



20 A 24 DE MAIO DE 2018 SALVADOR – BA – BRASIL

ANÁLISE DAS PROPRIEDADES DOS MODOS NORMAIS NÃO LINEARES EM UMA VIGA

Lucas Zanovello Tahara, lucaszanov@gmail.com

Ana Cristina Neves Carloni, ana.nevescarloni@gmail.com

Rafael de Oliveira Teloli, teloli.r@gmail.com

Samuel da Silva, samuel@dem.feis.unesp.br

UNESP - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia, Departamento de Engenharia Mecânica, Ilha Solteira, SP

Resumo: Os modos normais não lineares (NNMs) são excelentes ferramentas para caracterizar não linearidades em estruturas. As propriedades inerentes aos NNMs permitem estudar diversos fenômenos que ocorrem em sistemas mecânicos, e podem ser incorporados em modelos físico-matemáticos para predição do comportamento desses sistemas. Neste sentido, o presente trabalho busca desenvolver uma análise qualitativa de uma viga de alumínio com condição de contorno engastada-livre com um imã na extremidade livre, com o intuito de identificar e analisar as propriedades dos modos normais não lineares. Avaliou-se o comportamento do sistema e os limites de amplitude da força de excitação para caracterizar efeitos não lineares. Os resultados mostram que, dependendo do nível de excitação, existe uma dependência entre a frequência e a amplitude de excitação. Para baixas amplitudes de excitação, a viga tem comportamento aproximadamente linear caracterizado pela invariância da frequência natural do sistema. Já para altas amplitudes de excitação, observou-se variação na frequência natural do sistema, ou seja, incrementos ou decrementos de energia influenciaram os parâmetros modais da estrutura.

Palavras-chave: Modos Normais Não Lineares, Análise Modal Experimental, Vibrações Não Lineares.

1. INTRODUÇÃO

O conceito de modo normal relaciona-se com a teoria de sistemas vibratórios. Considerando o aspecto matemático, os modos normais lineares (LNMs¹) podem ser usados para desacoplar as equações de movimento de um sistema, tendo por consequência propriedades como invariância e superposição modal. A linearidade, entretanto, é uma idealização. O que ocorre nas aplicações reais são fenômenos decorrentes da não linearidade. Na maioria das aplicações de engenharia ocorrem fenômenos não lineares, ou seja, considerar modelos essencialmente lineares acarreta um erro de aproximação, visto que no campo não linear tem-se a quebra de hipóteses que são consideradas no campo linear (Virgin, L. N. (2000); Worden, K., Tomlinson, G. R. (2001); Kovacic, I., Brennan, M. (2011)). Dessa forma, os modos normais não lineares (NNM²) conceituam-se na teoria de sistemas que operam em regime não linear.

Ao contrário dos modos normais lineares, os NNMs não apresentam propriedades como invariância e superposição modal, o que torna sua análise complexa. Uma definição para NNMs é dada por Rosenberg, R. M. (1960), que conceitua *uma vibração em uníssono* do sistema, ou seja, uma oscilação síncrona (Rosenberg, R. M. (1960); Rosenberg, R.M. (1962, 1966)). Deve-se entender que, diferentemente da teoria baseada na linearidade, em sistemas não lineares não se aplica o princípio da superposição e, na maioria das aplicações, a análise se torna extremamente complexa. Além disso, a falta de relações de ortogonalidade ao se tratar de NNMs dificulta o estudo no aspecto de redução de ordem da dinâmica não linear (Kerschen, G., Peeters, M., Golinval, J. C., Vakakis, A. F. (2009)). A tabela 1 mostra algumas das principais diferenças entre os LNMs e os NNMs.

Quando se trata da teoria e análise de NNMs, a maioria dos engenheiros de estruturas demonstram dificuldades em utilizá-los, seja pela falta de programas ou procedimentos consolidados de uso prático. Assim, este trabalho buscou verificar experimentalmente a presença de NNMs em uma viga engastada-livre, usando como base a comparação de algumas das propriedades apresentadas na tab. 1). A viga é submetida a elevados níveis de amplitude de força de excitação para causar regimes de vibração não linear (Andrade, V. S. (2009)). O estudo da ocorrência de comportamento não linear da viga foi realizado através da análise do histórico temporal

¹Do inglês, *Linear Normal Modes*

²Do inglês *Nonlinear Normal Modes*

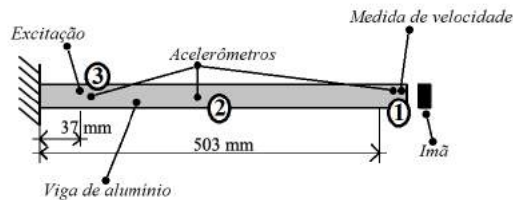
de suas respostas de vibração, espaço de configuração, dependência frequência-energia³ e densidade espectral de potência⁴. As seções a seguir apresentam a descrição da bancada experimental utilizada, a aplicação da análise de NNMs em dados experimentais e, por fim, apresentam-se as vantagens e desvantagens da metodologia proposta.

Tabela 1: Características dos modos normais lineares e não lineares - comparação.

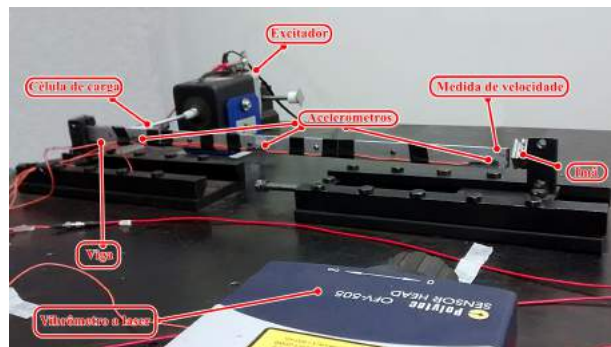
	Linear	Não Linear
Deformação na ressonância	Sim	Sim
Princípio da superposição	Sim	Não
Invariância dos parâmetros modais	Sim	Não
Reciprocidade	Sim	Não
Homogeneidade	Sim	Não
Ortogonalidade	Sim	Não
Deslocamento no tempo	Fora de fase	Em fase
Espaço de configuração	Linear decrescente	Cúbico crescente
Espaço de fase	Elipse	Elipse deformada
Harmônicas	Não	Sim
Dependência frequência-energia	Não	Sim

2. DESCRIÇÃO DA BANCADA EXPERIMENTAL

A bancada experimental utilizada é composta de uma viga de alumínio com condição de contorno engastada-livre e com dimensões 503 [mm] × 19 [mm] × 3 [mm], conforme a fig. 1. Uma massa metálica foi conectada na extremidade livre da viga com o intuito de causar interação magnética entre a viga de alumínio e o ímã de neodímio preso na ponta do suporte livre. O ímã foi colocado para ocasionar o efeito geométrico e funcionar como mecanismo para induzir um comportamento cúbico na rigidez.



(a) Esquema do aparato.



(b) Bancada utilizada para os ensaios.

Figura 1: Aparato experimental.

O excitador foi posicionado a 37 [mm] da extremidade engastada da viga e o monitoramento da resposta foi feito por meio de acelerômetros e um vibrômetro a laser. Os equipamentos, sensores e atuadores usados para os testes experimentais foram um excitador *Modal Shop*® 2400E, uma célula de carga *Dytran*® 1022V, o sistema de aquisição de dados m+p *VibPilot*® e um vibrômetro a laser *Polytec*® OFV-525/-5000-S. Os acelerômetros foram numerados como mostra a fig. 1.

Foi feita uma análise modal preliminar, para regime linear de movimento e regime não linear, com o intuito de avaliar a variação dos parâmetros modais. O procedimento é explicitado com detalhes na seção a seguir. Após essa análise, com o objetivo de avaliar o comportamento não linear a partir dos sinais de resposta da bancada experimental, aplicou-se como excitação uma onda senoidal com baixa amplitude de tensão elétrica aplicada para acionar o excitador (0.01 V) e alta amplitude (0.40 V). Para verificar a existência do fenômeno de salto na estrutura, realizou-se o teste de varredura senoidal em regime permanente considerando diferentes amplitudes de tensão elétrica aplicada no excitador. Todos os sinais foram adquiridos com taxa de amostragem de 1024 Hz. Após a análise da varredura senoidal, foram feitos testes com baixa amplitude de excitação (0.01 V) e frequência de excitação em torno de 52 Hz, próximo da frequência de ressonância da estrutura no segundo modo de vibrar, e depois aumentou-se a amplitude gradativamente, até 0.40V. Nesta etapa, foram adquiridos um total de 50 blocos de resposta, sendo cada bloco com duração de 8 segundos e 8192 amostras, de forma que o atuador aplicou força de excitação nos 4 segundos iniciais de cada bloco, e nos 4 segundos restantes a

³Do inglês, *Frequency-Energy Plot* - FEP

⁴Do inglês, *Power Spectral Density* - PSD

viga apresentou resposta livre. Foram utilizados 50 blocos para garantir a operação em regime permanente, diminuindo assim efeitos de transiente. Com os resultados obtidos, efetuou-se a análise do histórico temporal, espaço de fase e configuração e, por fim, dependência frequência-energia.

3. RESULTADOS DOS TESTES EXPERIMENTAIS

3.1 Análise Modal da Estrutura Vibrando em Regime Linear

Inicialmente, foi feita uma análise da resposta temporal e em frequência do sistema vibrando em regime linear de movimento, para extrair os parâmetros modais. A estrutura foi excitada com uma amplitude de tensão elétrica de 0.01 V e uma faixa de frequência entre 1 e 180 Hz. Com o sinal obtido, pôde-se estimar a função de resposta em frequência ⁵ e, pelo método *line-fit* proposto por Ewins (2000) foi possível obter os valores de frequência natural (ω_n), razão de amortecimento (ξ) e frequência natural amortecida (ω_d) para o primeiro e segundos modos de vibrar. Esse método considera os valores compreendidos em intervalos menores que o passo de amostragem, de 0.25 Hz, e trabalha com estimativas e aproximações para encontrar o valor mais próximo, com erro pré-determinado, resultando nos valores:

- $\omega_{n1} = 9.450$ Hz; $\omega_{d1} = 9.447$ Hz ; $\xi_1 = 0.025$
- $\omega_{n2} = 51.578$ Hz; $\omega_{d2} = 51.574$ Hz ; $\xi_2 = 0.013$

Na sequência, foi feita uma análise do primeiro modo de vibrar da estrutura. A análise foi feita a partir da configuração da estrutura em função dos dados dos acelerômetros para deslocamento, via integração em frequência. A fig. 2 mostra o resultado obtido. Na subseção a seguir, o mesmo processo foi feito e pode-se notar uma diferença na configuração para o mesmo modo de vibrar.

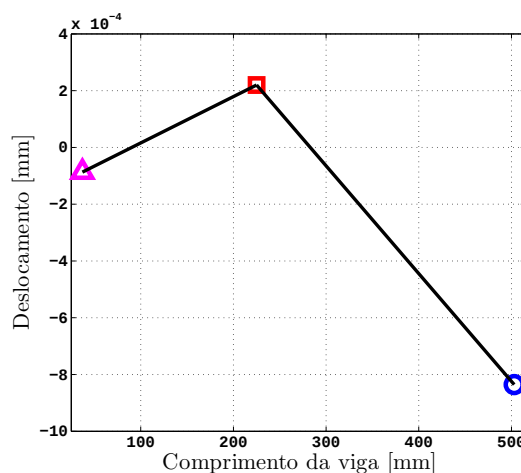


Figura 2: Configuração da estrutura para regime linear no primeiro modo de vibrar. Marcador em triângulo (Δ) representa dados do acelerômetro 3, quadrado ($\square$) dados do acelerômetro 2 e círculo ($\circ$) dados do acelerômetro 1.

3.2 Análise Modal da Estrutura Vibrando em Regime Não Linear

Para o regime não linear, primeiramente foi feita uma análise da resposta temporal e em frequência do sistema vibrando em regime não linear de movimento, para extrair os parâmetros modais. A estrutura foi excitada com uma amplitude de tensão elétrica de 0.50 V e uma faixa de frequência entre 1 e 180 Hz. Com o sinal obtido, pôde-se estimar a função de resposta em frequência e, pelo método *line-fit* proposto por Ewins (2000) foi possível obter os valores de frequência natural (ω_n), razão de amortecimento (ξ) e frequência natural amortecida (ω_d) para o primeiro e segundos modos de vibrar:

- $\omega_{n1} = 9.544$ Hz; $\omega_{d1} = 9.543$ Hz ; $\xi_1 = 0.018$
- $\omega_{n2} = 51.135$ Hz; $\omega_{d2} = 51.136$ Hz ; $\xi_2 = 0.001$

Na sequência, foi feita uma análise do primeiro modo de vibrar da estrutura. A análise foi feita a partir da configuração da estrutura em função dos dados dos acelerômetros para deslocamento, via integração em frequência. A fig. 3 mostra o resultado obtido.

⁵Do inglês, *Frequency Response Function* - FRF

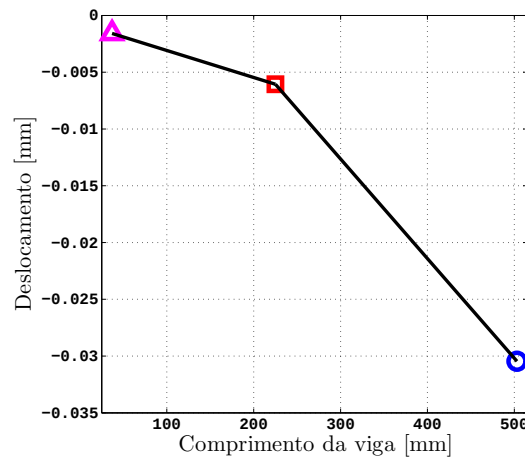
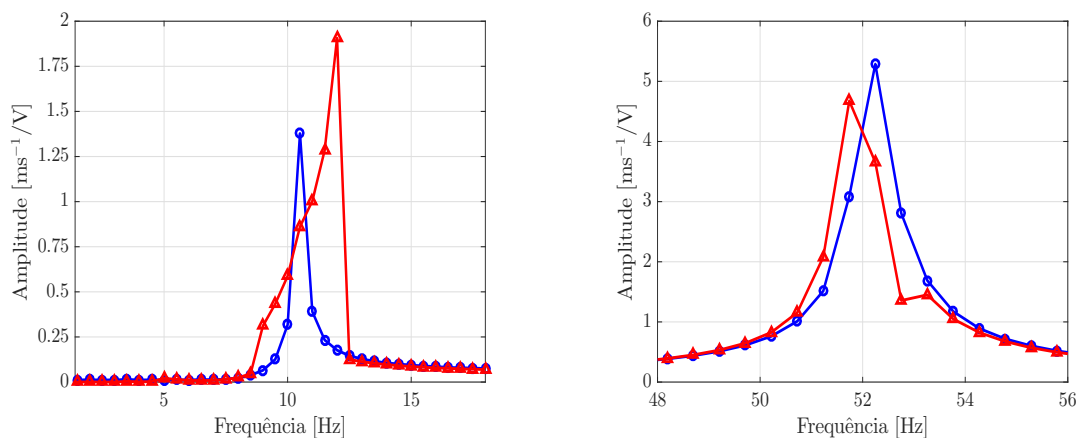


Figura 3: Configuração da estrutura para regime não linear no primeiro modo de vibrar. Marcador em triângulo ($\triangle$) representa dados do acelerômetro 3, quadrado ($\square$) dados do acelerômetro 2 e círculo ($\circ$) dados do acelerômetro 1.

Da figura 3a, anterior, em comparação com a fig. 2a, pode-se concluir que para o primeiro modo de vibrar da estrutura, as configurações da estrutura são diferentes. Isso significa que a modificação na amplitude de tensão elétrica aplicada ao excitador e, conseqüentemente, de excitação, provoca mudança na configuração do sistema para o mesmo modo de vibrar (mesma frequência de ressonância). Outras variações perceptíveis foram no valor da frequência natural, razão e amortecimento e frequência natural amortecida, fato que comprova a presença de não linearidade na estrutura.

Em seguida, para verificar a ocorrência de não linearidade na estrutura, fez-se uma varredura senoidal denominada *stepped sine* para baixos e altos níveis de amplitude de tensão elétrica aplicada para acionar o excitador, sendo eles 0.01 V e 0.40 V. Dessa maneira, pôde-se observar a ocorrência do fenômeno de salto, ou seja, variação da frequência de ressonância da estrutura em consequência do aumento do nível de amplitude. A figura 4a mostra o gráfico obtido pelo teste, para o primeiro modo de vibrar (em torno de 10.5 Hz). Pelo fato de ocorrer essa variação da frequência de ressonância, constata-se que o sistema se comporta de modo não linear em altas amplitudes de excitação, pois não houve mudança de parâmetros físicos (massa ou rigidez), mas somente efeitos de não linearidade. Deve-se ressaltar que a frequência de ressonância para o primeiro modo de vibrar não é exatamente o pico mostrado no gráfico, pois o passo utilizado foi de 0.5 Hz, então o valor exato encontra-se em torno de 10.5 Hz, que é o valor do pico (para comportamento linear).

Para a verificação da dependência frequência-energia, foi feito um teste de varredura senoidal para diversas amplitudes de tensão elétrica (*stepped sine*) aplicada no excitador, agora para o segundo modo de vibrar da estrutura. Quando o sistema se comporta de forma linear, o gráfico obtido por esse teste revela simetria, pois não ocorre o fenômeno conhecido por *salto*, que ocorre em situações onde a não linearidade é presente. Pode-se notar, pela fig. 4b, que para uma amplitude de excitação de 0.40 V, não foi obtido o *salto*, embora seja notável a variação da frequência de ressonância para valores abaixo do valor registrado em baixas amplitudes de excitação.



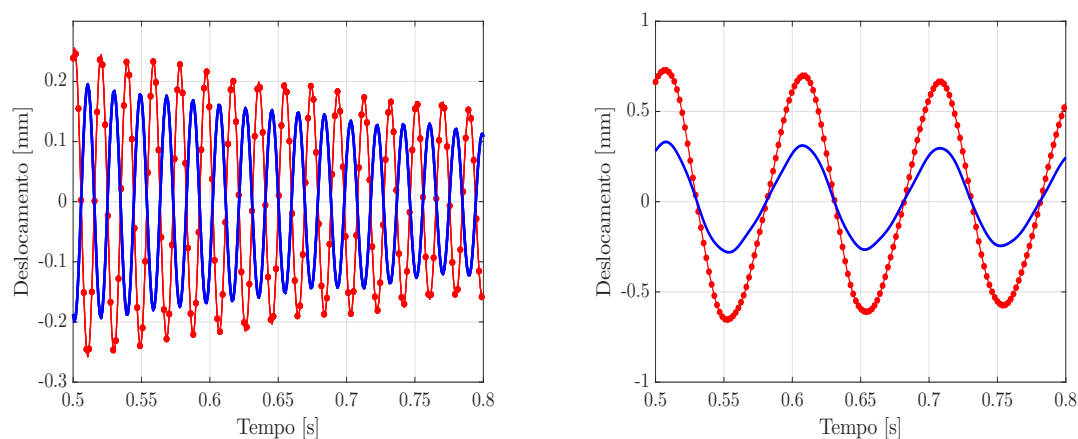
(a) *Stepped sine* para o primeiro modo de vibrar da estrutura.

(b) *Stepped sine* para o segundo modo de vibrar da estrutura.

Figura 4: *Stepped sine*, com curvas em círculos ($\circ$) indicando amplitude de tensão elétrica de 0.01 V e triângulos ($\triangle$) de 0.40 V.

Após a verificação da existência de comportamento não linear, realizou-se um teste para constatar a definição

de NNMs dada por R. M. Rosenberg (1960) (Rosenberg, R. M. (1960)). A figura 5 apresenta a comparação entre dados de resposta livre da viga para diferentes pontos de medida, evidenciando que para condições de baixa amplitude de resposta, mostrados pela fig. 5a verificou-se que o sistema opera fora de fase (em resposta livre), e para alta amplitude de resposta, observou-se que o sistema opera em fase, como mostra a fig. 5b. Além disso, pode-se notar pela figura que o período aumentou no comportamento não linear em relação ao linear, ou seja, houve uma redução no valor da frequência natural da estrutura. Isso mostra que a não linearidade afeta diretamente nos parâmetros modais, influenciando assim o comportamento em resposta livre. O teste foi obtido excitando-se a estrutura durante quatro segundos e nos quatro segundos seguintes (visto que cada bloco de resposta é composto de oito segundos de aquisição) desligou-se o excitador para obtenção do sinal em resposta livre, intuito desta etapa. Nesta figura, x_1 representa o deslocamento do acelerômetro situado na extremidade não engastada da viga, próxima ao imã, e x_2 o deslocamento do acelerômetro situado no meio da viga, de acordo com a numeração da fig. 1a. Os deslocamentos foram obtidos via integração, que equivale à multiplicação/divisão no domínio da frequência. Aplicou-se a transformada discreta de Fourier nos dados dos acelerômetros, e então o sinal discreto foi dividido pelo número complexo $j\omega_q$, sendo q cada amostra de frequência. Com isso, obteve-se a mobilidade (FRF do sinal de velocidade) e, então, a receptância (FRF do sinal de deslocamento). A transformada inversa de Fourier foi aplicada para transformar os sinais no domínio da frequência para o domínio do tempo. Foi avaliado também o sinal obtido pelo vibrômetro a *laser*, isto é, medidas de velocidade, o qual possui menos efeitos externos (ruído), porém optou-se pelas medidas do acelerômetro pelo fato de os dados de dois pontos de medidas terem sido medidos de forma sincronizada (no mesmo instante de tempo).



(a) Baixa amplitude de excitação - Fora de fase (comportamento linear).

(b) Alta amplitude de excitação - Em fase (comportamento não linear).

Figura 5: Exemplo de resposta livre obtidos para o sistema, com ampliação entre o intervalo de 84.80 a 85.15 segundos. As curvas em vermelho pontilhado (···) representam o sinal captado pelo acelerômetro 1 e em azul contínuo (—) pelo acelerômetro 2, de acordo com a fig. 1.

Com os dados do comportamento em resposta livre, foram elaborados os gráficos de espaço de fase e espaço de configuração. As figuras 6 e 7 mostram como o comportamento não linear afeta a forma desses gráficos. Para o primeiro caso (linear), o espaço de configuração é uma reta, e o espaço de fase uma elipse/espiral, caracterizando a linearidade. Já para o segundo caso, tem-se o espaço de configuração caracterizado por uma curva de natureza cúbica crescente, e o espaço de fase uma elipse deformada, característicos de sistema não linear (Kerschen, G., Peeters, M., Golinval, J. C., Vakakis, A. F. (2009)).

Por fim, com as densidades espectrais de potência obtidas pelos testes com excitação do tipo senoidal, pôde-se obter o gráfico de frequência por energia. Esse gráfico foi obtido com alguns pontos tomados em frequências de excitação diferentes, em função da energia de cada medida. Para o comportamento linear, mesmo com a variação da frequência de excitação, próximo da natural, a frequência de ressonância não se alterou, o que não ocorreu na situação de comportamento não linear. É de fato interessante notar a dependência entre frequência e energia, como mostra a fig. 8. Nota-se que para o caso linear (baixa amplitude de excitação), a frequência de ressonância permaneceu praticamente inalterada com o aumento da energia, mas para o caso não linear, ocorre uma variação que já era prevista pela teoria e comprovada pela análise da resposta livre da fig. 5. Além disso, é notável o decréscimo da frequência de ressonância, pois com o aumento da amplitude da força de excitação, ocorreu provável redução aparente da rigidez, gerando um gráfico nesse formato. Com os pontos obtidos, foi feito um ajuste de curva através de uma aproximação polinomial para melhor representar esse comportamento, segundo Kerschen, G., Peeters, M., Golinval, J. C., Vakakis, A. F. (2009). No caso, adotou-se uma aproximação por um polinômio cúbico.

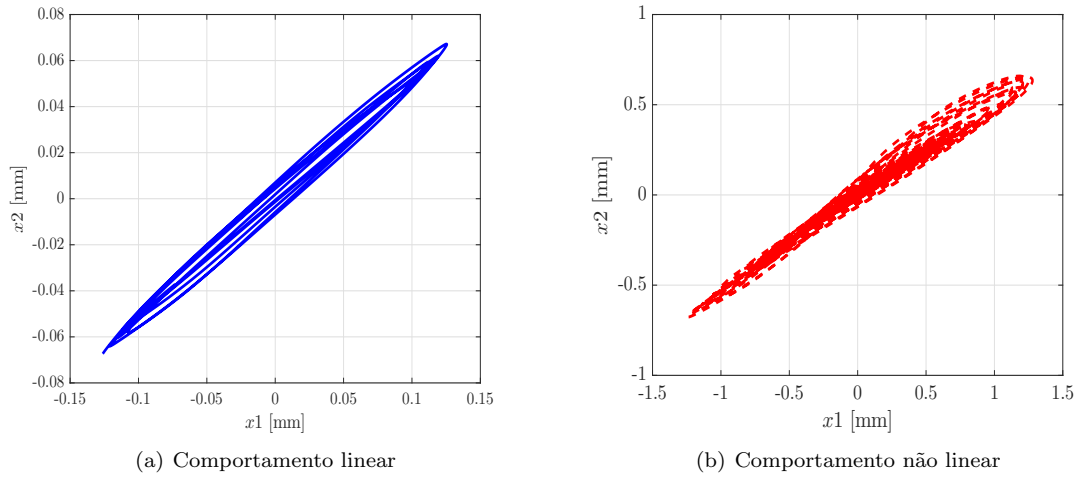


Figura 6: Espaço de configuração.

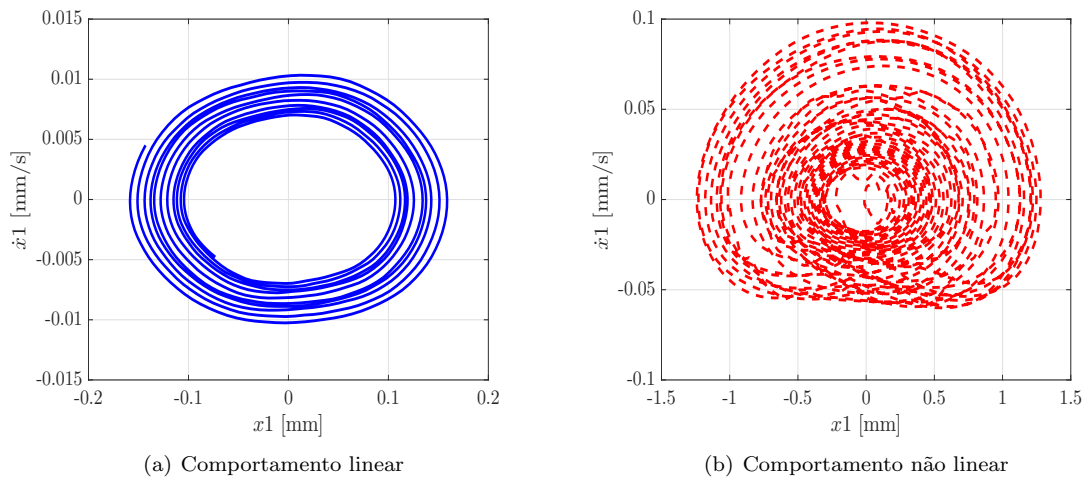


Figura 7: Espaço de fase.

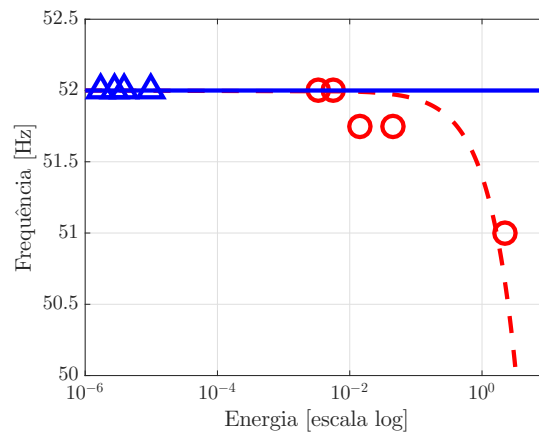


Figura 8: Dependência frequência-energia. Marcadores em triângulo ($\triangle$) e círculo ($\circ$) representam dados coletados para comportamento linear e não linear, respectivamente. As linhas em contínuo ($—$) e pontilhado ($-\cdot-$) representam as curvas ajustadas (linear e não linear, respectivamente).

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O fenômeno da não linearidade ocorre em diversas estruturas e seu estudo se torna profundo à medida que os efeitos presentes em dados experimentais necessitam ser incorporados em modelos cada vez mais complexos. Neste trabalho, buscou-se analisar propriedades dos modos normais não lineares em uma viga. Os diversos testes feitos possibilitaram observar e, de fato, visualizar os comportamentos linear e não linear. Para baixos níveis de amplitude de excitação (tensão elétrica fornecida ao excitador), observou-se ausência ou discreta

presença de não linearidades; já para altas amplitudes de excitação, o sistema apresentou comportamento não linear bem pronunciado, evidenciado pela redução de valor da frequência natural, vista pelo comportamento em resposta livre, e pela dependência entre frequência e energia. A grande dificuldade é, a partir dos resultados obtidos, identificar um modelo físico-matemático paramétrico para emular vibrações não lineares em uma viga, extraindo dos dados experimentais os parâmetros modais necessários, que neste caso se mostram insuficientes para emular estas características. Outra característica é a necessidade de ter uma forma de desacoplar equações de movimento e modos na presença de mecanismos não lineares. Como se observa em situações onde não se atende o princípio da superposição modos normais lineares não são efetivos neste desacoplamento exigindo a necessidade de identificação de modos normais não lineares.

5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao apoio financeiro da UNESP, CAPES, FAPESP (Processo 16/21973-5) e CNPq ao Processo 307520/2016-1.

6. REFERÊNCIAS

- Andrade, V. S., 2009. *Análise Dinâmica de uma Viga Engastada Excitada por uma Fonte Não Ideal*. Ph.D. thesis, Universidade de São Paulo. URL http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/18/18135/tde-11012010.../Andrade_VS.pdf.
- Avitabile, P., 2001. *Modal Space In Our Own Little World*. Sound & Vibration Magazine.
- Ewins, D.J., 2000. *Modal Testing: Theory, Practice and Application*. Research Studies Press Ltd. ISBN 86380 218-4.
- Kerschen, G., Peeters, M., Golinval, J. C., Vakakis, A. F., 2009. "Nonlinear normal modes, part i: A useful framework for the structural dynamicist". *Mechanical Systems and Signal Processing* 23, pp. 170–194. URL http://www.ltas-vis.ulg.ac.be/cmsms/uploads/File/NnmsPartI_Revised.pdf. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2008.04.002>.
- Kovacic, I., Brennan, M., 2011. *The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour*. Wiley. URL <http://books-.google.com.br/books?id=f6oZ0cwjTs8C>. ISBN: 978-0-470-71549-9.
- Rosenberg, R. M., 1960. "Normal modes of nonlinear dual-mode systems". *Journal of Applied Mechanics* 27, pp. 263–268. URL <http://appliedmechanics.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1393892>. DOI: 10.1115/1.3643948.
- Rosenberg, R.M., 1962. "The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems". *Journal of Applied Mechanics* 29, pp. 7–14. URL <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01344457/document>. DOI: 10.1115/1.3636501.
- Rosenberg, R.M., 1966. "On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom". *Advances in Applied Mechanics* 9, pp. 155–242. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0065215608700085>. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0065-2156\(08\)70008-5](https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70008-5).
- Virgin, L. N., 2000. *Introduction to Experimental Nonlinear Dynamics*. Cambridge University Press. ISBN-10: 0521662869.
- Worden, K., Tomlinson, G. R., 2001. *Nonlinearity in Structural Dynamics*. Institute of Physics Publishing. ISBN10: 0750303565.

7. RESPONSABILIDADE AUTORAIS

O(s) autor(es) é(são) o(s) único(s) responsável(is) pelo conteúdo deste trabalho.

ANALYSIS OF THE PROPERTIES OF NONLINEAR NORMAL MODES

Lucas Zanovello Tahara, lucaszanov@gmail.com¹

Ana Cristina Neves Carloni, ana.nevescarloni@gmail.com¹

Rafael de Oliveira Teloli, teloli.r@gmail.com²

Samuel da Silva, samuel@dem.feis.unesp.br³

^{1,2,3}UNESP - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia, Departamento de Engenharia Mecânica, Ilha Solteira, SP

Abstract: *Currently, it is essential to include the influence of nonlinear vibrations in modern designs. Thus, nonlinear normal modes (NNMs) are excellent tools for characterizing nonlinearities of structures. The inherent properties of NNMs allow us to investigate and explore physical-mathematical models to predict the behavior of these systems. Thus, the present paper searches to develop a qualitative analysis of a nonlinear beam, in order to identify and analyze the properties of nonlinear normal modes. The behavior of the system and the amplitude limits of the excitation force were evaluated to characterize nonlinear effects. The results have shown that, depending on the level of excitation, there is a dependence between frequency and excitation amplitude. For low amplitudes of excitation, the beam has approximately linear behavior, which does not occur for high amplitudes of excitation. For low amplitudes of excitation, the beam has approximately linear behavior characterized by the invariance of the natural frequency of the system. For high amplitudes of excitation, it was observed a variation in the natural frequency of the system, i. e., increases or decreases of energy influenced the modal parameters of the structure.*

Keywords: *Nonlinear Normal Modes, Experimental Modal Analysis, Nonlinear Vibrations.*