

DINÂMICA CAÓTICA NO MODELO DE MATHIEU-VAN DER POL ACOPLADO

Joselma Pinheiro Gonçalves Vicente, joselmapinheiro@uol.com.br¹

Fábio Roberto Chavarette, fabioch@mat.feis.unesp.br²

¹Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, SP, Brasil

²Departamento de Matemática, Feis, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, SP, Brasil

Resumo: Este trabalho apresenta o estudo do sistema autônomo de Mathieu-Van der Pol, chamado também de tri-caos. O sistema Mathieu-Van der Pol se trata de um oscilador hiper-caótico, com quatro variáveis de estado e três expoentes positivos de Lyapunov que foi modelado via acoplamento linear dos sistemas não lineares e não autônomos de Mathieu e de Van der Pol. Para investigar a dinâmica complexa dos pontos de equilíbrio do sistema tri-caos, quanto a estabilidade e instabilidade, foi utilizado o método de estabilidade segundo Lyapunov e para a análise caótica do sistema foi aplicado o algoritmo de Wolf para encontrar os três expoentes de Lyapunov com valores positivos.

Palavras-chave: Estabilidade, Dinâmica caótica, Expoentes de Lyapunov, Mathieu-Van der Pol.

1. INTRODUÇÃO

O consumidor na sociedade dos dias atuais é exigente, consciente e ávido por novos produtos, e neste cenário a engenharia mecânica contribui com projetos de produtos tecnológicos avançados que garantem eficiência, leveza, confiabilidade e segurança.

A aquisição de produtos inovadores impulsiona novos desafios à engenharia que se estendem a todos os setores relacionados com o projeto, desenvolvimento e execução.

A dinâmica clássica baseada na teoria linear foi por longos anos vista como suficiente para a compreensão das características vibratórias de quase todas as estruturas projetadas. Contudo, com a modernização das estruturas e utilização de materiais inovadores com maior grau de flexibilidade, as não linearidades tornam-se mais ativas e robustas (Savi, 2006).

O comportamento caótico ou o caos determinístico representa a irregularidade de um sistema dinâmico. Suas características essenciais são a sensibilidade às condições iniciais, que significa que a evolução do sistema pode ser alterada por pequenas perturbações e a imprevisibilidade, ou seja, a impossibilidade de prever a evolução posterior do sistema, mesmo conhecendo o estado dele durante um longo intervalo de tempo.

Intuitivamente, pode-se afirmar que uma resposta caótica pode ser compreendida a partir de uma série de transformações do tipo contração-expansão-dobra e dentre as ferramentas mais empregadas para caracterizar o caos se destaca os expoentes de Lyapunov que é um dos invariantes geométricos do sistema, sendo inclusive utilizado para avaliar outros invariantes (Savi, 2006).

Os expoentes de Lyapunov avaliam a sensibilidade às condições iniciais monitorando o comportamento de trajetórias vizinhas. Os sinais dos expoentes definem as características de divergência ou convergência entre as órbitas (Savi, 2006). Dois expoentes positivos de Lyapunov confirmam a natureza hiper caótica de sua dinâmica e isso significa que o sistema pode apresentar comportamento mais complicado do que apenas um expoente positivo. Gerar três expoentes positivos de Lyapunov em um novo sistema não-linear, significa antecipar o avanço da aplicação em comunicação segura (Shih-Yu et al., 2012).

2. PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL

O sistema autônomo Mathieu-Van der Pol é governado por quatro equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, como mostrado na Eq. (1).

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -(a + b x_3)x_1 - (a + b x_3)x_1^3 - cx_2 + d x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -ex_3 + f(1 - x_3^2)x_4 + gx_1 \end{aligned} \tag{1}$$

sendo x_1 , x_2 , x_3 e x_4 os quatros estados do sistema, a , b , c , d , e , f e g os parâmetros do sistema de Mathieu-Van der Pol (Shih-Yu et al., 2012).

Para a investigação dos pontos instáveis do sistema foi obtido um diagrama de estabilidade através do Primeiro Método de Lyapunov. Para demonstrar o comportamento ao longo do tempo, plotou-se o plano de fase e histórico no tempo do sistema tri-caos, usando o método de Runge Kutta de 4ª ordem. Todos os algoritmos foram implementados no software livre Octave.

3. RESULTADO E DISCUSSÃO

Para avaliar a simulação numérica do sistema tri-caos usou-se a variação temporal de 0 a 100, parâmetros e condições iniciais ilustrados na Tab.1.

Tabela 1. Parâmetros e condições iniciais

a	b	c	d	e	f	g	x₁	x₂	x₃	x₄
91.7	5.023	0.01	91	87.001	18	9.0572	0.01	0.01	0.01	0.01

O ponto do equilíbrio do sistema é seu ponto origem (0,0,0,0), sendo um ponto instável. Após a implementação do primeiro método de Estabilidade de Lyapunov, algoritmo de Wolf (Wolf et al., 1985) para o sistema Mathieu-Van der Pol foram obtidos os seguintes diagramas, variando-se os parâmetros a e b no ponto de origem, como mostra as Fig. 1 e 2.

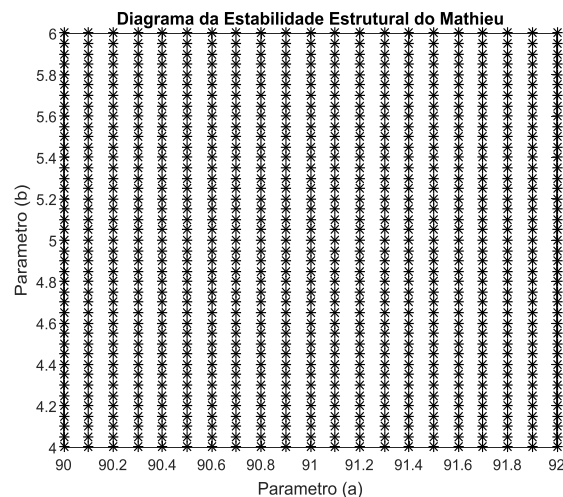


Figura 1. Diagrama da estabilidade estrutural do Mathieu do par (x_1 , x_2).

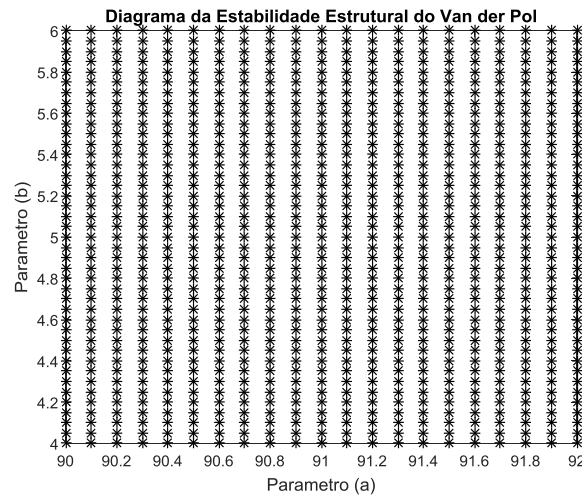


Figura 2. Diagrama da estabilidade estrutural do Van der Pol do par (x_3, x_4) .

De acordo com as Figuras (1) e (2) do Sistema do Mathieu e de Van der Pol verifica-se que todos os pontos apresentam comportamentos instáveis (*).

Escolhido arbitrariamente o ponto (91.7, 5.0) na Fig. 1 e 2, determina-se os expoentes de Lyapunov (Wolf et al., 1985), conforme mostra a Fig. 3.

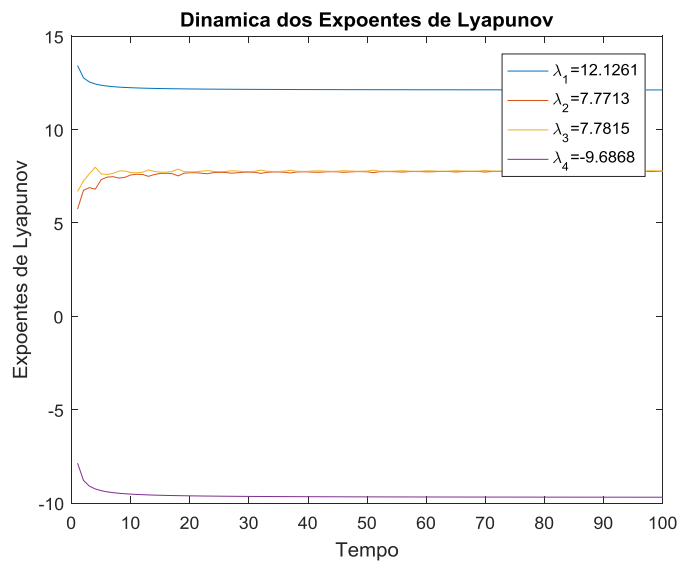


Figura 3. Dinâmica dos expoentes de Lyapunov.

Calculando-se os expoentes de Lyapunov do Sistema Mathieu-Van der Pol (Wolf et al., 1985), constata-se que o sistema apresenta quatro expoentes de Lyapunov, sendo três deles com valores positivos, a saber, $\lambda_1 = 12.1261$; $\lambda_2 = 7.7713$; $\lambda_3 = 7.7814$ e um expoente com valor negativo $\lambda_4 = -9.6868$, demonstrando que o sistema está em caos (Wolf et al., 1985).

As Figuras 4a, 5a, 6a, 7a e 4b, 5b, 6b, 7b mostram respectivamente o histórico no tempo e o espectro da frequência para os quatro estados do sistema tri-caos.

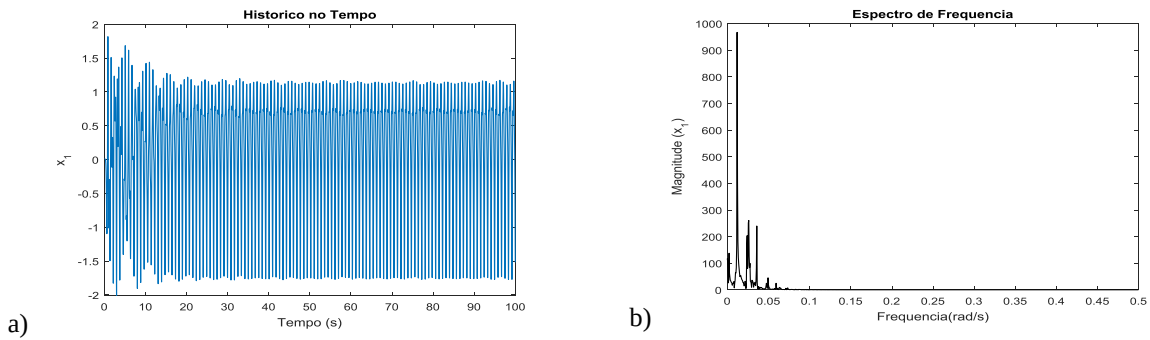


Figura 4. (a) Comportamento dinâmico do histórico no tempo (x_1). (b) FFT para (x_1).

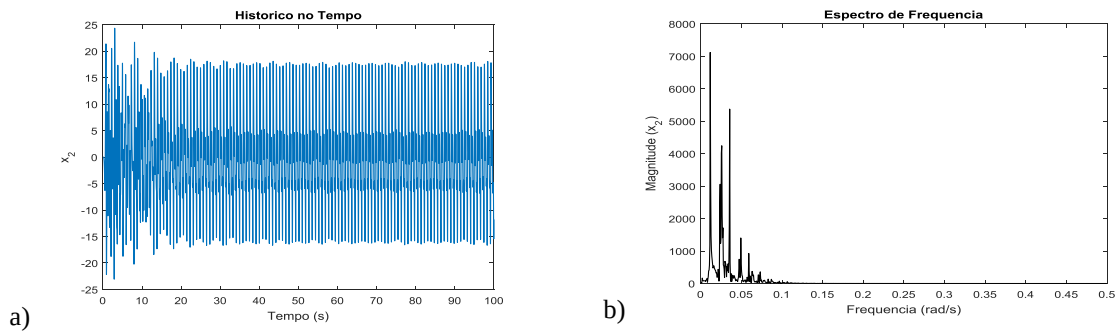


Figura 5. (a) Comportamento dinâmico do histórico no tempo (x_2). (b) FFT para (x_2).

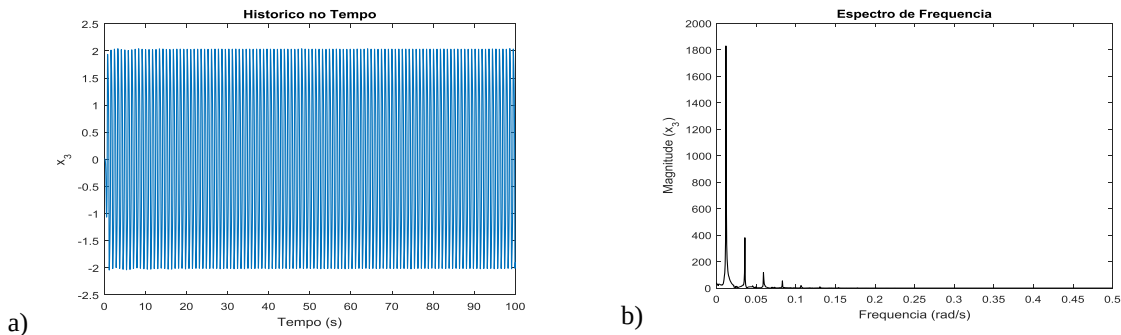


Figura 6. (a) Comportamento dinâmico do histórico no tempo (x_3). (b) FFT para (x_3).

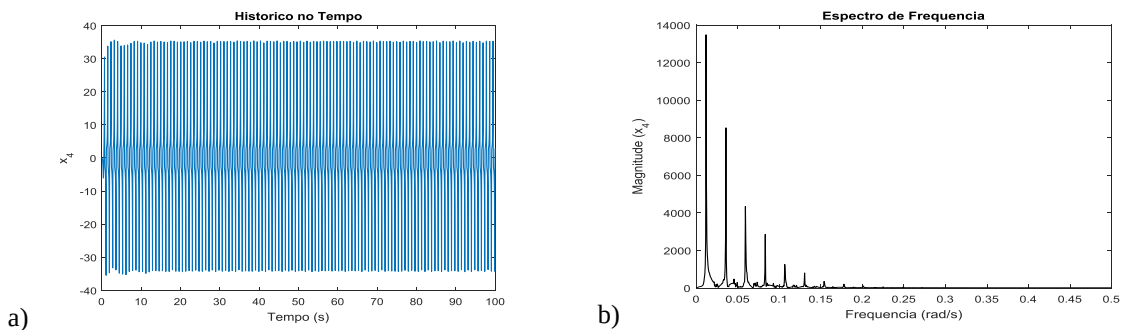


Figura 7. (a) Comportamento dinâmico do histórico no tempo (x_4). (b) FFT para (x_4).

De acordo com as Figuras 4a à 7a e 4b à 7b que exibem o comportamento dinâmico dos quatro parâmetros do sistema e suas respectivas transformada de Fourier demonstram que a cada período tem-se acima de três frequências. A figura 8 apresenta os planos de fase para as mesmas condições anteriores.

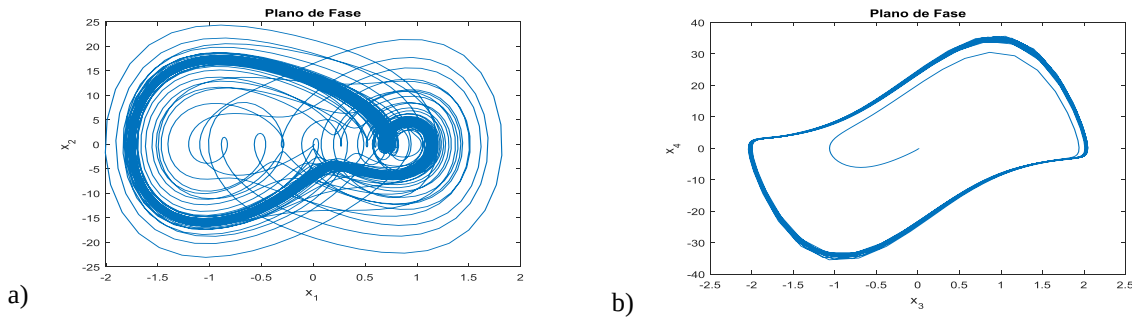


Figura 8. (a) Plano de fase (projeções x_1 e x_2). (b) Plano de fase (projeções x_3 e x_4).

Constata-se pelas Figuras 8a e 8b que há uma situação desordenada no traçado, exibindo curvas que nunca se fecham. A não periodicidade e consequente imprevisibilidade caracterizam o caos.

4. CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi possível verificar que o sistema autônomo Mathieu-Van der Pol também chamado de tri-caos, possui comportamento caótico com três expoentes positivos de Lyapunov. Logo conclui-se que o sistema é caracterizado como um sistema hiper-caótico.

5. REFERÊNCIAS

- L. Shih-Yu, H. Sheng-Chieh, Y. Cheng-Hsiung, G. Zheng-Ming, Generating tri-chaos attractors with three positive Lyapunov exponents in new four order system via linear coupling, *Nonlinear Dyn*, 69 (2012), 805-816.
- Savi, M. A., “Dinâmica Não-Linear e Caos.” Rio de Janeiro, Brasil, Editora e-papers, 2006.
- Wolf, A.; Swift, JB.; Swinney, H.L. & Vastano, J.A. (1985). “Determining Lyapunov Exponents from a Time Series”, *Physical 16D*, pp.285-317.

6. RESPONSABILIDADE AUTORAL

“Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho”.

CHAOTIC DYNAMICS IN MATHIEU-VAN DER POL MODEL COUPLED

Joselma Pinheiro Gonçalves Vicente, joselmapinheiro@uol.com.br¹
Fábio Roberto Chavarette, fabioch@mat.feis.unesp.br²

¹Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, SP, Brazil

²Mathematics Department, Feis, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, SP, Brazil

Abstract. This work presents the study of the Mathieu-Van der Pol autonomous system, also called tri-chaos. The Mathieu-Van der Pol system is a hyper-chaotic oscillator, with four state variables and three Lyapunov positive exponents, which was modeled through linear coupling of Mathieu and Van der Pol non-linear and non-autonomous systems. In order to investigate the complex dynamics of the equilibrium points of the tri-chaos system, in terms of stability and instability, the Lyapunov stability method was used, and for chaotic analysis of the system, the Wolf algorithm was applied to find the three Lyapunov exponents with positive values.

Keywords: Stability, Chaotic Dynamics, Lyapunov Exponents, Mathieu-Van der Pol.