente a qualidade da solução. A variação de ε_E e do CFL também interferiu diretamente no número de iterações (fato percebido pela aceleração da convergência). Baseado no formalismo proposto, pode-se concluir que o esquema e o Modelo de Dissipação implementados, apresentaram bom comportamento, pois permitiu dentro das condições simuladas, boa captura dos choques (no caso das situações envolvendo escoamentos supersônicos), mostrando a capacidade dos códigos em prever efeitos abruptos, através da visualização dos contornos, bem como proporcionou uma boa visualização do comportamento do campo de escoamento convergido. Assim, o código DISSIP2D_EULER continuará a ser trabalhado, visando a implementação de outros modelos a fim de se ampliar a quantidade de situações físicas a serem simuladas. Nesse sentido, considerar-se-á a introdução de novas geometrias bidimensionais, bastando para isso, se for o caso, readequação das condições iniciais e de contorno.

9. AGRADECIMENTOS

O primeiro autor agradece o empenho dos demais na execução do trabalho.

10. REFERÊNCIAS

- Jameson, A. and Mavriplis, D.J., "Finite Volume Solution of the Two-Dimensional Euler Equations on a Regular Triangular Mesh", AIAA Journal, Vol. 24, No. 4, pp. 611-618 (1986).
- KTA. Safety Standards of the Nuclear Safety Standard Commission. KTA3102.1, Reactor Core Design for High-Temperature Gas-Cooled Reactor, Part 1: Calculation of the Material Properties of Helium. Geschäftsstelle des Kerntechnischen Ausschusses beim Bundesamt für Strahlenschutz, June (1978).
- Pulliam, T.H., "Artificial Dissipation Models for the Euler Equations", AIAA Journal, Vol. 24, No. 12, pp. 1931-1940 (1986).
- Rocha, J.S., "Técnicas Numéricas para a Aplicação em Projetos Termofluidodinâmicos de Reatores VHTGR, Tese de Doutorado, DEN, UFPE, Recife, PE, Brasil, 2016, 105p.
- Rocha, J.S., Lira, C.A.B.O., Maciel, E.S.G., "Artificial Dissipation Models Applied to Navier-Stokes Equations for Analysis of Supersonic Flow of Helium Gas Around a Geometric Configuration Ramp Type" – INAC 2015 São Paulo, SP, Brazil, Associação Brasileira de Energia Nuclear – ABEN, October, 2015.

Rocha, J.S., Lira, C.A.B.O., Magalhães, M.A.S., “Development of a Computer Code for Dynamic Analysis of the Primary Circuit of Advanced Reactors”, International Nuclear Atlantic Conference – INAC 2011, Belo Horizonte, MG, Brazil, October 24-28 (2011).

Rocha, J.S., Sousa, P.A.S., Neto, R.N.C., Lira, C.A.B.O., Maciel, E.S.G., “Artificial Dissipation Models Applied to Euler Equations for Analysis of Supersonic Flow of Helium Gas Around a Geometric Configurations Ramp and Diffusor Type” – INAC 2017 Belo Horizonte, MG, Brazil, Associação Brasileira de Energia Nuclear – ABEN, October, 2017.

11. RESPONSABILIDADE AUTURAL

“Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho”.

INFLUENCE ANALYSIS OF CFL NUMBER IN THE CONVERGENCE OF SUPERSONIC FLOWS PROBLEMS

Jussie Soares da Rocha, jussie.soares@ifpi.edu.br¹

Pedro Augusto Silva de Sousa, augusto.96@gmail.com²

Raimundo Nonato Correia Neto, r.correia17@hotmail.com²

¹Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – IFPI / Valença, Joaquim Manoel Av., Valença (PI) - CEP 64300-000

²Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí – IFPI / Teresina, Praça da Liberdade, 1597, Centro - Teresina (PI) - CEP: 64000-040

Abstract. Several knowledge areas have consolidated the use of mathematical tooling modeled in computational language for speed and performance gaining in calculations ranging from the simplest to the high complexity. In fluid dynamics we have, for example, the solution of the Navier-Stokes and Euler equations. In these, the analyzed flows are external and internal, both two-dimensional and three-dimensional. In the execution of these simulations a number of numerical strategies are employed, to which special attention is given. Some of these consist of techniques that transform the governing equations, which are nonlinear partial type, into algebraic equations. The present work consists in the solution of the Euler equations in the conservative form, in the two-dimensional space using the finite differences technique for spatial discretization using the explicit Euler method for time step. It is considered the physical problem of supersonic flow along a ramp configuration. For this, the Jameson and Mavriplis Algorithm and Isotropic Scalar Linear Artificial Dissipation Model of Pulliam (1986) are implemented. The variable time step is implemented in order to accelerate the convergence to the steady state solution. The main purpose of this work is to analyze the DISSIP2D_EULER tool, resulting from the implementations, applying it to the physical problem of gas flow along the configuration of the ramp type, in order to verify the quality of the solution by varying the number of CFL and explicit addition of artificial dissipation.

Keywords: Numerical Simulation, Jameson and Mavriplis Algorithm, Navier-Stokes and Euler Equations, Finite Differences, Artificial Dissipation.