

SOLUÇÃO ANALÍTICA DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO-ADVECÇÃO FRACIONÁRIA CONSIDERANDO O MODELO EVOLUTIVO BI-FLUXO

A.S. Palmeira, andersonpalmeira@icloud.com¹;
P.H. Xavier, pahenfax@gmail.com¹;
D.M. Moreira, davidson.moreira@fieb.org.br¹.

¹Campus Integrado de Manufatura e Tecnologia SENAI CIMATEC, Avenida Orlando Gomes, 1845 – Piatã, Salvador - BA, Brasil. Cep.: 41650-010.

Resumo: Neste artigo, apresenta-se uma solução analítica para equação de difusão-advecção bidimensional fracionária considerando-se o modelo evolutivo bi-fluxo. A solução é obtida com a combinação do método da decomposição por Laplace e perturbação por homotopia, obtendo-se uma solução genérica da equação dependente da função de Mittag-Leffler, a qual é intrínseca as soluções de equações diferenciais fracionárias. Os resultados mostram uma rápida convergência e uma boa concordância com dados experimentais.

Palavras-chave: transformada de Laplace; equação de difusão-advecção; derivada fracionária; modelo evolutivo bi-fluxo.

1. INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, vários métodos têm sido propostos para obtenção da solução da equação da difusão-advecção, tais como o método das diferenças finitas (Debnath, 1997) (Krishnamurthy; Sen, 2001), método da decomposição de Adomian (Adomian, 2001), método iterativo variacional (Golbabai; Javidi, 2007), transformada integral (Biazar; Ghazvini, 2009), método da decomposição por Laplace (Khan; Austion, 2010), a qual é empregada para estimativas da concentração de poluentes em função do espaço e do tempo, levando-se em conta fatores como fonte emissora, condições meteorológicas, características do meio e velocidade em que o poluente é carregado, porém todos com suas limitações.

Os processos que regem o transporte e difusão dos poluentes são numerosos e muito complexos, sendo que seria inviável descrevê-los sem auxílio de modelos matemáticos, os quais normalmente são descritos pela equação de difusão-advecção. Através deles é possível descrever, interpretar, administrar liberações acidentais, avaliar áreas de risco, identificar fontes poluidoras, corrigir e controlar as concentrações de poluentes na atmosfera (Moreira; Tirabassi, 2004).

Entretanto, normalmente as soluções analíticas da equação de difusão são em função da tradicional Lei de Fick. De um modo diferente, neste trabalho, adota-se a equação de difusão-advecção considerando-se uma nova aproximação na lei de Fick, o processo de difusão bi-fluxo (Bevilacqua *et al.*, 2015).

O processo bi-fluxo consiste no fluxo simultâneo de dois conjuntos de partículas espalhadas com duas velocidades distintas. O primeiro conjunto obedece à lei clássica de Fick, o chamado fluxo primário, enquanto o segundo, denominado de fluxo secundário, segue uma nova lei, chamada de retenção. A equação da quarta ordem fornece uma abordagem consistente por levar em consideração a energia rotacional que, de outro modo, não seria possível com a teoria clássica (Bevilacqua *et al.*, 2015).

A literatura apresenta muitas soluções analíticas para a equação de difusão-advecção na forma tradicional (Moreira; Tirabassi, 2004) (Rounds, 1995) (Demuth, 1978) (Nieuwstadt; Haan, 1981) (Tirabassi *et al.*, 1987) (Tirabassi, 1989) (Tirabassi; Rizza, 1994).

Nesse trabalho, propõe-se a solução da equação de difusão-advecção considerando-se o processo bi-fluxo (Bevilacqua *et al.*, 2015), utilizando-se a metodologia chamada de método da decomposição por Laplace e perturbação por homotopia (He, 2008a) (He, 2008b).

A ideia essencial desse método é combinar a transformada de Laplace e o método de perturbação homotopia. Este método conduz a uma solução sem nenhuma discretização, evitando com isso os erros de aproximação dos métodos numéricos. O resultado dessa combinação mostra um procedimento elegante que fornece uma solução fechada, obtida através de uma série que converge rapidamente.

2. METODOLOGIA

A difusão por bi-fluxo consiste no fluxo simultâneo de dois conjuntos de partículas espalhando-se com duas velocidades distintas, sendo modelada através de uma equação diferencial linear de 2ª e 4ª ordem [10]:

$$u \frac{\partial^\alpha c}{\partial x^\alpha}(x, z) = \beta k_1 \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}(x, z) - \beta(1 - \beta)k_2 \frac{\partial^4 c}{\partial z^4}(x, z) \quad (1)$$

para $0 < z < h$, $x > 0$, onde h é a altura da camada limite atmosférica (CLA), u é a velocidade longitudinal do vento médio e α é um parâmetro de ordem fracionária ($0 < \alpha < 1$). Além disto, c é a concentração de poluentes, z é a variável espacial na direção vertical, x é a distância longitudinal da fonte, β representa um parâmetro de controle da retenção e difusão e, por simplicidade, considera-se os coeficientes de difusão k_1 e k_2 constantes.

Para obter-se a solução da equação (1) é necessário especificar as condições de contorno:

$$k_z \frac{\partial c}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z = h \quad (2)$$

$$k_z \frac{\partial c}{\partial z} = 0 \quad \text{em } z = 0 \quad (3)$$

Além disso, assume-se uma condição inicial com emissão constante Q na altura da fonte:

$$uc(0, z) = Q\delta(z - H_s) \quad \text{em } x = 0 \quad (4)$$

onde $\delta(z - H_s)$ é a função delta de Dirac e H_s é a altura da fonte. A função delta de Dirac pode ser aproximada pela expressão:

$$\delta(z - H_s) = \frac{1}{h} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\lambda_n z) \cos(\lambda_n H_s) \right] \quad (5)$$

onde $\lambda_n = \frac{n\pi}{h}$, são os autovalores. Portanto, a condição de fonte (4) pode ser reescrita como:

$$c(0, z) = \frac{Q}{uh} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\lambda_n z) \cos(\lambda_n H_s) \right] \quad (6)$$

Para a solução da equação (1), aplica-se a transformada de Laplace na variável x , usando a definição da derivada de Caputo, obtendo-se:

$$us^\alpha \hat{c}(s, z) - us^{\alpha-1} c(0, z) = L \left[\beta k_1 \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}(x, z) \right] - L \left[\beta(1 - \beta)k_2 \frac{\partial^4 c}{\partial z^4}(x, z) \right] \quad (7)$$

onde L representa a transformada de Laplace. Rearranjando-se a equação (7), obtém-se:

$$\hat{c}(s, z) = \frac{c(0, z)}{s} + \frac{\beta k_1}{us^\alpha} L \left[\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}(x, z) \right] - \frac{\beta(1 - \beta)k_2}{us^\alpha} L \left[\frac{\partial^4 c}{\partial z^4}(x, z) \right] \quad (8)$$

Aplicando-se a inversa da transformada de Laplace na Equação (8), resulta:

$$L^{-1}[\hat{c}(s, z)] = L^{-1} \left[\frac{c(0, z)}{s} \right] + L^{-1} \left[\frac{\beta k_1}{us^\alpha} L \left[\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}(x, z) \right] \right] - L^{-1} \left[\frac{\beta(1 - \beta)k_2}{us^\alpha} L \left[\frac{\partial^4 c}{\partial z^4}(x, z) \right] \right] \quad (9)$$

Portanto,

$$c(x, z) = c_0 + L^{-1} \left[\frac{\beta k_1}{us^\alpha} L \left[\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}(x, z) \right] \right] - L^{-1} \left[\frac{\beta(1 - \beta)k_2}{us^\alpha} L \left[\frac{\partial^4 c}{\partial z^4}(x, z) \right] \right] \quad (10)$$

Pelo método da homotopia, a solução geral pode ser escrita como:

$$c(x, z) = c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \quad (11)$$

onde:

$$c_0 = \frac{Q}{uh} [1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\lambda_n z) \cos(\lambda_n H_s)] \quad (12)$$

e os demais termos:

$$c_{i+1}(x, z) = L^{-1} \left[\frac{\beta k_1}{us^\alpha} L \left[\frac{\partial^2 c_i}{\partial z^2}(x, z) \right] \right] - L^{-1} \left[\frac{\beta(1-\beta)k_2}{us^\alpha} L \left[\frac{\partial^4 c_i}{\partial z^4}(x, z) \right] \right] \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Seguindo-se a metodologia, calculam-se as derivadas que serão utilizadas nos termos c_i . Por simplicidade, tomando-se em (10), $A_1 = \beta k_1$ e $A_2 = \beta(1-\beta)k_2$, resulta:

$$c_1 = \frac{2Qx^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)uh} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \cos(\lambda_n z) \cos(\lambda_n H_s) (A_1 + A_2 \lambda_n^2) \quad (14)$$

$$c_2 = \frac{2Qx^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)uh} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^4 \cos(\lambda_n z) \cos(\lambda_n H_s) (A_1 + A_2 \lambda_n^2)^2 \quad (15)$$

onde Γ é a função Gama. Portanto, agrupando-se estes primeiros termos, tem-se:

$$c(x, z) = \frac{Q}{uh} + \frac{2Q}{uh} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\lambda_n z) \cos(\lambda_n H_s) \left\{ 1 - \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \lambda_n^2 (A_1 + A_2 \lambda_n^2) + \frac{1}{2} \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \lambda_n^4 (A_1 + A_2 \lambda_n^2)^2 + \frac{1}{6} \frac{x^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \lambda_n^6 (A_1 + A_2 \lambda_n^2)^3 + \dots \right\} \quad (16)$$

Portanto, a solução final é dada por:

$$c(x, z) = \frac{Q}{uh} + \frac{2Q}{uh} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\lambda_n z) \cos(\lambda_n H_s) \cdot E_\alpha[-x^\alpha \lambda_n^2 (A_1 + A_2 \lambda_n^2)] \quad (17)$$

Segue que a equação (17) é mais geral, no sentido que, se $k_2 = 0$ ($A_2 = 0$) e $\alpha = 1$, obtém-se a solução para difusão normal. Cabe ressaltar que E_α é a função de Mittag-Leffler, a qual é intrínseca as soluções com derivadas fracionárias.

3. PARAMETRIZAÇÃO DA TURBULÊNCIA

Neste trabalho, utiliza-se um coeficiente de difusão turbulento dependente somente da variável z para condições instáveis (Degrazia et al., 1997):

$$K(z) = 0.22w_*h \left(\frac{z}{h} \right)^{1/3} \left(1 - \frac{z}{h} \right)^{1/3} \left[1 - e^{(-4\frac{z}{h})} - 0.0003e^{(8\frac{z}{h})} \right] \quad (18)$$

onde w_* é a velocidade convectiva. Para obtenção de um $K(k_1)$ constante é feita uma média desde o solo ($z = 0$) até h (altura da CLA).

4. RESULTADOS

Para investigar o funcionamento da solução obtida contrapõem-se os dados obtidos pelo modelo com os dados obtidos nos experimentos de Copenhagen. Os experimentos de dispersão em Copenhagen, retratados nos artigos Gryning et al. (1987) e Gryning e Lyck (1984), consistiram na liberação do traçador SF6 (hexafluoreto de enxofre). O traçador foi liberado sem empuxo a partir de uma torre com altura de 115 m sendo coletado ao nível do solo. As unidades de amostragem foram posicionadas a uma distância entre 2 a 6 km, a partir do ponto onde ocorreu a liberação do poluente. O comprimento de rugosidade foi de 0.6 m. Os parâmetros micrometeorológicos para este experimento estão tabulados no artigo de Degrazia et al. (2001). Observe que neste experimento a concentração integrada lateralmente foi normalizada pela taxa de emissão (c/Q).

Nas figuras mostram-se os gráficos de espalhamento considerando-se a Eq. (17), com o coeficiente de difusão constante dado pela Eq. (18), para vento médio medido a 10 m, considerando-se α com valores 0.90, 0.95 e 1.00, respectivamente, nas figuras 1, 2 e 3.

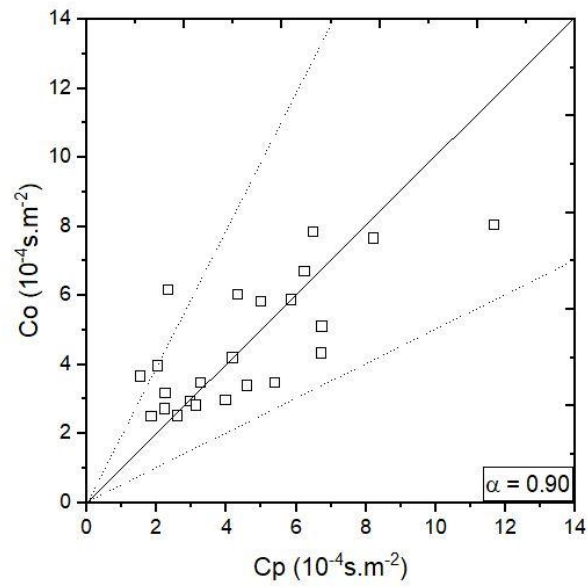


Figura 1: Gráfico de espalhamento da concentração observada Co em função da concentração predita pelo modelo para $\alpha = 0.90$.

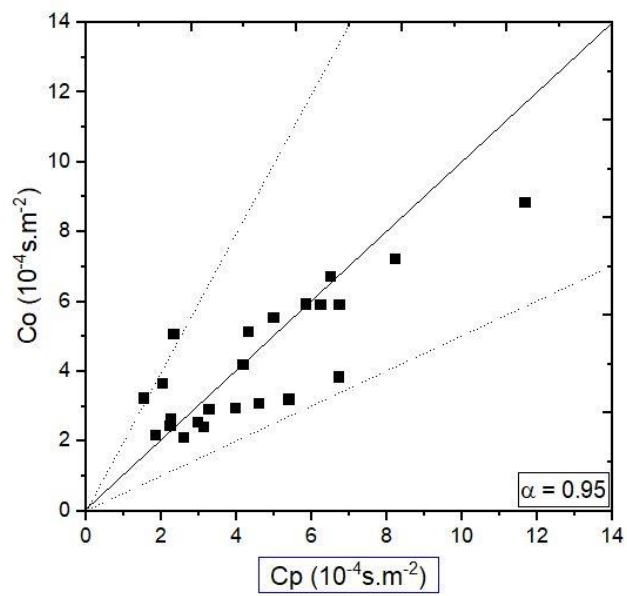


Figura 2: Gráfico de espalhamento da concentração observada Co em função da concentração predita pelo modelo para $\alpha = 0.95$.

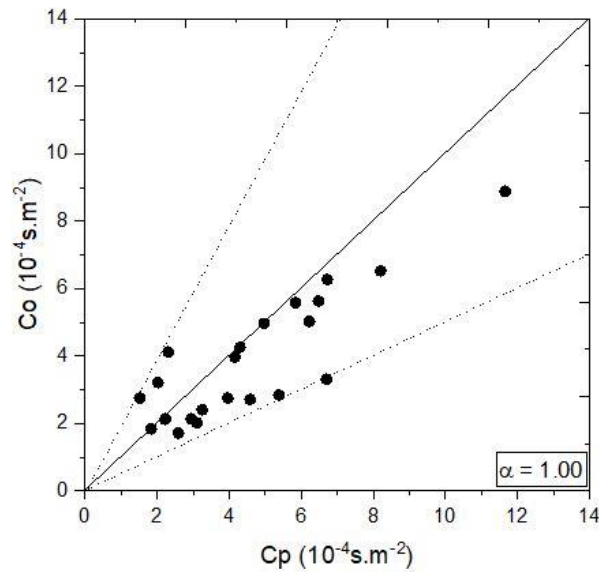


Figura 3: Gráfico de espalhamento da concentração observada C_o em função da concentração predita pelo modelo para $\alpha = 1.00$.

As figuras mostram que a concentração integrada lateralmente a partir do modelo com k_1 constante, em condições moderadamente instáveis do experimento de Copenhagen, apresentam bons resultados. Entretanto, os melhores resultados foram para $\alpha = 1.00$ e $\alpha = 0.95$, onde quase todos os pontos estão entre as linhas pontilhadas, as quais representam um fator de 2. É possível verificar a influência do parâmetro α , de forma que para $\alpha = 0.90$ os resultados começam a ficar piores.

Na figura 4 a seguir é mostrada a convergência do método considerando-se os dados do experimento 1 de Copenhagen.

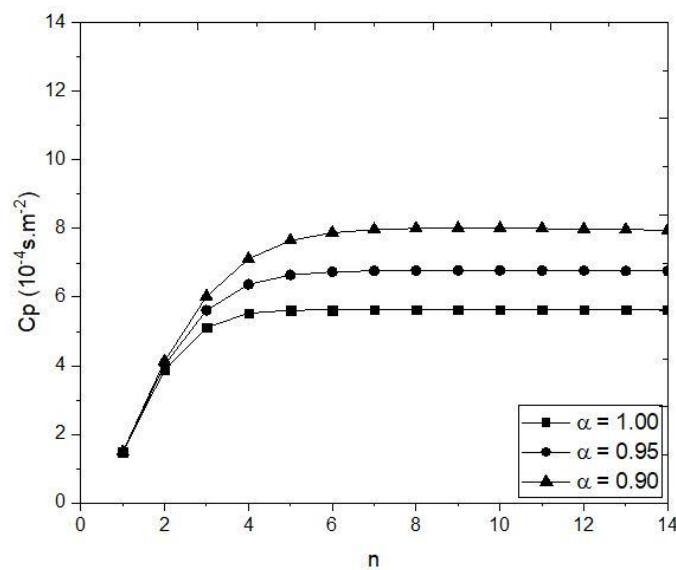


Figura 4: Convergência do método para diferentes valores de α .

Observa-se na figura 4 que a solução com coeficiente de difusão constante apresenta uma rápida convergência com o aumento do número de termos do somatório (n), mesmo para diferentes valores de α .

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi demonstrado que o método de decomposição por Laplace e perturbação por homotopia pode ser utilizado para resolver a equação difusão bi-fluxo fracionária, obtendo-se uma solução mais geral. Esta metodologia é simples e direta, apresentando uma rápida convergência na série. Ressalta-se que esta é a primeira vez na literatura que esta equação tem uma solução obtida com a utilização de derivadas fracionárias.

6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o SENAI CIMATEC e a FAPESB pelo apoio financeiro.

7. REFERÊNCIAS

- A. GOLBABAI AND M. JAVIDI, "A variational iteration method for solving parabolic partial differential equations", Computers & Mathematics with Applications, vol. 54, n. 7-8, PP. 987-992, 2007.
- D. MOREIRA e T. TIRABASSI, "Modelo matemático de dispersão de poluentes na Atmosfera: um instrumento técnico para a gestão ambiental", Ambiente & Sociedade – Vol. 7, pp. 160-161, n. 2, 2004.
- DEMUTH, C., "A contribution to the analytical steady solution of the diffusion equation for line sources". Atmospheric Environment.v.12, p.1255 -1258,1978.
- E.V. KRISHNAMURTHY and S.K. SEN, "Numerical Algorithm Computations in Science and Engineering", East-West Press, 2001.
- G. ADOMIAN, "Solution of physical problems by decomposition", Computers & Science and Engineering, East-West Press, 2001.
- GRYNING, S.E. e LYCK, E. "Atmospheric Dispersion from elevated sources in an urban area: Comparison between tracer experiments and model calculations", Journal of Climate and Applied Meteorology, vol. 23(4) pp.651 – 660, 1984.
- J. BIAZER and H. GHAZVINI, "He's homotopy perturbation method for solving systems of Volterra Integral equations", Chaos, Solitons, Fractals, vol. 39, pp. 370-377, 2009.
- J.H. HE, "New interpretation of homotopy perturbation. Addendum", International Journal of Modern Physics B, vol. 20, n. 2, pp. 205-209, 2008.
- J.H. HE, "Recent development of the homotopy perturbation method", Topological methods in Nonlinear Analysis, vol. 31, n. 2, pp. 205-209, 2008.
- L. BEVILACQUA, M. JIANG, A. SILVA NETO, A.C.R.N. GALEÃO, "An Evolutionary Model of Bi Flux Diffusion Processes", The Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, pp. 987-992, 2015.
- L. DEBNATH, "Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers", Birkhauser, 1997.
- NIEUWSTADT, F.T.M and HAAN, B.J., "An analytic solution of the one-dimensional diffusion equation in a non-stationary boundary layer with an application to the inversion rise fumigation". Atmospheric Environment.v.15, p.845 - 851,1981.
- TIRABASSI, T. "Analytical air pollution advection and diffusion models". Water, Air, and Soil Pollution, v.47, p. 19-24, 1989.
- TIRABASSI, T. and RIZZA, U., "Applied dispersion modelling for ground-level concentrations from elevated sources". Atmospheric Environment, v.28, n.4, p. 611-615, 1994.
- TIRABASSI, T., TAGLIAZUCCA, M. and GALLIANI, G., "Easy to use air pollution model for turbulent shear flow". Environment Software, v.2, n.1, p. 37-44, 1987.
- W. ROUNDS, "Solutions of the two-dimensional diffusion equations". Transactions American Geophysical, v. 36, p.395-405, 1955.
- Y. KHAN AND F. AUSTION, "Application of the Laplace decomposition method for nonlinear homogenous and non-homogenous advection equations", Zeitschrift fuer Naturforschung A, vol. 65, n. 2, pp. 1-5, 2010.

8. RESPONSABILIDADE AUTORAL

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho.

ANALYTICAL SOLUTION OF THE FRACTIONAL ADVECTION-DIFFUSION EQUATION CONSIDERING THE BI-FLUX EVOLUTIONARY MODEL

A.S. Palmeira, andersonpalmeira@icloud.com¹

P.H. Xavier¹, pahenfax@gmail.com¹;

D.M. Moreira¹, davidson.moreira@fieb.org.br¹.

¹Centro Universitário SENAI CIMATEC, BA, Brasil.

Abstract. *Abstract: In this paper, we present an analytical solution for a fractional bidimensional advection-diffusion equation considering the bi-flow evolution model. The solution is obtained by combining the Laplace decomposition method and homotopy perturbation, obtaining a generic solution including the Mittag-Leffler function, which is intrinsic to the solutions of fractional differential equations.*

Keywords: *Laplace transform; diffusion-advection equation; fractional derivative; bi-flow evolutionary model.*

Escolha sua forma de apresentação preferida:

☒ Oral

☐ Pôster