

Comparação Entre Modelagens de Elementos de Eixo em Sistemas Rotativos

César Silva Rother, cesar.rother@gmail.com¹

Augusto Chrispim Mengalli Gilberti de Alencar, augustocmga@gmail.com¹

Tiago Henrique Machado, tiagomh@fem.unicamp.br¹

¹Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP, Rua Mendeleev, 200 - CEP 13083-860, Campinas - SP

Resumo: Este trabalho trata sobre a influência do modelo de eixo na simulação do comportamento dinâmico de um rotor utilizando o método dos elementos finitos. Um algoritmo computacional que permite simulações utilizando elementos de eixo de Timoshenko e de Euler-Bernoulli foi elaborado para permitir a execução dos testes. Para melhor isolamento dos efeitos apenas do eixo, considerou-se mancais rígidos e elementos de disco de parâmetros concentrados. Para os mancais rígidos, utilizou-se restrição parcial, permitindo os graus de liberdade angulares e restringindo os lineares, como completamente engastado. As análises são feitas a partir do Diagrama de Campbell e da Função Resposta em Frequência (FRF). Para comparar o efeito da proporção entre comprimento e diâmetro nos dois modelos propostos, foram utilizadas duas abordagens: variação do número de nós, mantendo fixas as dimensões do rotor e variação no diâmetro mantendo fixo o número de nós. Os resultados mostram que a diferença entre os modelos é pequena para todas as situações e inversamente proporcional à razão entre comprimento e diâmetro do eixo. Dessa forma, para eixos com maior L/D a diferença entre os modelos é desprezível.

Palavras-chave: Dinâmica de Rotores, Elementos Finitos, Viga de Timoshenko, Viga de Euler-Bernoulli

1. INTRODUÇÃO

Com cada vez mais relevância na indústria e, conseqüentemente, no meio acadêmico, a análise de vibração de rotores é impulsionada pela crescente variedade de sistemas em que pode ser empregada. Máquinas rotativas de grande porte e complexidade apresentam altos custos de fabricação e manutenção, aumentando a importância de análises adequadas, que previnam riscos operacionais.

Para que uma simulação computacional possa ser considerada válida, as respostas obtidas devem apresentar boa correlação com os resultados práticos e, para isso, um bom modelo é essencial. As escolhas de modelagem e discretização estão entre as considerações mais importantes em uma análise de elementos finitos (MacNeal, 1993). Dentre os elementos de um rotor, o eixo apresenta grande importância, sendo fundamental um bom modelo para sua representação, capaz de englobar os efeitos físicos mais significativos deste tipo de componente.

Neste contexto, este trabalho faz uma comparação entre dois dos modelos mais utilizados para análise de dinâmica de eixos rotativos: o modelo de Euler-Bernoulli e o modelo de Timoshenko, empregados na discretização de um eixo de rotor através do método dos elementos finitos.

A geometria de rotor utilizada é semelhante à encontrada em trabalhos clássicos da área como o de Jeffcott (1919). Uma geometria que apesar de simples permite a visualização do efeito giroscópico nas frequências de precessão, levando a um acréscimo na frequência de precessão no sentido de rotação (precessão direta) e um decréscimo no sentido contrário (precessão retrógrada) (Nelson, 2007).

2. MODELAGEM

Para uma análise dinâmica de boa qualidade para uma máquina rotativa, uma modelagem adequada dos componentes e de suas interações deve ser feita. Um rotor é composto por vários elementos: eixo, disco, mancais e fundações. Para um melhor isolamento dos efeitos da modelagem do eixo, adotou-se modelos simplificados de mancais e fundações.

Para as fundações, foram utilizados acoplamentos rígidos ao referencial inercial dos mancais. Os mancais utilizados são rígidos para os movimentos translacionais e livres para os movimentos rotacionais. Dessa forma, as extremidades estão apoiadas em relação ao referencial inercial. O disco é considerado como uma massa concentrada equivalente. Dessa forma, a influência do disco nas frequências naturais se dará apenas através da mudança na massa e do efeito giroscópico.

Com essa modelagem, consegue-se minimizar ao máximo a interferência dos demais componentes na resposta dinâmica do sistema para uma melhor visualização dos efeitos devidos ao eixo e sua modelagem.

Os dois modelos de elementos de viga diferem no tratamento do cisalhamento entre os planos. No modelo de Euler-Bernoulli, considera-se que os planos transversais se mantêm perpendiculares à linha normal, não havendo, portanto,

cisalhamento entre os planos. O modelo de Timoshenko, por sua vez, considera a inclinação entre os planos transversais e a linha normal (Fig. 1), e calcula os efeitos de deflexão através deles.

Como há diferença entre os dois modelos nas considerações do cisalhamento, espera-se que a maior diferença entre os resultados obtidos por cada modelo seja em situações que o cisalhamento tenha uma importância significativa, ou seja, em situações em que os planos transversais apresentam desvio considerável da orientação perpendicular à linha normal. É esperado esse desvio em vigas que possuam uma razão entre comprimento e diâmetro pequena, em que a flexão será pequena, devido à rigidez da viga e que o efeito de cisalhamento será pronunciado devido à distância entre os planos longitudinais.

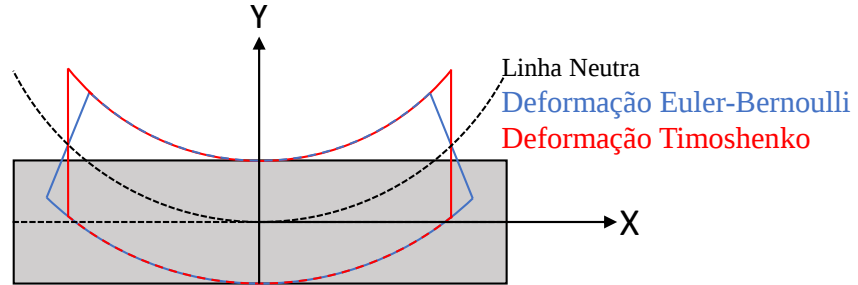


Figura 1: Comparação entre as considerações em cada elemento de viga

Para identificar as razões entre comprimento e diâmetro que levam a diferenças entre as duas abordagens, realizou-se simulações computacionais. A análise de um rotor com vários graus de liberdade é um problema consideravelmente complexo, com soluções analíticas elaboradas. Uma solução analítica viável pode exigir diversas simplificações que levariam a perda de precisão, por isso adotou-se uma abordagem numérica. Foi escrito um algoritmo de elementos finitos em MATLAB® que permitisse uma fácil mudança nos parâmetros de eixo e de discretização, para realizar as simulações necessárias para a verificação dos efeitos. Foram testadas variações na razão comprimento e diâmetro tanto para o eixo como um todo, como para cada elemento, através de variações no diâmetro do eixo e na quantidade de nós do modelo de elementos finitos.

A equação do sistema completo, com as devidas matrizes de elementos finitos, é definida por (Krämer, 1993):

$$[M]\{\ddot{x}\} + ([C] + \omega[G])\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \quad (1)$$

A matriz de massa $[M]$ é obtida através da análise geométrica dos componentes, como proposto por (Tuckmantel, 2010) considerando parâmetros concentrados onde necessário. A matriz de amortecimento utiliza apenas o amortecimento interno do eixo, que pode ser representado pela equação:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (2)$$

Como mostrado em Liu and Novak (1995), para eixos de aço, uma boa estimativa é que o coeficiente alfa é nulo e o coeficiente beta deve ser ajustado de acordo com as características do material e do sistema. Sendo assim, para este trabalho foram adotados os valores de $\alpha = 0$ e $\beta = 2 \times 10^{-4}$.

Para as matrizes de rigidez, utilizou-se ambas modelagens de viga, para que pudessem ser comparadas. A matriz de rigidez global $[K]$ inclui a matriz de rigidez à flexão para cada um dos elementos, superpostas de acordo com a distribuição dos nós e dos elementos. Para o modelo de Timoshenko, a matriz de rigidez de cada elemento é dada por:

$$[K_B] = \frac{E J_t}{l^3 (1 + 12\Phi)} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 6l & -12 & 0 & 0 & 6l \\ 0 & 12 & -6l & 0 & 0 & -12 & -6l & 0 \\ 0 & -6l & 4l^2(1+3\Phi) & 0 & 0 & 6l & 2l^2(1-6\Phi) & 0 \\ 6l & 0 & 0 & 4l^2(1+3\Phi) & -6l & 0 & 0 & 2l^2(1-6\Phi) \\ -12 & 0 & 0 & -6l & 12 & 0 & 0 & -6l \\ 0 & -12 & 6l & 0 & 0 & 12 & 6l & 0 \\ 0 & 6l & 2l^2(1-6\Phi) & 0 & 0 & 6l & 4l^2(1+3\Phi) & 0 \\ 6l & 0 & 0 & 2l^2(1-6\Phi) & -6l & 0 & 0 & 4l^2(1+3\Phi) \end{bmatrix} \quad (3)$$

sim.

Em que E é o módulo de Young do material, l o comprimento do elemento e J_t o momento de inércia transversal.

A diferença entre o modelo de Euler-Bernoulli é a ausência do coeficiente de cisalhamento Φ na matriz apresentada na Eq. 3. A análise foi, portanto, simplificada utilizando a mesma matriz e apenas tornando nulos os coeficientes dos termos de cisalhamento quando o modelo de Euler-Bernoulli foi usado e calculando-o para o modelo de Timoshenko conforme a

Eq. 4

$$\Phi = \frac{12EJ_t\chi}{GAJ^2} \quad (4)$$

Em que χ é o fator de cisalhamento, G o módulo de elasticidade transversal e A a área de seção transversal do elemento.

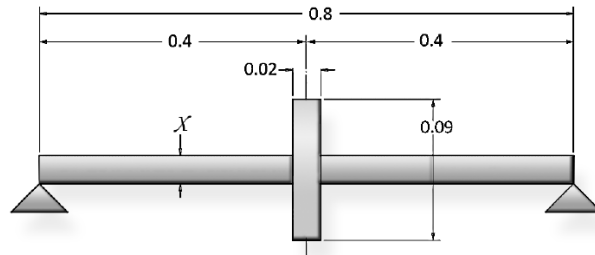


Figura 2: Rotor utilizado nas simulações

As matrizes de elementos de eixo foram montadas através do modelo de Timoshenko, como apresentado por (Nelson, 1980) e quando o modelo de Euler foi usado, foi necessário apenas tornar nulos os coeficientes das matrizes referentes ao cisalhamento.

A simulação de rotores foi montada com os demais parâmetros e métodos conforme os descritos por (Krämer, 1993). Na análise modal, apenas os modos de vibrar abaixo de 400 Hz foram considerados para os 4 primeiros casos, pois frequências muito altas são, na maioria dos casos, pouco relevantes para a operação dos sistemas. Para os dois últimos casos, entretanto, a maior rigidez do eixo fez com que fosse necessária uma análise até frequências mais altas para que fosse possível visualizar os outros modos de vibrar.

As dimensões do rotor simulado podem ser vistas na Fig. 2. A configuração base, em que as simulações 1 a 4 são realizadas, utiliza um eixo de 800 mm de comprimento e 10 mm de diâmetro. Esta configuração é similar à bancada experimental presente no LAMAR - UNICAMP, o que possibilita futuras verificações experimentais dos dados dessas simulações. Para as simulações 5 e 6, variou-se o diâmetro do eixo, para explorar a variação de proporção do eixo.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para a análise dos resultados, foram escolhidas simulações que pudessem cobrir uma faixa de razões usuais de proporção entre comprimento e diâmetro do eixo. Manteve-se o número de nós baixo na maioria das simulações para que as razões dos elementos fossem mantidas em valores próximos aos das razões do eixo. O caso 4 constitui uma exceção e foi escolhido para investigar os efeitos de uma grande discretização e de um valor muito baixo de L/D para o elemento. A Tabela 1 apresenta as características dos 6 casos simulados neste trabalho.

Tabela 1: Características dos casos simulados

Caso	Comprimento do Eixo (mm)	Diâmetro do Eixo (mm)	Número de Elementos	$\frac{L}{D_{eixo}}$	$\frac{L}{D_{elem}}$
1	800	10	2	80	40
2	800	10	4	80	20
3	800	10	8	80	10
4	800	10	80	80	1
5	800	20	4	40	10
6	800	40	2	20	10

Iniciou-se as simulações pela configuração de rotor com 800mm de comprimento e 10mm de diâmetro de eixo. O caso 1 apresenta a menor discretização possível para o algoritmo utilizado: 3 nós, o que possibilita a colocação das condições de contorno nas extremidades e dos efeitos do disco no centro. A Fig. 3 mostra a amplitude e a fase da FRF obtida utilizando cada uma das diferentes modelagens de eixo.

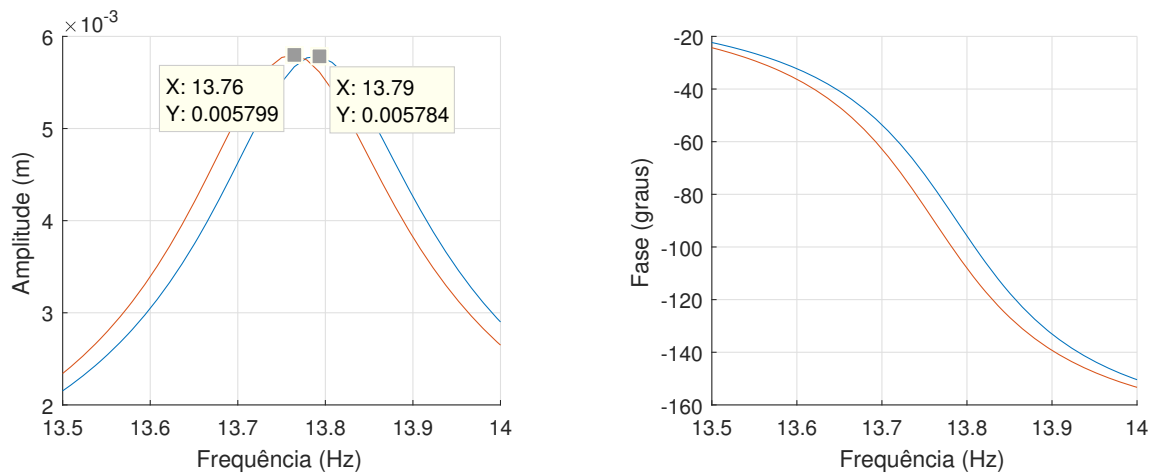


Figura 3: FRF e fase ampliadas em torno do pico para a modelagem por Euler-Bernoulli (azul) e Timoshenko (vermelho) - Caso 1

Analisando a Fig. 3, nota-se que as diferenças entre os resultados obtidos com cada um dos modelos é pequena. Tanto os valores dos picos de amplitude como o valor das frequências críticas são muito próximos. Para o gráfico de fase, o comportamento também é similar.

A Fig. 4 traz a comparação do diagrama de Campbell do sistema para cada um dos modelos utilizados. Através da análise destes diagramas de Campbell pode-se confirmar as frequências já observadas nos gráficos da Fig. 3 para o primeiro modo, assim como notar que para o terceiro modo há uma maior diferença entre resultados obtidos com cada um dos modelos.

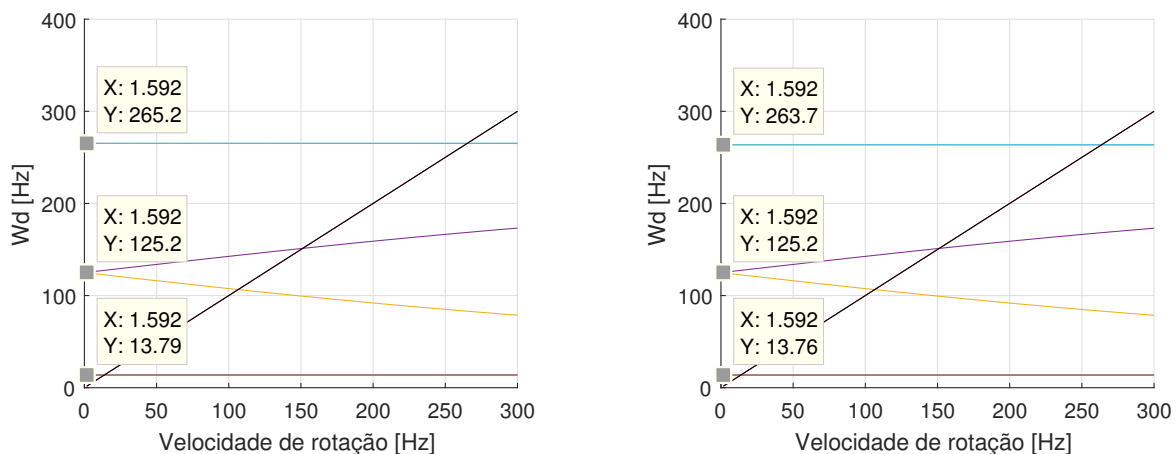


Figura 4: Diagrama de Campbell usando os modelos de Euler-Bernoulli (esquerda) e Timoshenko (direita) para o Caso 1

As Figs. 5 e 6 trazem os resultados da FRF do diagrama de Campbell, respectivamente, para o caso 2 apresentado na Tab. 1.

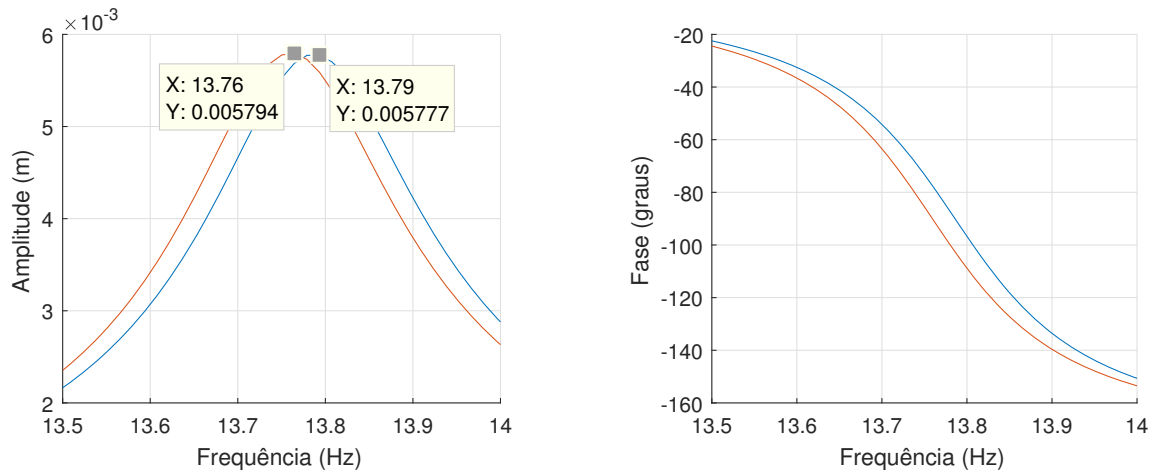


Figura 5: FRF e fase ampliadas em torno do pico para a modelagem por Euler-Bernoulli (azul) e Timoshenko (vermelho) - Caso 2

Para este caso 2, aumentou-se a discretização para 5 nós, ou seja, 4 elementos. Pode-se fazer duas comparações distintas para esse caso: entre os modelos e entre os resultados obtidos para o caso 1 (comparar Figs. 3 e 5). Entre os modelos nota-se a pequena diferença entre eles nas regiões em torno da primeira frequência natural e os resultados da análise modal para o primeiro modo são muito similares aos observados para o caso 1. Já com relação ao diagrama de Campbell, pode-se notar que há uma diferença um pouco maior entre os modelos para o segundo e terceiro modos, algo bem mais evidente do que ocorreu para o caso 1. Isso mostra que nos modos mais altos há maior influência da discretização do sistema.

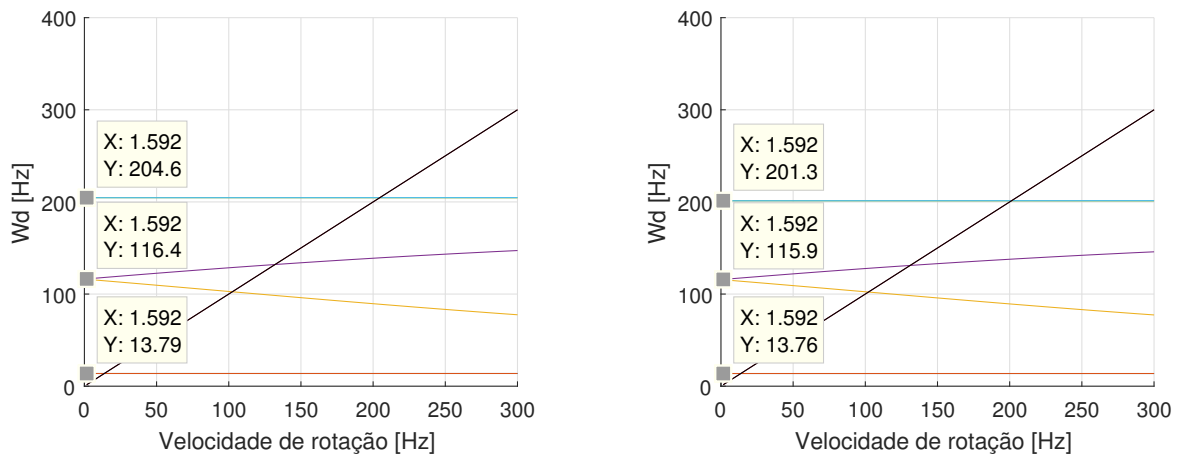


Figura 6: Diagrama de Campbell usando os modelos de Euler-Bernoulli (esquerda) e Timoshenko (direita) para o Caso 2

As próximas figuras, Figs. 7 e 8, trazem os resultados para o terceiro caso analisado. Para este caso 3, se repete a tendência já observada, a pequena diferença entre os modelos e a influência da discretização na resposta em altas frequências. A diferença entre esta simulação e a anterior é bem menor que a notada entre a primeira e a segunda, indicando que para os modos que estão sendo analisados o aumento de 5 para 9 nós teve um impacto bem menor que de 3 para 5.

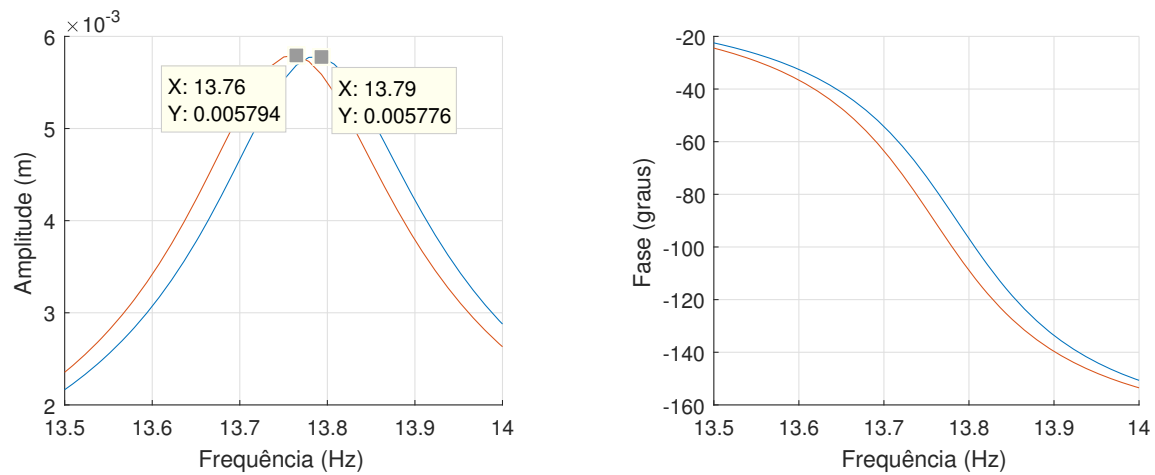


Figura 7: FRF e fase ampliadas em torno do pico para a modelagem por Euler-Bernoulli (azul) e Timoshenko (vermelho) - Caso 3

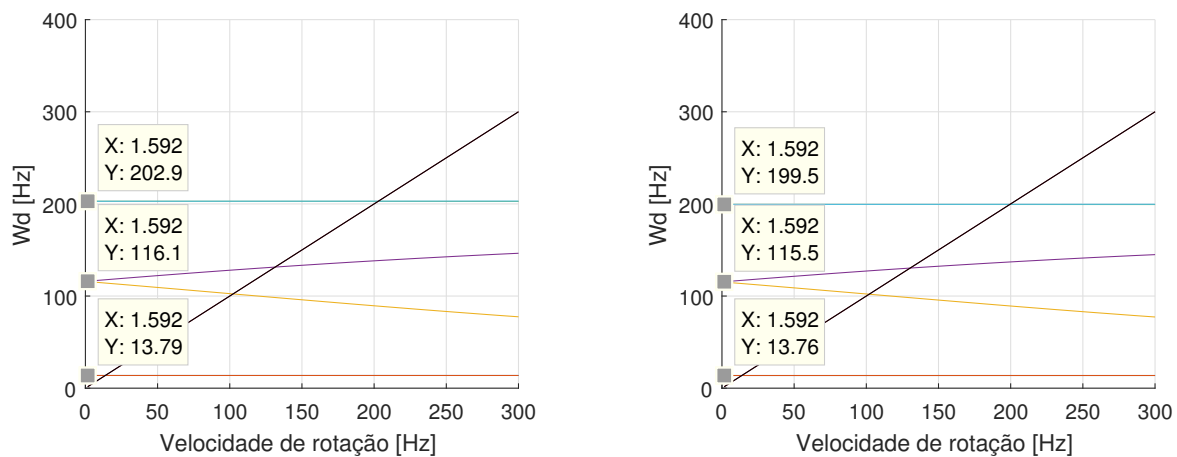


Figura 8: Diagrama de Campbell usando os modelos de Euler-Bernoulli (esquerda) e Timoshenko (direita) para o Caso 3

A última simulação realizada com o eixo de 10 mm de diâmetro foi feita com uma discretização de 81 nós para obtermos 80 elementos. Com essa discretização obtém-se uma razão $L/D = 1$ para o elemento. O intuito é observar se há diferenças entre os modelos para esse nível de discretização. Os resultados para esta simulação são apresentados nas Figs. 9 e 10. Pode-se notar que as diferenças são praticamente idênticas às notadas nas simulações anteriores, indicando que este nível de discretização não traz diferenças ao se comparar os dois modelos de eixo analisados neste trabalho.

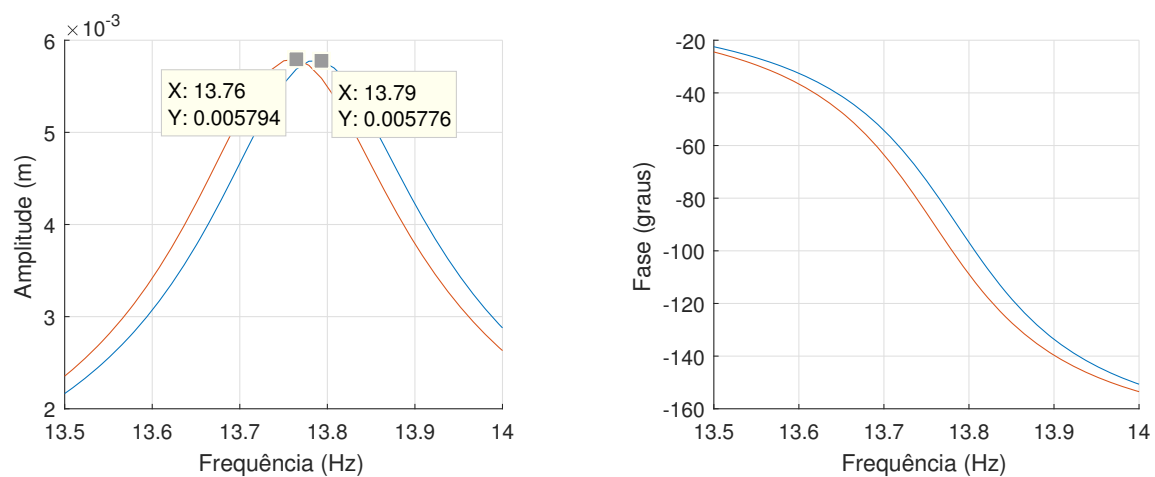


Figura 9: FRF e fase ampliadas em torno do pico para a modelagem por Euler-Bernoulli (azul) e Timoshenko (vermelho) - Caso 4

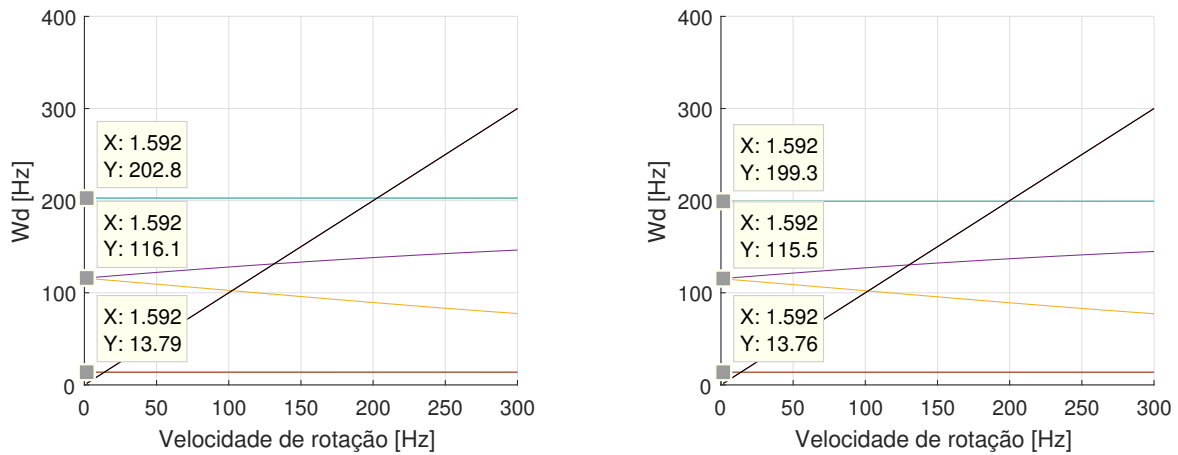


Figura 10: Diagrama de Campbell usando os modelos de Euler-Bernoulli (esquerda) e Timoshenko (direita) para o Caso 4

Após realizadas as simulações com variações na discretização, que mantinham a proporção do eixo e variavam a proporção do elemento, iniciou-se as simulações com variação das proporções do eixo mantendo as do elemento. Os resultados da primeira simulação deste novo bloco de testes, caso 5, são apresentadas nas Figs. 11 e 12. Apesar de a diferença entre os modelos ainda ser pequena, pode-se notar que é maior do que a apresentada nas simulações anteriores.

A Fig. 11 mostra que a variação na primeira frequência crítica é um pouco maior que as variações observadas nos casos anteriores. Já para a Fig. 12, nota-se um aumento da diferença das frequências dos segundo e terceiro modo. Vale ressaltar que, para este caso, a faixa de frequência simulada para obtenção do diagrama de Campbell teve que ser alterada, sendo agora de 0 a 600 Hz - o limite do algoritmo - uma vez que, com a variação da relação comprimento/diâmetro do eixo, maiores são os valores das frequências críticas.

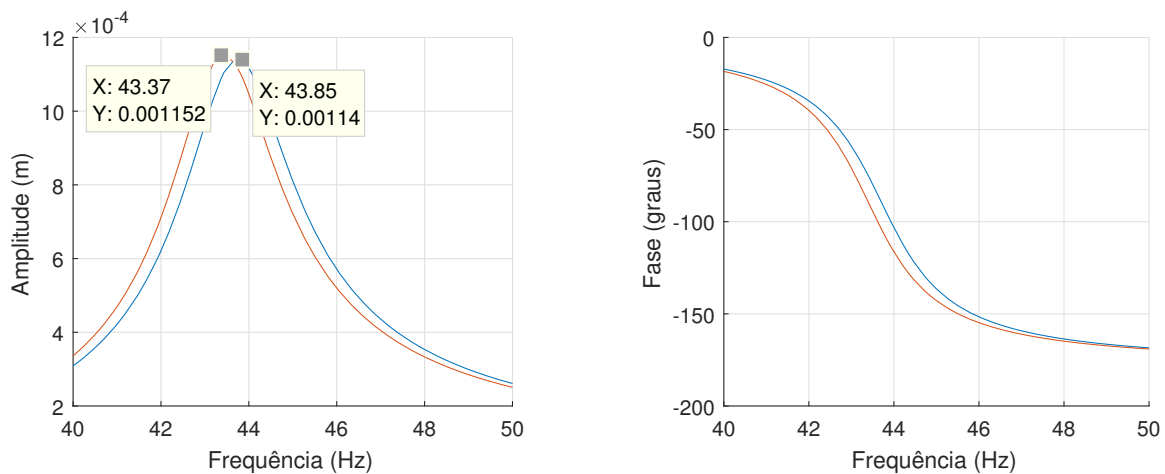


Figura 11: FRF e fase ampliadas em torno do pico para a modelagem por Euler-Bernoulli (azul) e Timoshenko (vermelho) - Caso 5

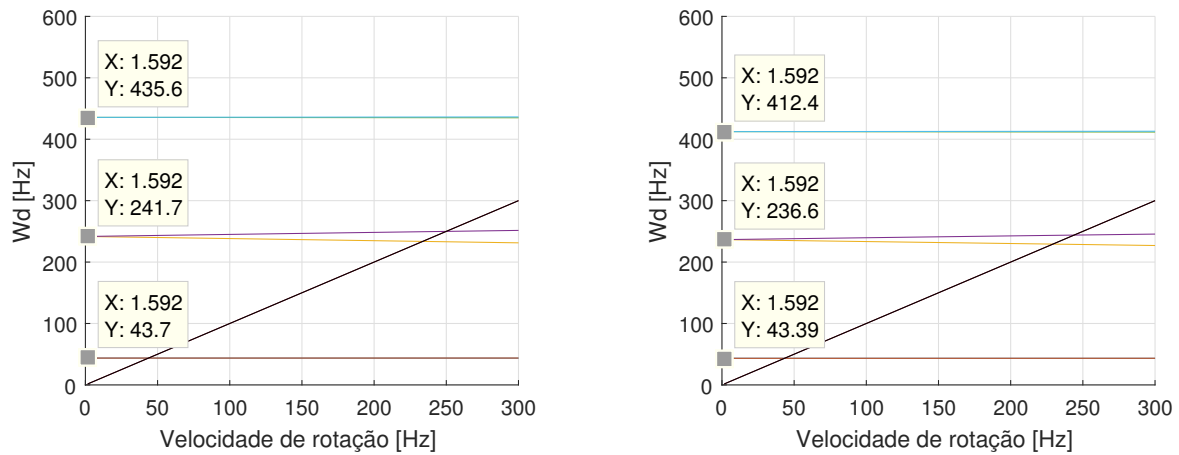


Figura 12: Diagrama de Campbell usando os modelos de Euler-Bernoulli (esquerda) e Timoshenko (direita) para o Caso 5

Por fim, os últimos resultados são apresentados nas Figs. 13 e 14, referentes ao caso 6. Pode-se observar uma nova diminuição na proporção entre comprimento e diâmetro do eixo torna mais visível a diferença entre os modelos. Para essa simulação os efeitos são mais pronunciados e não é necessário ampliar os gráficos da FRF, como feito em todos os casos anteriores, para que as diferenças possam ser percebidas.

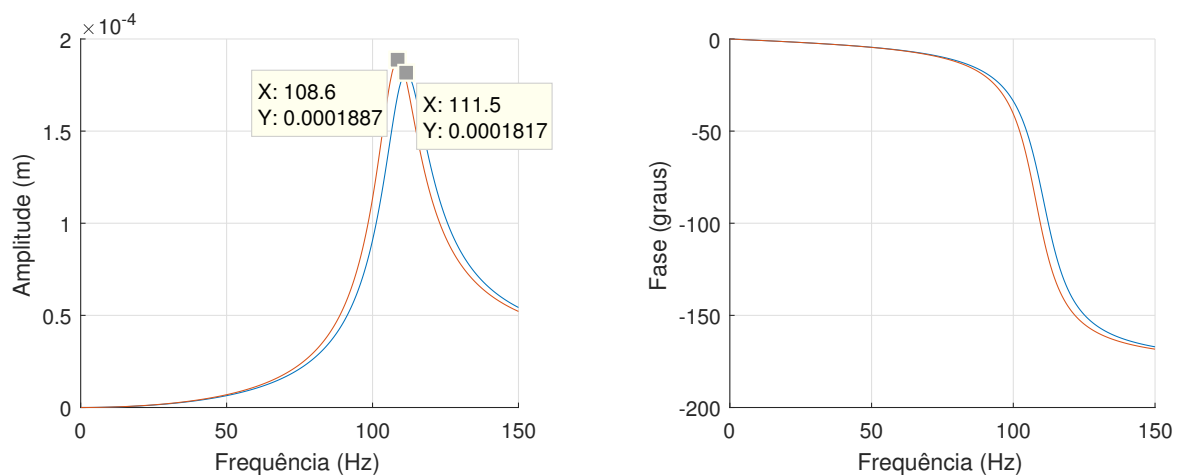


Figura 13: FRF e fase para a modelagem por Euler-Bernoulli (azul) e Timoshenko (vermelho) - Caso 6

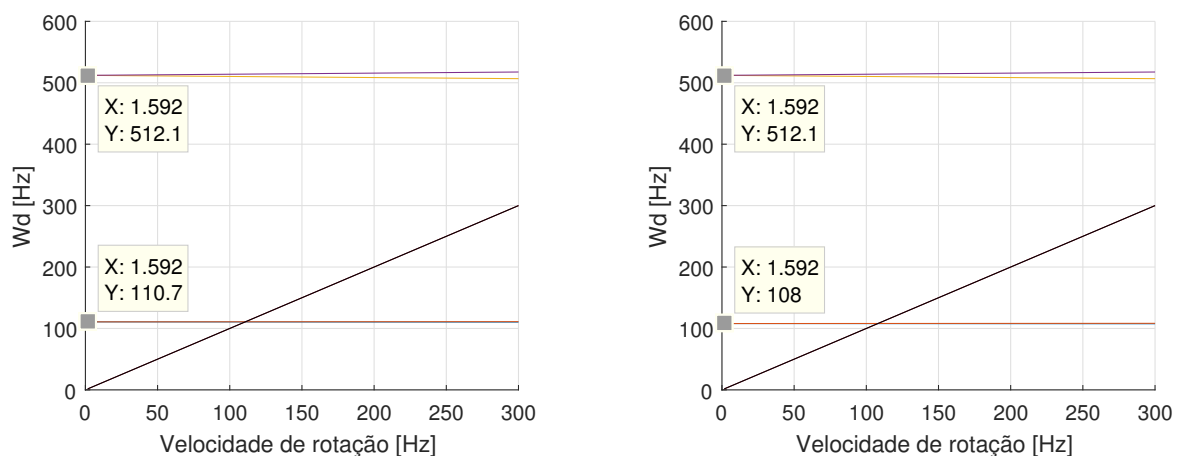


Figura 14: Diagrama de Campbell usando os modelos de Euler-Bernoulli (esquerda) e Timoshenko (direita) para o Caso 6

De forma a sumarizar alguns dos resultados encontrados e facilitar a comparação, a Tab. 2 traz uma avaliação da variação da primeira frequência crítica, em cada um dos seis casos simulados, comparando os dois modelos de eixo analisados no trabalho.

Tabela 2: **Resumo dos resultados para a primeira frequência crítica**

Caso	$\frac{L}{D_{eixo}}$	$\frac{L}{D_{elem}}$	ω_{n1} Timoshenko [Hz]	ω_{n1} Euler-Bernoulli [Hz]	$100\% - \frac{\omega_{n1T}}{\omega_{n1E}}$
1	80	40	13,76	13,79	0,22%
2	80	20	13,76	13,79	0,22%
3	80	10	13,76	13,79	0,22%
4	80	1	13,76	13,79	0,22%
5	40	10	43,39	43,70	0,71%
6	20	10	108,6	110,70	1,90%

4. CONCLUSÃO

Este trabalho traz uma extensa análise sobre a influência da modelagem do eixo no comportamento dinâmico de sistemas rotativos. Dois modelos clássicos foram testados, Euler-Bernoulli e Timoshenko. A influência desta modelagem foi analisada na função resposta em frequência (FRF) e no diagram de Campbell do sistema. Analisando os dados da Tab. 2, pode-se perceber que o fator determinante na diferença entre os modelos é a razão entre comprimento e diâmetro do eixo. Mesmo a grande mudança na L/D do elemento entre o caso 1 e o caso 4 não foi suficiente para modificar os resultados entre os modelos, enquanto as mudanças nas proporções do eixo provocaram alterações perceptíveis. Além dos fatores que afetam a diferença entre os modelos, também foi possível avaliar a influência da discretização na resposta das simulações. Para as análises realizadas não há ganhos perceptíveis no aumento da discretização acima de 9 nós. E se apenas o primeiro modo for relevante, até mesmo o uso de apenas 3 nós gera resultados adequados para o rotor utilizado.

5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CAPES, CNPq e projeto nº 2017/07454-8 da Fundação de Pesquisa de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro a esta pesquisa.

6. REFERÊNCIAS

- Jeffcott, H.H., 1919. "Dynamic behaviour of turbine-generator-foundation". *Philosophical Magazine*, Vol. 6, p. 304.
- Krämer, E., 1993. *Dynamics of Rotors and Foundations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH. ISBN 978-3-662-02800-1. doi:10.1007/978-3-662-02798-1.
- Liu, W. and Novak, M., 1995. "Dynamic behaviour of turbine-generator-foundation". *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 24, pp. 339–360.
- MacNeal, R., 1993. *Finite Elements: Their Design and Performance*. CRC Press.
- Nelson, F.C., 2007. "Rotordynamics without equations". *International Journal of COMADEM*, Vol. 10, pp. 2–10.
- Nelson, H.D., 1980. "A finite rotating shaft element using timoshenko beam theory". *Journal of Mechanical Design*, Vol. 102, pp. 793–803.
- Tuckmantel, F.W.S., 2010. *Integração de sistemas rotor-mancais hidrodinâmicos-estrutura de suporte para resolução numérica*. Tese de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

7. RESPONSABILIDADE AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho.

Comparison of Shaft Element Models in Rotating Systems

César Silva Rother, cesar.rother@gmail.com¹

Augusto Chrispim Mengalli Gilberti de Alencar, augustocmga@gmail.com¹

Tiago Henrique Machado, tiagomh@fem.unicamp.br¹

¹Mechanical Engineering School, UNICAMP, Mendeleyev Street, 200 - CEP 13083-860, Campinas - SP

Abstract: This paper studies shaft model influence in simulation of rotors dynamic behavior, using the finite element method. A computational algorithm was developed using both shaft models: Timoshenko and Euler-Bernoulli, allowing comparisons between them. To restrict changes in response to the shaft model, rigid bearings and lumped mass disc modeling are used. Rigid bearings are partially constrained - allowing angular degrees of freedom and restricting translation. Analysis are done through Campbell Diagram and frequency response function (FRF). To compare the effect of length to diameter ratio, two approaches are used: changing the number of nodes keeping the same rotor dimension and changing dimensions keeping the same number of nodes. Results shows small differences between models for all situations and inversely proportional to shaft length to diameter ratio. This way, the difference between models is small, and can be despised when modeling slender shafts.

Keywords: Rotordynamics, Finite Element Method, Timoshenko beam, Euler-Bernoulli beam