

MAXIMIZAÇÃO DA FREQUÊNCIA FUNDAMENTAL DE UMA ESTRUTURA COMPÓSITA HIERÁRQUICA COM MASSA CONCENTRADA

José Gilberto Picoral Filho, picoralj@yahoo.com.br¹
João Baptista Dias Moreira, joaobapdmdias@gmail.com¹
Ederval de Souza Lisboa, ederval.lisboa@yahoo.com.br¹
Gustavo Comerlato Rodrigues, gustavocomerlato@gmail.com²
Walter Jesus Paucar Casas, walter.paucar.casas@ufrgs.br¹

¹ Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rua Sarmento Leite 425 Porto Alegre, Brasil, <http://www.ufrgs.br/demec>

² Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rua Sarmento Leite 425 Porto Alegre, Brasil, <http://www.ufrgs.br/demec> - Bolsista da PROPESQ – UFRGS – Brasil,

Resumo: O presente artigo aborda a proposição, implementação, e validação de um algoritmo, desenvolvido no software Matlab™, com o método de otimização topológica estrutural BESO (Bi-Directional Evolutionary Optimization), acoplado ao projeto de um material compósito através de uma abordagem multiescala, para a maximização da frequência fundamental de uma estrutura (macroescala). O material é removido de forma gradual, até atingir uma fração de volume inicialmente determinada, sendo simultaneamente definido um domínio para o elemento de volume representativo (EVR), de onde o material é retirado até atingir o volume prescrito. São definidos dois modelos de elementos finitos, um descrevendo a macroescala, e outro descrevendo a microescala, onde a quantidade de material é controlada através da adição e remoção de elementos associados a um determinado material. A validação do algoritmo implementado se deu com a realização de ensaios numéricos de problemas já consolidados na literatura, havendo concordância entre os resultados. Para se alcançar um maior entendimento da influência dos parâmetros no processo de otimização em ambas as escalas, foram realizados testes computacionais variando dados como taxa evolucionária, taxa de adição, e raio mínimo. Os resultados mostraram uma grande influência tanto da taxa evolucionária quanto da taxa de adição sobre a topologia final, enquanto o impacto do raio de filtragem foi menos acentuado.

Palavras-chave: Elementos Finitos, Microestrutura, Multiescala, Otimização estrutural.

1. INTRODUÇÃO

Métodos de otimização topológica tem sido uma área de pesquisa intensiva nas últimas décadas, especialmente desde o trabalho seminal de Bendsøe e Kikuchi (1988). Nele, uma microestrutura artificial é definida como *proxy* para descrever a presença ou ausência de material numa estrutura a ser otimizada. Xie propôs um algoritmo de otimização estrutural evolucionário denominado ESO (Evolutionary Structural Optimization) Xie *et al.* (1998), cuja encarnação atual BESO (Bi-Directional Evolutionary Structural Optimization) Huang e Xie (2008) é uma das abordagens de otimização mais populares, juntamente ao método SIMP (Solid Isotropic Material Interpolation) Bendsøe e Sigmund (2004). Embora a presença de uma microestrutura não seja mais necessária na otimização de uma estrutura qualquer, o potencial dessa formulação no projeto de materiais foi explorado por Sigmund (1994). Com o desenvolvimento de técnicas de prototipagem rápida, essa abordagem apresenta inúmeras possibilidades em áreas que necessitem de compósitos avançados com formas e topologias complexas segundo Akil *et al.* (2011) e Awad *et al.* (2012).

Caso se queira selecionar tanto a estrutura que desempenhará uma certa função quanto as propriedades materiais ideais para tal, a técnica de otimização topológica multiescala permite acoplar as análises tanto da microescala, que define o material, quanto da macroescala, que descreve a estrutura em um único algoritmo de otimização Calixto (2015). Neste trabalho, é explorada a influência dos parâmetros do algoritmo BESO numa análise multiescala aplicada a um problema de otimização com respeito a maximização da frequência fundamental. O principal objetivo é contribuir com o desenvolvimento do método BESO, entendendo como o uso de diferentes parâmetros influenciam na otimalidade da resposta final, assim como sua interação com respeito a rapidez do algoritmo, é influenciada por fatores como taxas de remoção e adição de material. O código computacional produzido foi verificado frente a casos da literatura, e em

seqüência foi explorado qual o impacto do uso de diferentes taxas de evolução e de adição e raio de filtragem na otimalidade do resultado obtido.

2. PROCEDIMENTO

Nessa implementação de um algoritmo de otimização topológica multiescala considerando duas escalas, dois modelos de elementos finitos são utilizados, um que descreve a (macro)estrutura composta de um ou mais materiais com microestrutura periódica, e um modelo que descreve as células unitárias dos materiais empregados, conforme Figura 1. A função objetivo é a frequência fundamental da estrutura, e as variáveis de projetos são vetores $\mathbf{x}^{\text{MA}}$ e $\mathbf{x}^{\text{MI}}$ cujos números de componentes são iguais aos números de elementos finitos em seus respectivos domínios. Cada componente corresponde a uma variável binária que determina a presença ou ausência de material no respectivo elemento. Mais formalmente, seja ω a frequência fundamental da estrutura a ser otimizada, $\mathbf{K}$ e $\mathbf{M}$ as matrizes globais de rigidez e massa, respectivamente, $\mathbf{U}$ o vetor deslocamento, $\mathbf{x}^{\text{MA}}$ o vetor de M componentes das variáveis de projeto na macroestrutura e $\mathbf{x}^{\text{MI},1}$, $\mathbf{x}^{\text{MI},2}$ vetores de N componentes das variáveis de projeto correspondentes às diferentes microestruturas possivelmente presentes. Analogamente, V_i^{MA} , $V_i^{\text{MI},1}$ e $V_i^{\text{MI},2}$ se referem ao volume ocupado pelo i -ésimo elemento. V^{MA} , $V^{\text{MI},1}$, e $V^{\text{MI},2}$ são os volumes totais dos respectivos domínios. O procedimento pode então ser declarado como:

$$\text{Encontrar: } \mathbf{X} = \mathbf{x}^{\text{MA}}, \mathbf{x}^{\text{MI},1}, \mathbf{x}^{\text{MI},2} \quad (1)$$

$$\text{Maximizar } \omega; \quad (2)$$

Estando sujeito a:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (3a)$$

$$\omega^2 = \frac{\mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U}}{\mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U}} \quad (3b)$$

$$\sum_{i=1}^M x_i^{\text{MA}} V_i^{\text{MA}} = V^{\text{MA}} \quad (3c)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i^{\text{MI},1} V_i^{\text{MI},1} = V^{\text{MI},1} \quad (3d)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i^{\text{MI},2} V_i^{\text{MI},2} = V^{\text{MI},2} \quad (3e)$$

No método de otimização escolhido, BESO, para cada domínio em um determinado nível hierárquico (macro ou microestrutural) a metodologia de atualização da topologia é semelhante: Sensibilidades são atribuídas a cada elemento i correspondente a uma certa variável de projeto x_i , de forma a determinar quais elementos são retirados ou mantidos num esquema iterativo donde a estrutura vai de um volume inicial V^0 até um volume final pré-estabelecido V . Essa escolha é feita de forma a maximizar o valor da função objetivo, nesse caso, a frequência fundamental ω .

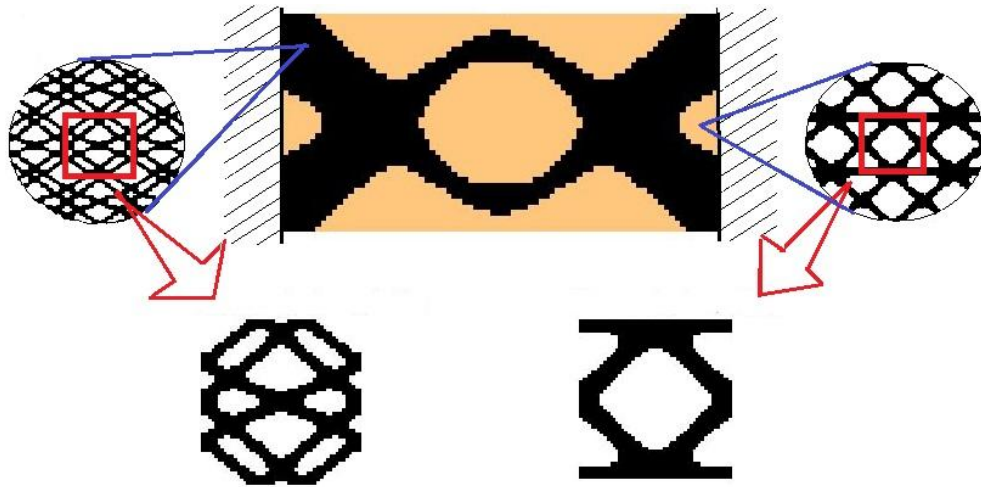


Figura 1. Viga bi-engastada compósita, cujos materiais: rígido (preto) e flexível (salmão) possuem microestrutura celular associada.

3. VALIDAÇÃO DO ALGORITMO

A macroestrutura compreende o domínio da viga analisada, englobando materiais periódicos compostos por microestruturas. Estes por sua vez, possuem regiões de maior módulo de elasticidade (microestrutura rígida), e de menor módulo de elasticidade (microestrutura mais flexível).

O algoritmo implementado foi testado com os parâmetros idênticos aos utilizados por Zuo et al. (2013), sendo: fator de penalização = 3; raio mínimo elementar = 4; fração volumétrica prescrita = 50% (macroestrutura, microestrutura rígida, microestrutura flexível); taxa evolucionária e taxa de adição = 0.05 para macroestrutura, micro flexível e micro rígida.

Os casos utilizados para validação do algoritmo implementado tratam-se de uma viga bi engastada de material único, possuindo 80 elementos na horizontal e 40 na vertical, com as dimensões conforme a Figura 2.

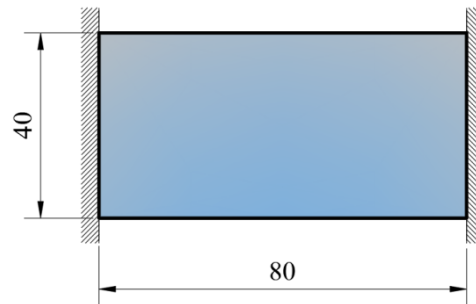


Figura 2. Viga bi-engastada.

Para a primeira estrutura os parâmetros relativos aos materiais foram coeficiente de Poisson = 0.3, módulo de elasticidade do material rígido = 1.0 Pa e densidade = 1.0 kg.m⁻³, módulo de elasticidade do material flexível = 0.2 Pa e densidade = 2 kg.m⁻³.

Na Figura 3 encontra-se o leiaute obtido neste trabalho empregando os parâmetros citados, e na Figura 4 o leiaute obtido por Zuo *et al.* (2013) com os mesmos parâmetros.

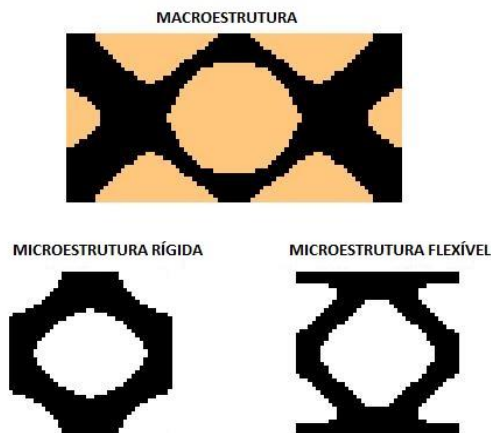


Figura 3. Viga otimizada obtida neste trabalho.

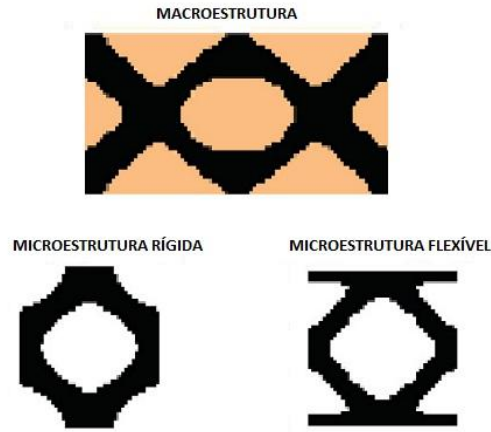


Figura 4. Viga otimizada por Zuo *et al.* (2013).

O algoritmo desenvolvido neste artigo levou 43 iterações, contra 47 iterações de Zuo *et al.* (2013), alcançando uma redução de 8.5%. O valor da frequência fundamental obtida foi de 0.0091 rad/s, contra 0.0092 rad/s da referência, o que corresponde a uma diferença de 1.08% para menos.

Abaixo são apresentadas a esquerda as matrizes constitutivas obtidas pelo código disposto neste trabalho, onde D_{mic}^1 representa a matriz constitutiva do elemento com maior módulo de elasticidade da microestrutura, e D_{mic}^2 representando a matriz constitutiva do elemento com menor módulo de elasticidade da microestrutura, as matrizes constitutivas do lado direito são aquelas oriundas da literatura. Notam-se coincidências entre os valores das matrizes constitutivas até a segunda casa decimal.

$$D_{mic}^1 = \begin{bmatrix} 0.2576 & 0.1436 & 0 \\ 0.1436 & 0.1635 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1253 \end{bmatrix}$$

$$D_{mic}^1 = \begin{bmatrix} 0.2538 & 0.1448 & 0 \\ 0.1448 & 0.1660 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1259 \end{bmatrix}$$

$$D_{mic}^2 = \begin{bmatrix} 0.0636 & 0.0216 & 0 \\ 0.0216 & 0.0309 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0211 \end{bmatrix}$$

$$D_{mic}^2 = \begin{bmatrix} 0.0650 & 0.0222 & 0 \\ 0.0222 & 0.0322 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0218 \end{bmatrix}$$

Para a segunda estrutura utilizada, visando a validação do algoritmo, os parâmetros relativos aos materiais foram coeficiente de Poisson igual a 0.3, módulo de elasticidade 1.0 Pa e densidade do material rígido da macroestrutura igual a 1.0 kg.m⁻³, módulo de elasticidade e densidade do material flexível da macroestrutura igual a 0.3 Pa e 1.5 Pa respectivamente, módulo de elasticidade e densidade do material rígido da microestrutura igual a 0.2 Pa e 2 Pa respectivamente, módulo de elasticidade igual 0.05 Pa e densidade igual a 0.8 kg.m⁻³, sendo os últimos relativos ao material flexível da microestrutura.

Na Figura 5 encontra-se o leiaute obtido pelo algoritmo de otimização com os valores de parâmetros anteriormente citados, e na figura 4 encontra-se o leiaute obtido por Zuo *et al.* (2013) com os mesmos parâmetros.

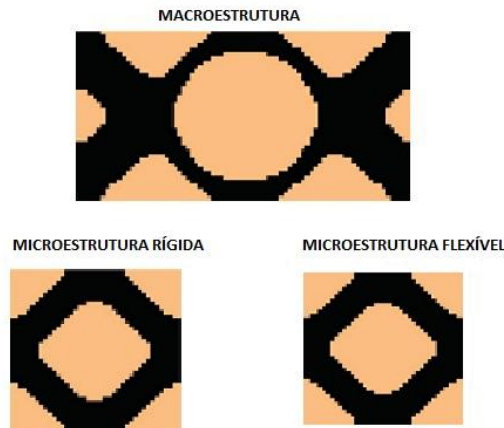


Figura 5. Viga otimizada mediante algoritmo implementado neste trabalho.

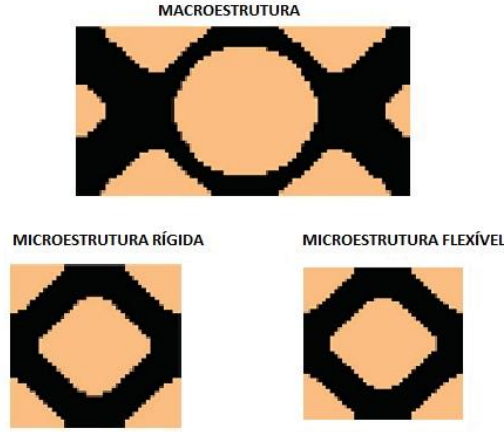


Figura 6. Viga otimizada por Zuo et al. (2013).

Para o segundo caso o algoritmo desenvolvido neste artigo precisou de 39 iterações para convergir, alcançando a frequência fundamental de 0.0106 rad/s, já o algoritmo utilizado por Zuo et al. (2013) utilizou 46 iterações, chegando em um valor de frequência fundamental de 0.0106 rad/s. Isso demonstra ter havido uma diminuição de 15.21% relativo ao número de iterações a favor do algoritmo implementado neste trabalho, já os valores de frequência fundamental foram idênticos.

A seguir no lado esquerdo são mostradas as matrizes constitutivas oriundas do método relativo ao presente artigo, onde D_{mic}^1 representa a matriz constitutiva do elemento com maior módulo de elasticidade da microestrutura, e D_{mic}^2 representando a matriz constitutiva do elemento com menor módulo de elasticidade da microestrutura, e as provenientes de Zuo et al. (2013), a direita, onde nota-se a igualdade entre os valores até a primeira casa decimal para a matriz constitutiva referente à microestrutura rígida, e até a segunda casa decimal, para microestrutura flexível.

$$D_{mic}^1 = \begin{bmatrix} 0.5902 & 0.2011 & 0 \\ 0.2011 & 0.5702 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2240 \end{bmatrix}$$

$$D_{mic}^2 = \begin{bmatrix} 0.1084 & 0.0383 & 0 \\ 0.0383 & 0.1029 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0420 \end{bmatrix}$$

$$D_{mic}^1 = \begin{bmatrix} 0.6084 & 0.2050 & 0 \\ 0.2050 & 0.5999 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2300 \end{bmatrix}$$

$$D_{mic}^2 = \begin{bmatrix} 0.1101 & 0.0390 & 0 \\ 0.0390 & 0.1078 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0430 \end{bmatrix}$$

4. ENSAIOS NUMÉRICOS

A análise da influência dos parâmetros no processo de otimização, foi realizada utilizando estruturas com diferentes condições de apoio, e aplicando variações nos seguintes parâmetros: taxa de retirada de material, taxa de adição de material, r_{min} (raio mínimo), e fator de penalização.

4.1. Caso 1: Viga simplesmente engastada com massa concentrada

No primeiro caso foi utilizado uma viga simplesmente engastada com dimensões de 80×50 elementos, e uma massa não estrutural em seu canto inferior direito, com valor de 2000 kg conforme Figura 7.

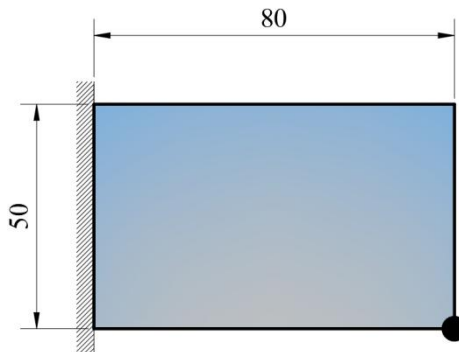


Figura 7. Viga simplesmente engastada com massa concentrada.

A estrutura foi discretizada com 80×50 elementos, e os parâmetros aplicados foram: raio mínimo elementar = 1 até 11 (somente números inteiros); taxa de retirada de material da macroestrutura = 0,05 até 0,45 (com incremento de 0,05); taxa de adição de material = 0,06 até 0,45 (com incremento de 0,05). A Figura 8 apresenta as topologias e o número de iterações alcançadas.

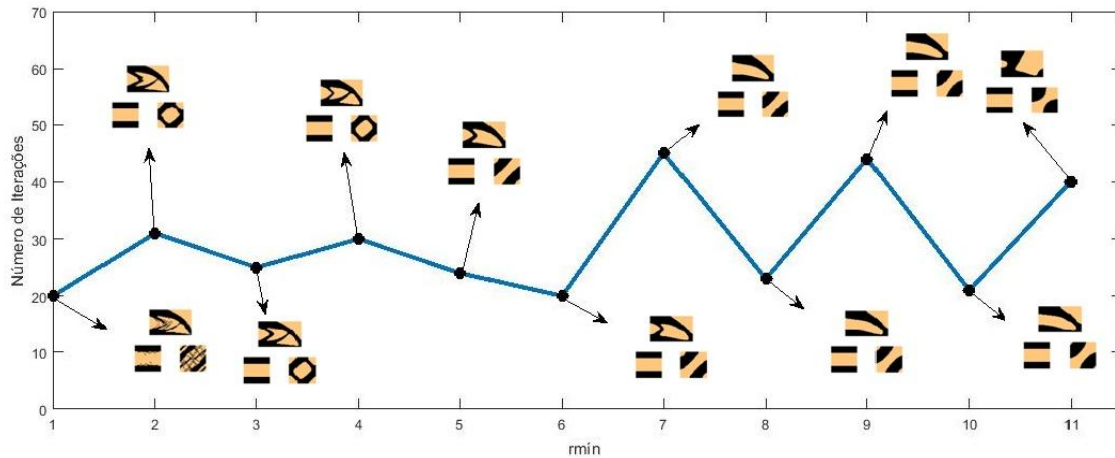


Figura 8. Variação do número de iterações em função do raio mínimo.

Com o ensaio numérico realizado foi possível se observar que a variação dos valores do raio mínimo, não impactou no valor atingido pela função objetivo, sempre se mantendo em 0.020 rad/s, entretanto as topologias da macro e microestruturas mostraram variações.

Os valores limites para os parâmetros em questão, foram determinados com base na integridade estrutural do caso estudado, de tal forma que o limite superior fosse a primeira iteração em que aquela integridade é violada.

Relativo à influência da taxa de evolução, ER , e da taxa de adição, AR , sobre o número de iterações e sobre a topologia, percebe-se um efeito mais sensível do que o observado na ação do raio mínimo sobre os mesmos, ao avançar-se com incrementos de 0.05 de ER e AR a integridade estrutural foi comprometida após 8 etapas.

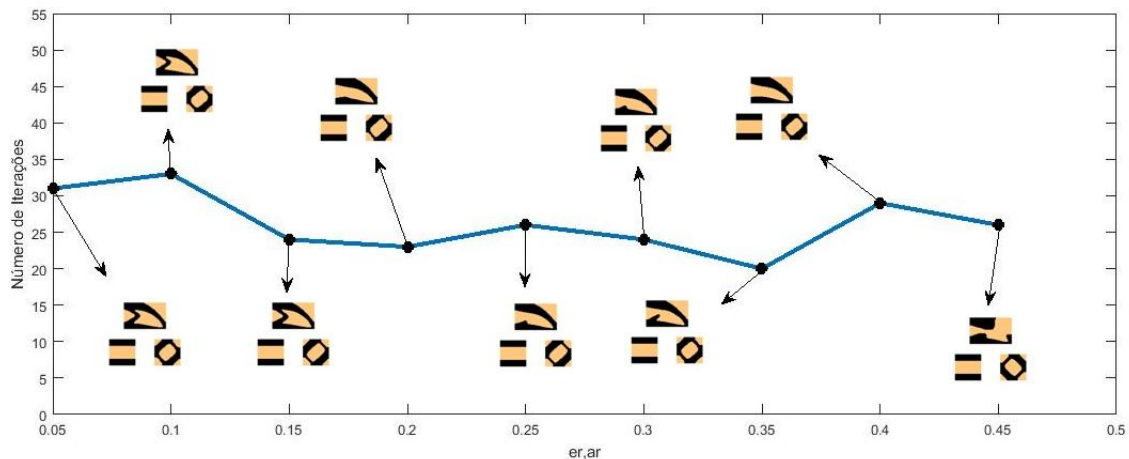


Figura 9. Variação do número de iterações em função da taxa de evolução e de adição de material.

O valor médio encontrado para o número de iterações foi de 29.36, para cada raio mínimo utilizado como estudo de influência, tendo um desvio padrão de 9.58 iterações para mais ou para menos, sendo que a integridade estrutural foi limitada em um raio mínimo de filtragem igual a 11. Contudo a média relativa ao número de iterações obtidos na faixa em que se variou a taxa de evolução e taxa de adição de material, de 0.05 até 0.45 com incremento de 0.05, foi de 26.22, com 4.11 de desvio padrão.

4.2. Caso 2: Placa retangular bi apoiada com massa concentrada

No segundo caso abordado nesse artigo, foi utilizado como estrutura uma viga bi-engastada com dimensões 80×50 , tendo uma massa não estrutural localizada na parte inferior, com valor de 2000 kg como mostra a figura 10.

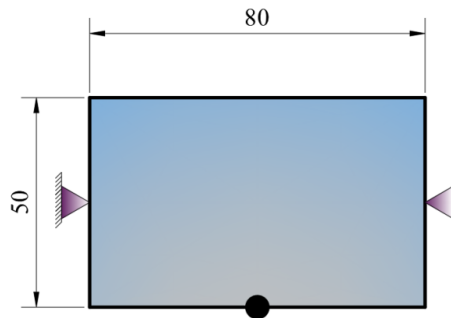


Figura 10 Placa retangular bi apoiada com massa concentrada.

A discretização da estrutura foi com 80×50 elementos, sendo aplicados os seguintes parâmetros: raio mínimo elementar de 1 até 13 (com incremento de 1); taxa de retirada de material da macroestrutura de 0.05 até 0.45 (com incremento de 0.05); taxa de adição de material da macroestrutura de 0.06 até 0.45 (com incremento de 0.05). A figura 11 apresenta as topologias e o número de iterações obtidas.

A máxima frequência fundamental observada em Zuo et al. (2013), foi de 0.0041 radianos por segundo. No código implementado neste trabalho, houve pequena variação do valor da função objetivo à medida em que se variavam os parâmetros de estudo. O valor máximo atingido para frequência fundamental foi de 0.0043 radianos por segundo, e o menor valor foi de 0.0038 radianos por segundo, utilizando-se o raio mínimo como parâmetro de estudo. Ao mudar a taxa de evolução e a taxa de adição, o valor da função objetivo permaneceu inalterada em 0.0043 radianos por segundo, e a integridade estrutural se manteve, implicando na possibilidade de valores mínimos locais distintos entre si que podem ser explorados com finalidade de encontrar uma boa relação entre complexidade estrutural e o valor da função objetivo. A figura 11 apresenta as topologias e o número de iterações obtidas.

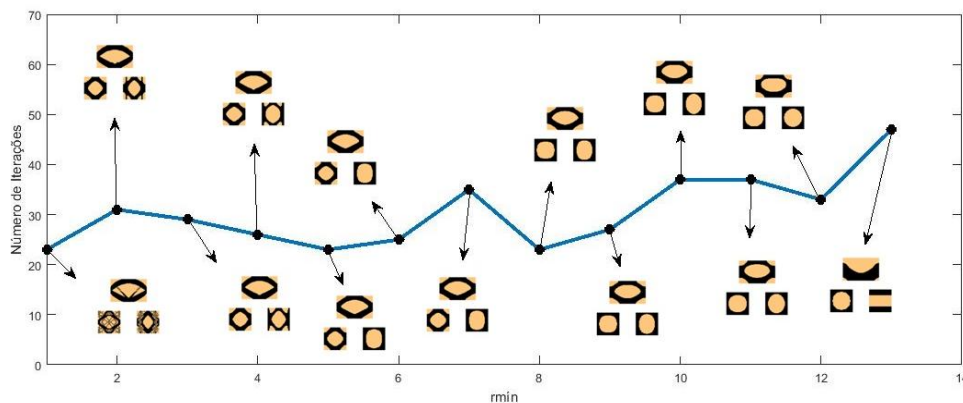


Figura 11. Variação do número de iterações em função do raio mínimo.

Os valores limites para a variação do raio mínimo foi com base na integridade estrutural do caso em questão, de forma que o limite superior fosse a primeira iteração em que a integridade é violada, semelhante ao aplicado no caso 1.

A estrutura perdeu a integridade na décima terceira iteração, sendo que houve uma média de 30.46 iterações por valor de raio mínimo, e 7.17 foi o valor do desvio padrão obtido para a amostra do número de iterações. Na Figura 7 está ilustrado a mudança da topologia da estrutura e do número de iterações, à medida em que se variam taxa de evolução e taxa de adição de material, sendo notório o efeito mais sensível sobre o número de iterações e sobre a topologia final.

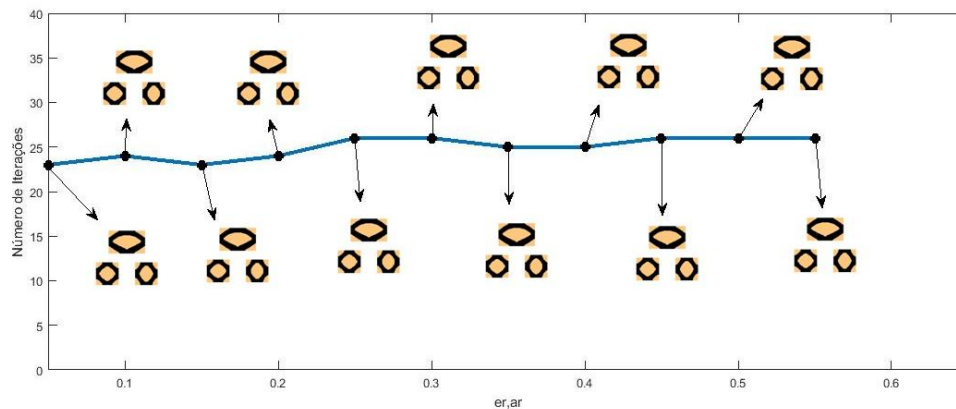


Figura 12. Variação do número de iterações em função da taxa de evolução e de adição de material.

A integridade estrutural manteve-se ao longo de toda faixa de iterações abordada no estudo em que se variou a taxa de evolução e a taxa de adição de material, onde o maior valor de ER e AR foi de 40, partindo-se de 0,05, o número de iterações permaneceu entre 23 e 26. Visto a faixa de variação de ER e AR ter sido muito grande, na figura 12 é apresentado uma faixa representativa do estudo realizado, mostrando uma média de 25 iterações, com 1.20 de desvio padrão.

5. CONCLUSÕES

O código produz resultados coerentes com a literatura, o que valida a implementação realizada nesse trabalho. A exploração feita mostrou que há sensível variação do resultado encontrado pelo algoritmo no que se refere a mudança de topologia e número de iterações até a convergência da função objetivo, maximização da frequência fundamental, de acordo com a mudança dos parâmetros taxa de evolução e taxa de adição. Contudo observou-se uma maior interferência no que concerne à mudança no raio mínimo, sobre a taxa de evolução e a taxa de adição de material. Além de permitir a análise da influência dos parâmetros ER , AR , e raio mínimo, sobre a topologia final da estrutura e sobre o número de iterações até a convergência, o algoritmo relativo ao presente artigo se mostrou mais eficiente para o problema anteriormente resolvido por Zuo et al. (2013), visto chegar ao resultado esperado mais rapidamente. Com relação a forma topológica pode-se afirmar que para um maior valor do raio de filtragem (raio mínimo) o leiaute apresenta melhor manufaturabilidade viabilizando menores custos quanto a elaboração da estrutura pretendida.

6. AGRADECIMENTOS

Os autores deste trabalho tiveram o suporte financeiro do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, do Ministério da Ciência Tecnologia, Inovações e Comunicação, (Processos Números 140081/2015-1 e 148895/2016-6), Brasil.

7. REFERÊNCIAS

- Akil, H.M., Omar, M.F., Mazuki, A.A.M., Safiee, S., Ishak, Z.A.M. and Bakar, A.A., 2011, "Kenaf fiber reinforced composites: A review", *Materials & Design*, v. 32, n. 8, p. 4107-4121.
- Awad, Ziad K., Aravinthan, Thiru., Zhuge, Yan. and Gonzalez, Felipe., 2012, "A review of optimization techniques used in the design of fibre composite structures for civil engineering applications", *Materials & Design*, v. 33, p. 534-544.
- Bendsøe, M.P. and Kikuchi, N., 1988, "Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.71, pp.197-224.
- Bendsøe, M.P. and Sigmund, Ole., 2004, "Topology optimization by distribution of isotropic material," In: *Topology Optimization*. Springer, Berlin, Heidelberg, p. 1-69.
- Calixto, Tainan Khalil Leite., 2015, "Otimização topológica evolucionária multiescala aplicada a problemas de elasticidade linear", *Dissertação de Mestrado*, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil.
- Huang, X., and Xie, Y. M., 2008, "A new look at ESO and BESO optimization methods," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, v. 35, n. 1, p. 89-92.
- Querin, O. M., Steven, G. P. and XIE, Y. M., 1998, "Evolutionary structural optimization (ESO) using a bidirectional algorithm", *Engineering computations*, v. 15, n. 8, p. 1031-1048.
- Sigmund, Ole., 1994, "Design of material structures using topology optimization", *Tese de Doutorado*. Technical University of Denmark.
- Zuo, Z.H., Huang, X., Rong, J.H. and Xie, Y.M., 2013, "Multi-scale design of composite materials and structures for maximum natural frequencies", *Materials & Design*, v. 51, p. 1023-1034.

8. RESPONSABILIDADE AUTORAL

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho.

MAXIMIZING THE FUNDAMENTAL FREQUENCY OF A HIERARCHICAL COMPOSITE STRUCTURE WITH COUPLED MASS

José Gilberto Picoral Filho, picoralj@yahoo.com.br¹
João Baptista Dias Moreira, joabapdmdias@gmail.com¹
Ederval de Souza Lisboa, ederval.lisboa@yahoo.com.br¹
Gustavo Comerlato Rodrigues, gustavocomerlato@gmail.com²
Walter Jesus Paucar Casas, walter.paucar.casas@ufrgs.br¹

¹ Department of Mechanical Engineering, Federal University of Rio Grande do Sul, Rua Sarmiento Leite 425 Porto Alegre, Brazil, <http://www.ufrgs.br/demec>

² Department of Mechanical Engineering, Federal University of Rio Grande do Sul, Rua Sarmiento Leite 425 Porto Alegre, Brazil, <http://www.ufrgs.br/demec> - PROPESQ Scholarship – UFRGS – Brazil

Abstract: *This article addresses the proposition, implementation and validation of an algorithm, developed in the Matlab™ software, which uses the BESO (Bi-Directional Evolutionary Optimization) method of topology optimization to maximize the fundamental frequency of a macroscopic structure in a composite material through a multiscale approach. The material is gradually removed until a chosen volume fraction is reached, while a domain for the representative elementary volume (REV), from where material is removed until it reaches the prescribed volume, is simultaneously delimited. Two finite element models are defined, one describing the macroscale, and the other describing the microscale, where the quantity of material is controlled through addition and removal of elements associated to a predetermined material. The implemented algorithm was validated through numerical experiments of problems previously solved in literature, with agreement between the results. To better understand the influence of the entry parameters in the optimization process in both scales, computational tests varying data such as evolutionary rate, addition rate and minimum radius were realized. The results show great influence on the final topology from both the evolutionary and addition rates, while the minimum radius' impact was less pronounced.*

Keywords: *Finite Elements, Microstructure, Multiscale, Structural optimization.*