

ANÁLISE DE UM SISTEMA DINÂMICO COM FOLGA UTILIZANDO A TÉCNICA DE HÉNON

Larissa Drews Wayhs, laridw9@gmail.com¹

Douglas Domingues Bueno, douglas.bueno@unesp.br²

¹Universidade Estadual Paulista (UNESP), Departamento de Engenharia Mecânica, Ilha Solteira, SP, Brasil

²Universidade Estadual Paulista (UNESP), Departamento de Matemática, Ilha Solteira, SP, Brasil

Resumo: Sabe-se que a presença de efeitos não-lineares em sistemas aeroelásticos pode alterar de forma importante a dinâmica de voo. Em particular, folgas geométricas podem provocar alterações na estabilidade dos veículos aéreos, como, por exemplo, erros de fase, que no caso apresentam um grau de importância alto para problemas de vibração auto-excitada, como o flutter. Dessa forma, este trabalho visa a analisar e comparar com a solução analítica duas técnicas numéricas para solução de um sistema vibratório com um grau de liberdade e com a presença de folga, sendo uma delas o método de Runge-Kutta de quarta ordem convencional e a outra, a técnica de Hénon. Após a comparação com a solução analítica, pôde-se observar que para uma combinação específica de parâmetros a técnica de Hénon apresenta um erro mais de 1000 vezes menor quando comparada com Runge-Kutta de quarta ordem convencional. Observou-se, ainda, que dependendo da combinação de parâmetros como massa, frequência de oscilação, amplitude de movimento, amplitude da folga e passo de integração, altera-se qual o método numérico mais adequado dentre os analisados. Além disso, foi possível observar que conforme aumenta-se o tempo analisado e diminuem-se as razões $R_{T,dt}$ e $R_{u0,\delta}$, os erros obtidos são maiores, ou seja, as defasagens das soluções numéricas com a solução analítica aumentam. Dessa forma, notou-se claramente que folgas geométricas podem afetar na análise de problemas de vibração e devem ser levadas em consideração, principalmente quando a vibração é auto-excitada.

Palavras-chave: folgas geométricas, técnica de Hénon, solução numérica, erros de fase

1. INTRODUÇÃO

Sistemas mecânicos podem apresentar folgas geométricas de projeto, devido tolerâncias de montagens e desgaste natural de utilização. Em particular, folgas nas superfícies de controle, que fazem parte dos efeitos não lineares em sistemas aeroelásticos, podem inclusive implicar em alterações na estabilidade dos veículos aéreos, resultando até mesmo em restrições de envelope de voo (Bueno *et al.*, 2014).

A predição de respostas vibratórias temporais de sistemas mecânicos comumente envolve integração numérica das equações de movimento. Porém, sem os devidos cuidados, os procedimentos de integração da equação de movimento de sistemas com não linearidades, como a folga, por exemplo, podem gerar, em particular, erros de fase, que são especialmente relevantes para problemas de vibração auto-excitada - como o flutter, por exemplo. Neste contexto, o presente trabalho apresenta a análise da resposta de um sistema vibratório de um grau de liberdade com folga. Um enfoque especial é dado à utilização da técnica de Hénon, além do conhecimento da solução analítica, que serve como base para validação da técnica.

2. PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL

Para explorar de maneira objetiva o efeito da folga geométrica na integração numérica, utiliza-se um sistema de um grau de liberdade contendo uma massa m e molas de rigidez k , com origem no centro da folga, conforme a Fig. 1. A modelagem do movimento é representada pelas Eq. (1) e (2).

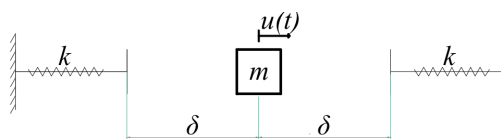


Figura 1: Sistema de um grau de liberdade com folga.

$$m\ddot{u}(t) + g(u) = 0$$

(1)

$$g(u) = \begin{cases} 0 & , \quad |u| \leq |\delta| \\ k(u - \delta) & , \quad u > \delta \\ k(u + \delta) & , \quad u < -\delta \end{cases} \quad (2)$$

onde m é massa, k é a rigidez, δ é a metade da folga geométrica e $u(t)$ é o grau de liberdade deslocamento horizontal.

Tem-se que a Eq. (1) pode ser escrita na forma matricial utilizando a notação de espaço de estados, conforme mostrado na Eq. (3) para os domínios dentro e fora da folga, respectivamente.

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{A}_f \mathbf{x} & , \quad |u| \leq |\delta| \\ \mathbf{A} \mathbf{x} + \delta \mathbf{f} & , \quad u > \delta \\ \mathbf{A} \mathbf{x} - \delta \mathbf{f} & , \quad u < -\delta \end{cases} \quad (3)$$

onde $\mathbf{x} = \{\dot{u} \ u\}^T$ é o vetor de estados; $\mathbf{f}$, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}_f$ são o vetor e as matrizes de parâmetros devidamente organizados para os domínios fora da folga ($|u| > |\delta|$) e dentro da folga ($|u| \leq |\delta|$), respectivamente, conforme explicitado nas Eq. de (4) a (6), respectivamente.

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \frac{k}{m} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{k}{m} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{A}_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

A solução é obtida pelos seguintes métodos: analítico, que é referência para cálculo de erros, método de Runge-Kutta de quarta ordem convencional e modificado, sendo este último chamado de técnica de Henon (1982). Cada um desses três métodos são detalhados neste trabalho.

2.1 Solução Analítica

A solução analítica para o modelo apresentado nas Eq. (1) e (2) é utilizada conhecendo os tempos de picos positivos como referência. Dessa forma, como no tempo inicial ($t = 0$) a resposta é a própria amplitude de movimento u_0 , ou seja, um pico positivo, basta conhecer o período de oscilação para obter todos os tempos referentes a cada pico positivo.

Para um sistema de um grau de liberdade com folga como o representado na Fig. 1, a rigidez equivalente segundo Den Hartog (1985) é apresentada na Eq. (7). Além disso, sabe-se da literatura que a frequência angular de oscilação é $\omega = \sqrt{k_{eq}/m}$ (Preumont, 2013), e, ainda, que o período $T = 1/f$, em que f é a frequência de oscilação. Logo, utilizando todas essas equações, inclusive a Eq. (7), e resolvendo para o período T , obtém-se a Eq. (8).

$$k_{eq} = k \left[1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{\delta}{u_0 - \delta} \right) \right]^{-2} \quad (7)$$

$$T = \left(\frac{4\delta}{(u_0 - \delta)} + 2\pi \right) \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (8)$$

2.2 Método numérico: Runge-Kutta de quarta ordem

Esta solução numérica consiste em utilizar o método de Runge-Kutta de quarta ordem (Sperandio *et al.*), explicitado na Eq. (9), para integrar a Eq. (3) cuja variável independente é o tempo.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{t+dt} &= \mathbf{x}_t + \frac{dt}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 &= \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_t) \\ K_2 &= \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_t + \frac{dt}{2} K_1) \\ K_3 &= \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_t + \frac{dt}{2} K_2) \\ K_4 &= \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_t + dt K_3) \end{aligned} \quad (9)$$

onde dt é o passo de integração e os subscritos $(\cdot)_t$ e $(\cdot)_{t+dt}$ indicam os instantes aos quais se referem vetores de estados obtidos de iterações consecutivas do método.

O algoritmo deste método consiste em utilizar a equação $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ adequada na Eq. (9), conforme o domínio explicitado na Eq. (3). Ou seja, quando a posição $\mathbf{x}_{t+dt,lf}$ estiver em um domínio diferente da posição $\mathbf{x}_{t,lf}$, o algoritmo troca a equação $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ para a adequada ao domínio identificado do ponto $\mathbf{x}_{t+dt,lf}$, em que o subscrito $(\cdot)_{lf}$ indica que trata-se do estado que ocupa a linha da folga no vetor de estados, neste caso, o estado é u , na linha $lf = 2$.

Vale salientar que o programa troca de equação quando identifica-se mudança de domínio. Analisando a Figura 2 é possível perceber que ao integrar do ponto o ao ponto $\star$, a equação integrada foi a pertencente ao domínio fora da folga. Logo, para o intervalo entre o ponto exatamente na folga $\square$ e o ponto $\star$ - onde detectou-se a mudança de domínio, a equação integrada foi inadequada, já que esta deveria ser apropriada ao domínio dentro da folga. A técnica de Hénon é aplicada justamente com o intuito de eliminar esses intervalos de uso de equações inadequadas, conforme discute a literatura (Henon, 1982) e (Bueno *et al.*, 2014).

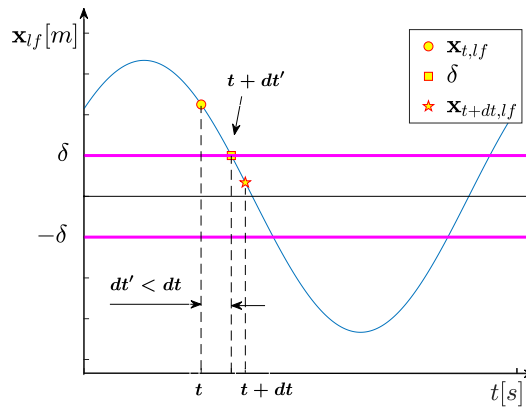


Figura 2: Mudança de domínio ao passar do ponto $\mathbf{x}_{t,lf}$ para o ponto $\mathbf{x}_{t+dt,lf}$ utilizando a equação inadequada no intervalo: δ ao $\mathbf{x}_{t+dt,lf}$.

2.3 Método numérico: técnica de Hénon

Este método numérico consiste em adaptar o método de Runge-Kutta apresentado na subseção 2.2 para alterar a equação a ser integrada exatamente nos pontos de transição de domínio, evitando assim o uso de equação inadequada. Tal alteração é obtida por meio de mudança na variável de integração. Ao invés de integrar no tempo, integra-se no espaço, conforme detalhado nesta subseção. Assim, primeiramente, é explicitada a sequência lógica obedecida pelo algoritmo. Posteriormente, é detalhado especificamente o item 4, que na prática define a Técnica de Hénon.

Sequência Lógica do Algoritmo

1. Realiza-se a integração utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem explicitado na Eq. (9), cuja variável de integração é o tempo;
2. Identifica-se se há alteração de domínio, ou seja, se a posição $\mathbf{x}_{t+dt,lf}$ está em um domínio diferente da posição $\mathbf{x}_{t,lf}$;
3. Identifica-se mudança de domínio no ponto $\mathbf{x}_{t+dt,lf}$, o algoritmo não armazena este novo ponto, e retorna ao ponto anterior à transição;
4. Encontra-se qual passo de integração no tempo dt' (Figura 2) deve ser utilizado para obter o ponto exato de transição ($|\mathbf{x}_{lf}| = \delta$) onde deve-se alterar a equação a ser integrada. Para isso, utiliza-se a técnica de Hénon, que consiste em realizar uma iteração do método de Runge-Kutta de quarta ordem, porém, com a variável de integração sendo o espaço, já que a posição de transição desejada é conhecida ($\pm\delta$). A técnica de Hénon é detalhada neste trabalho.
5. Encontrado o valor do passo dt' , basta utilizá-lo no lugar de dt na Eq. (9). Dessa forma, obtém-se o vetor do ponto de transição $\mathbf{x}_\delta$;
6. Altera-se a equação a ser integrada para a adequada ao novo domínio, conforme Eq. (3). Utiliza-se novamente a Eq. (9), porém com passo $dt - dt'$, para que se obtenha o ponto $\mathbf{x}_{t+dt}$. Por fim, retorna-se ao item 1 com o novo ponto e com a equação de integração alterada corretamente.

Detalhamento da Técnica de Hénon

Para explicar detalhadamente o item 4 apresentado na sequência lógica do algoritmo, que se refere a Técnica de Hénon, tem-se que o objetivo está concentrado em obter o tempo de transição de domínio t_δ , representado por um pequeno quadrado na Figura 2, a fim de que o algoritmo não utilize equações inadequadas ao domínio de integração. Para tanto, é viável que se integre na variável independente sendo o espaço, afinal, o incremento de tempo dt' procurado (transição) tem sua posição espacial conhecida. Tal posição do ponto procurado é exatamente na folga ($\pm\delta$).

Para tanto, é necessário realizar algumas operações algébricas na Eq. (3) antes de iniciar a integração no espaço. Deve-se ter em mente que são duas as exigências a serem satisfeitas: transformar o lado esquerdo da Eq. (3) em uma derivada em relação a u ($\bar{\mathbf{x}}' = d\bar{\mathbf{x}}/du$) de algum vetor qualquer $\bar{\mathbf{x}}$, para integrar no espaço; e garantir que uma das variáveis deste vetor qualquer $\bar{\mathbf{x}}$ seja o tempo, afinal, é o tempo de transição que deseja-se encontrar. Tais operações referem-se a:

i. Dividir a primeira linha da Eq. (3) por $c = du/dt$;

ii. Inverter a segunda linha da Eq. (3);

Aplicando os itens i. e ii. no lado esquerdo da Eq. (3), obteve-se:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \dot{u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{dt} \right) \\ \frac{du}{dt} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$\bar{\mathbf{x}}' = \begin{Bmatrix} \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{du}{dt} \right)}{du/dt} \\ \frac{du}{dt}^{-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{dt} \right) \frac{dt}{du} \\ \frac{dt}{du} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{d}{du} \left(\frac{du}{dt} \right) \\ \frac{dt}{du} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Assim,

$$\bar{\mathbf{x}}' = \begin{Bmatrix} \frac{d}{du} \left(\frac{du}{dt} \right) \\ \frac{dt}{du} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \int_{u_1}^{u_2=\delta} \bar{\mathbf{x}}' du = \begin{Bmatrix} \frac{du}{dt} \\ t \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Assim, as Eq. (12) e (13) mostram que é possível integrar no espaço e obter o tempo. Aplicando então as mesmas operações i. e ii. no lado direito da Eq. (3), obtém-se a Eq. (14) que deve ser integrada no espaço conforme o domínio explicitado.

$$\bar{\mathbf{x}}'(\mathbf{x}_{l_f}, \mathbf{x}_{i \neq l_f}) = \begin{cases} \frac{1}{c} \bar{\mathbf{A}}_f \mathbf{x} + \frac{1}{c} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} & , \quad |\mathbf{x}_{t, l_f}| \leq |\delta| \\ \frac{1}{c} \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \frac{1}{c} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + \delta \mathbf{f} & , \quad \mathbf{x}_{t, l_f} > \delta \\ \frac{1}{c} \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \frac{1}{c} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} - \delta \mathbf{f} & , \quad \mathbf{x}_{t, l_f} < -\delta \end{cases} \quad (14)$$

onde $\mathbf{x} = \{\dot{u} \ u\}^T$ e $\bar{\mathbf{x}} = \{\dot{u} \ t\}^T$, mostrado na Eq. (13); $\bar{\mathbf{x}}'$ é a derivada em relação à posição u de $\bar{\mathbf{x}}$, mostrada na Eq. (12); $\mathbf{x}_t$ é o ponto anterior ao ponto onde detecta-se a mudança de domínio; c é du/dt do ponto $\mathbf{x}_t$, mostrado na equação (17); $\mathbf{f}$ é mostrado na Eq. (4); $\bar{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{A}}_f$ são as matrizes das Eq. (5) e (6) com a linha onde há a folga (segunda linha, $l_f = 2$) completa com zeros, conforme Eq. (15) e (16), respectivamente.

Vale salientar que $\bar{\mathbf{x}}$ é escrito em função de $\mathbf{x}_{l_f}$ (linha da folga) e de $\mathbf{x}_{i \neq l_f}$ (linha diferente da linha da folga), pois para o método de Runge-Kutta ambos são acrescidos de valores diferentes, já que $\mathbf{x}_{l_f}$ é a própria variável de integração.

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{k}{m} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$c = \begin{cases} \sum_{j=1}^{2n} a_{l_f,j} \mathbf{x}_{t_j}, & |\mathbf{x}_{t,l_f}| > |\delta| \\ \sum_{j=1}^{2n} a_{f_{l_f},j} \mathbf{x}_{t_j}, & |\mathbf{x}_{t,l_f}| \leq |\delta| \end{cases} \quad (17)$$

em que n é o número de graus de liberdade, no caso $n = 1$; a_{l_f} e $a_{f_{l_f}}$ são os componentes da linha da folga (segunda linha) das matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}_f$, mostradas nas equações (5) e (6), respectivamente, e $\mathbf{x}_t$ é o ponto logo antes de mudar de domínio.

Dessa forma, para realizar o item 4 do procedimento descrito previamente, utiliza-se o método de Runge-Kutta, explícito na Eq. (18), para variável de integração sendo a posição $\mathbf{x}_{l_f}$ (ou u).

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_\delta &= \frac{h}{6}(K_{e1} + 2K_{e2} + 2K_{e3} + K_{e4}) \\ K_{e1} &= \bar{\mathbf{x}}'(\mathbf{x}_t) \\ K_{e2} &= \bar{\mathbf{x}}'(\mathbf{x}_{t,l_f} + \frac{h}{2}, \mathbf{x}_{t,i \neq l_f} + \frac{h}{2}K_{e1}) \\ K_{e3} &= \bar{\mathbf{x}}'(\mathbf{x}_{t,l_f} + \frac{h}{2}, \mathbf{x}_{t,i \neq l_f} + \frac{h}{2}K_{e2}) \\ K_{e4} &= \bar{\mathbf{x}}'(\mathbf{x}_{t,l_f} + h, \mathbf{x}_{t,i \neq l_f} + hK_{e3}) \end{aligned} \quad (18)$$

em que o subíndice i indica a i -ésima linha; l_f indica a linha do vetor $\mathbf{x}$ que contém a variável de posição, neste caso, $l_f = 2$. Já o passo de integração h no espaço é tal que segue a Tab 1, já que o passo é calculado como sendo a diferença entre a posição do ponto posterior (sempre na transição de domínio, $\pm\delta$) e a do ponto anterior ($\mathbf{x}_{t,l_f}$), valendo salientar que o valor da folga δ é mantido sempre positivo.

Tabela 1: Valor do passo para a integração no espaço, de acordo com os pontos mostrados na Figura 3.

Pontos	Passo h
A e D	$\delta - \mathbf{x}_{t,l_f}$
B e C	$-\delta - \mathbf{x}_{t,l_f}$

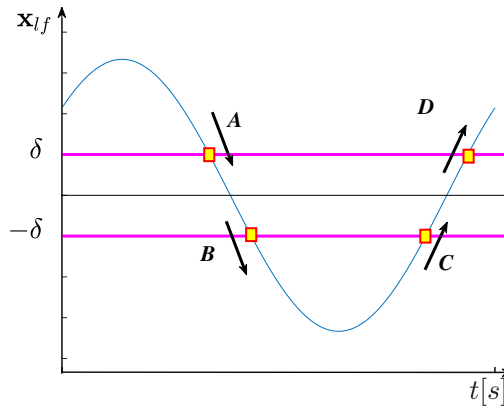


Figura 3: Pontos indicando mudança de domínio: A - entrando na folga, $\mathbf{x}_{t,l_f} > 0$; B - saindo da folga, $\mathbf{x}_{t,l_f} < 0$; C - entrando na folga, $\mathbf{x}_{t,l_f} < 0$ e D - saindo da folga, $\mathbf{x}_{t,l_f} > 0$.

É importante deixar claro que o método de Runge-Kutta exige que a variável de integração seja acrescida em alguma fração do passo em todos os locais que aparecer na equação a ser integrada, enquanto que as variáveis dependentes devem ser acrescidas do produto desta fração do passo pela devida constante K do método, por isso a distinção entre linha da folga (que é a variável de integração) e as outras na Eq. (18).

Vale, ainda, salientar que a variável independente de integração $\mathbf{x}_{t,l_f}$ aparece em c (Eq. 17), logo, respeitando o método de Runge-Kutta de quarta ordem, deve-se atualizar $\mathbf{x}_{t,l_f}$ em todos os termos que aparece na Eq. (14), inclusive o presente em c . Porém, para este sistema especificamente, as constantes a_{l_f,l_f} e $a_{f_{l_f},l_f}$ da linha $l_f = 2$ e da coluna $l_f = 2$ das matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}_f$ (Eq. 5 e 6), respectivamente, são iguais a zero. Logo, como são essas constantes que multiplicam a variável independente $\mathbf{x}_{t,l_f}$ presente em c , o fato de atualizá-la em c , ou não, é indiferente.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Primeiramente, a fim de definir os parâmetros de simulação computacional, tem-se que a rigidez k está fixada ao definir-se a massa m e a frequência f (Eq. 8); a amplitude da metade da folga δ está fixada ao definir-se a amplitude de movimento u_0 e a razão $R_{u_0,\delta}$ (primeira parte da Eq. 19); e, por fim, o passo de integração dt está fixado ao definir-se a frequência de oscilação $f = 1/T$ e a razão $R_{T,dt}$ (segunda parte da Eq. 19).

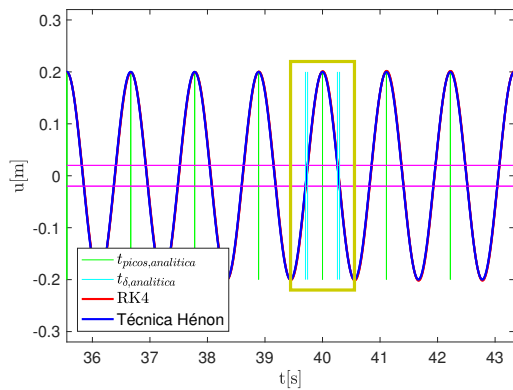
$$R_{u_0,\delta} = \frac{u_0}{\delta} \quad R_{T,dt} = \frac{T}{dt} \quad (19)$$

Sendo assim, para apresentar a resposta temporal, os parâmetros utilizados são escolhidos arbitrariamente, conforme mostrado na Tab. 3, para auxiliar a visualização das respostas numéricas: RK4¹ e técnica de Hénon².

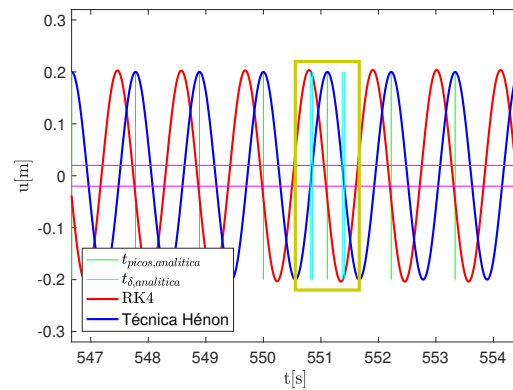
Tabela 2: Parâmetros utilizados para simulações numéricas da resposta do sistema da Fig. 1.

m	10 kg
u_0	0,2 m
f	0,9 Hz
$R_{u_0,\delta}$	10
$R_{T,dt}$	100

A Figura 4 mostra, para intervalos de tempo diferentes, as soluções numéricas RK4, técnica de Hénon, além da solução analítica representada por retas verticais verdes, que indicam o tempo referente aos picos positivos, e ainda, por retas verticais azuis cianeto indicando os tempos de transição t_δ , obtidos com a solução analítica³. Além disso, há um retângulo em cada uma dessas figuras (a) e (b) destacando regiões que são mostradas amplificadas na Fig. 5.

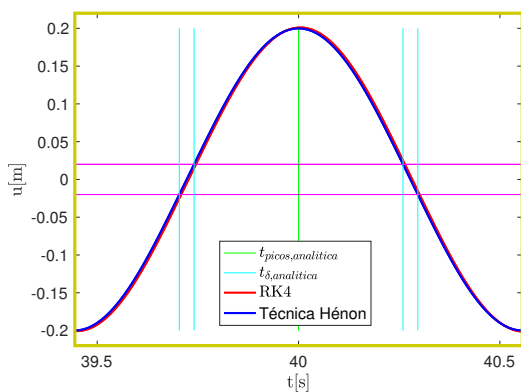


(a) Resposta para o intervalo de tempo entre 36 s e 43 s.

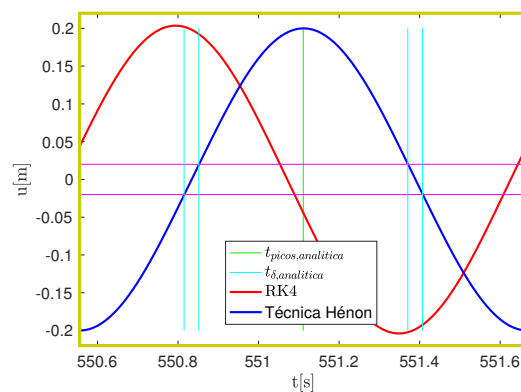


(b) Resposta para o intervalo de tempo entre 547 s e 554 s.

Figura 4: Resposta temporal das soluções numéricas Runge-Kutta de quarta ordem convencional, técnica de Hénon, e analítica representada por retas verticais.



(a) Resposta para o intervalo de tempo entre 39 s e 41 s.



(b) Resposta para o intervalo de tempo entre 550 s e 552 s.

Figura 5: Regiões amplificadas da Figura 4 para soluções numéricas Runge-Kutta de quarta ordem convencional e técnica de Hénon, além da analítica representada por retas verticais.

É possível perceber analisando as Fig. 4 e 5 que ambas soluções numéricas apresentam respostas diferentes, inclusive essa diferença é alterada ao longo do tempo. A reta verde vertical indica onde o pico positivo deveria estar segundo a solução analítica, e na Fig. 5b permite notar qualitativamente a defasagem do RK4 em relação à solução analítica.

¹ Trata-se do método de Runge-Kutta de quarta ordem convencional, apresentado na subseção 2.2

² Trata-se do método de Runge-Kutta de quarta ordem convencional modificado pela técnica de Hénon, detalhada na subseção 2.3

³ Os tempos de transição de domínio, ou seja, quando $u = \pm\delta$, foram calculados e deduzidos por meio da solução analítica, porém, este artigo não tem como objetivo o detalhamento de sua dedução.

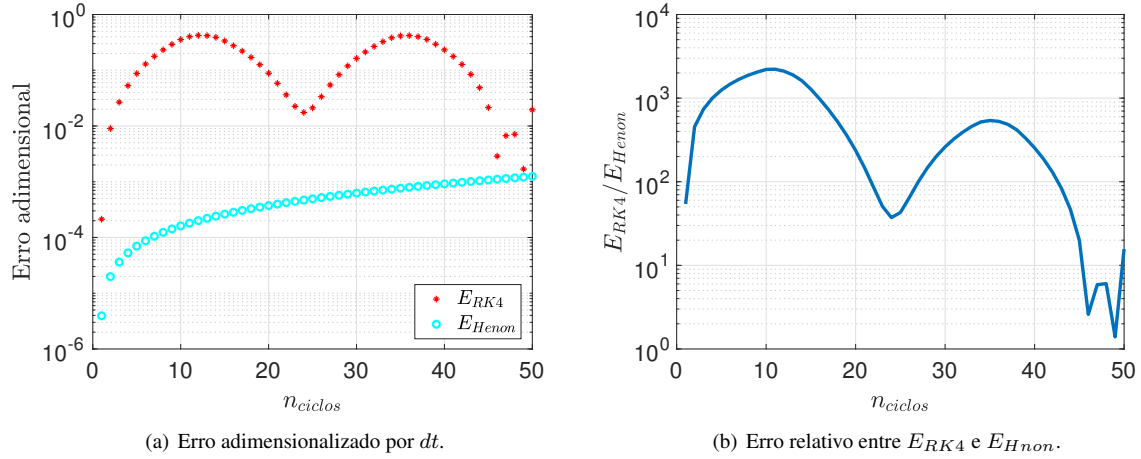
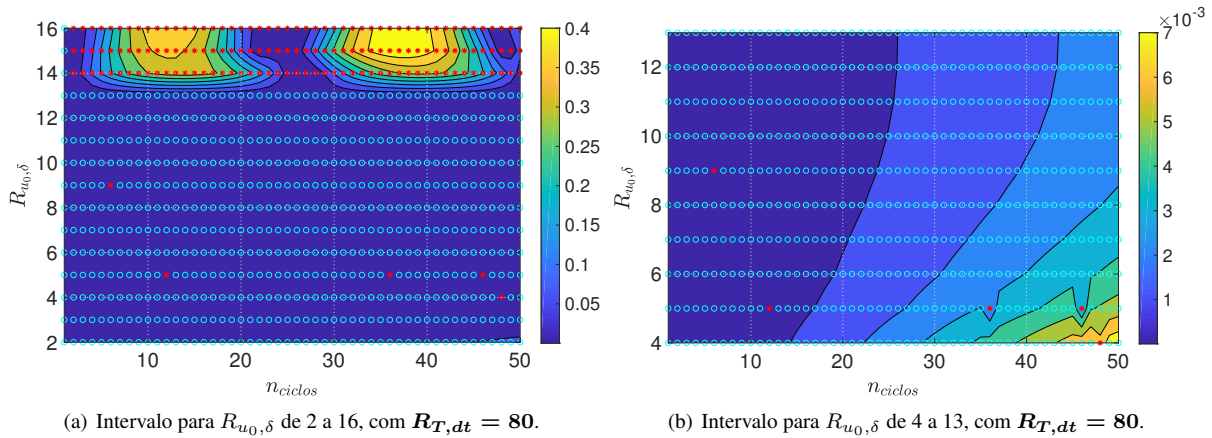


Figura 6: Erro temporal adimensionalizado por dt para ambos os métodos RK4 e técnica de Hénon em relação à solução analítica em a), e erro relativo entre eles em b) para o intervalo de número de ciclos de 0 até 50.

Já na Fig. 6a, que apresenta os erros adimensionais de ambos os métodos em relação à solução analítica, fica claro quantitativamente que, para o intervalo de números de ciclos mostrado, a técnica de Hénon é mais adequada que RK4 para os parâmetros utilizados; ainda na Fig. 6b, é possível notar que neste intervalo de tempo o erro do RK4 chega a ser mais de 1000 vezes maior que o da técnica de Hénon, ambos em relação à solução analítica. Deixa-se claro que o erro foi calculado como sendo a defasagem temporal do ponto obtido na integração imediatamente após o ponto A da Fig. 3, ou seja, o ponto representado pelo símbolo de uma estrela na Fig. 2, em relação à analítica. Ressalta-se, ainda, que o erro não tem unidade, pois foi adimensionalizado dividindo a defasagem temporal entre numérica e analítica pelo passo de integração dt .

Tendo apresentado o valor do erro para parâmetros específicos, os resultados mostrados a seguir consistem em mostrar, para situações mais gerais, qual das soluções numéricas RK4 e técnica de Hénon é mais adequada. Na Figura 7 são apresentados gráficos bidimensionais com os eixos x e y contendo um par entre as três variáveis a seguir: valor do número de ciclos percorridos n_{ciclos} , razão $R_{u_0, \delta}$ e razão $R_{T, dt}$ (Eq. 19); além disso, o mapa de cores indica o valor do erro temporal adimensionalizado pelo passo de integração dt do método mais adequado (menor erro), onde os símbolos asterisco e círculo indicam que tal método refere-se ao RK4 e à técnica de Hénon, respectivamente. O mesmo vale para o gráfico tridimensional da Fig. 8, com a ressalva de que não há mapa de cores, mas sim cores nos símbolos, onde os erros máximo e mínimo são representados pelas cores verde-limão mais forte e roxo escuro, respectivamente.



Analisando a Fig. 7a, é possível notar que para $R_{T, dt} = 80$, valores de $R_{u_0, \delta}$ maiores que 14 resultam em erros mais elevados, o que coincide com o RK4 ser o mais adequado. Tem-se ainda que, ao analisar a Fig. 7c, percebe-se que para $R_{u_0, \delta} = 14$, é justamente em $R_{T, dt} = 80$ onde aparece a linha horizontal com asteriscos, indicando que RK4 é mais adequado, ou seja, coerente com o observado no item a). Além disso, em ambos itens a) e c) desta figura, percebe-se que os asteriscos aparecem de uma maneira geral, em linhas horizontais, ou seja, não há uma relação clara da variação do número de ciclos com a presença de asteriscos, apenas percebe-se também que conforme aumentam os ciclos, o erro aumenta (Fig. 7b e 7d). Dessa observação, conclui-se que o que mais influencia em qual método é o mais adequado e na amplitude do erro é a combinação $(R_{T, dt}, R_{u_0, \delta})$, o que fica bastante visível no item e), onde a curva tracejada amarela indica uma divisão aproximada do plano em duas regiões: *i.* à sua esquerda/acima, em que existem picos de erros mais elevados e várias regiões de RK4 mais adequado; e *ii.* à sua direita/abaixo, onde os erros são mais amenos e Hénon é mais adequado. Observa-se novamente a coerência com observado anteriormente no fato de essa curva tracejada passar pelo ponto $(R_{T, dt} = 80, R_{u_0, \delta} = 14)$.

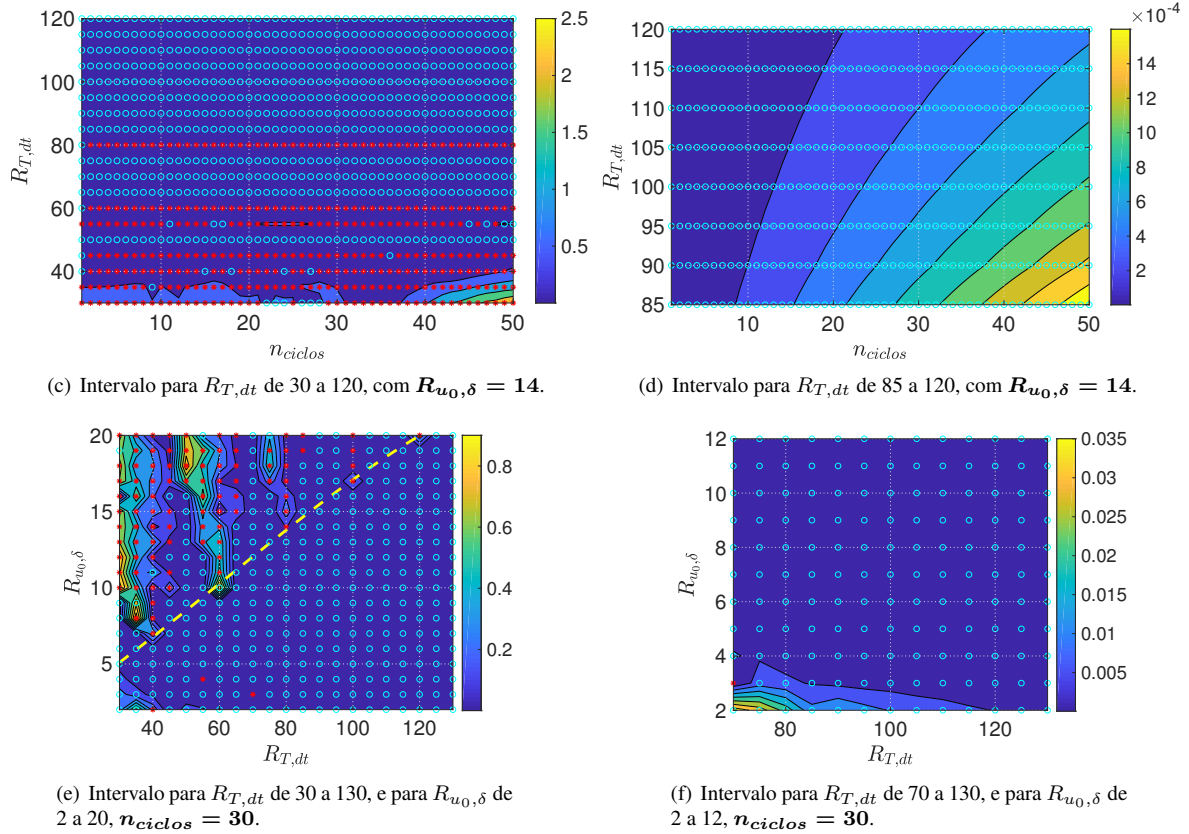


Figura 7: Plano xy com duas dentre as três variáveis $R_{u_0,\delta}$, $R_{T,dt}$ e n_{ciclos} , com mapa de cores indicando o erro temporal adimensionalizado por dt , em que asteriscos vermelhos representam que o método de RK4 é mais adequado que a técnica de Hénon e círculos cianetos, o inverso.

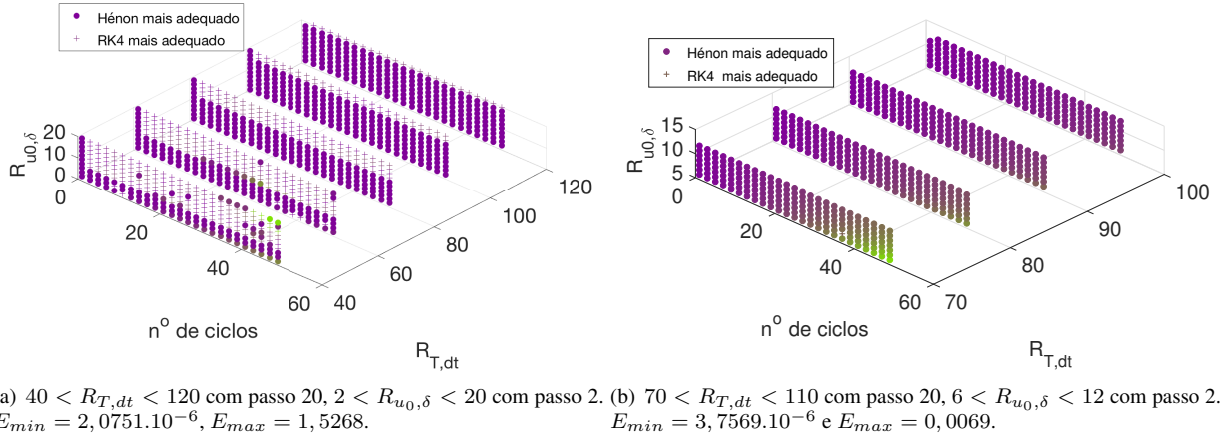


Figura 8: Os erros máximo e mínimo são representado pelas cores verde-limão mais forte e roxo escuro, respectivamente. Os símbolos de adição e círculo preenchido representam que o método mais adequado é RK4 e Hénon, respectivamente.

As Fig. 7b, d, f e Fig. 8b mostram claramente a relação qualitativa do erro temporal adimensionalizado pelo passo de integração dt com as variáveis n_{ciclos} , $R_{u_0,\delta}$ e $R_{T,dt}$ (Eq. 19), conforme mostra a Tab. 3.

Tabela 3: Efeito da alteração dos parâmetros $R_{u_0,\delta}$, $R_{T,dt}$ e n_{ciclos} no erro em relação à solução analítica da técnica de Hénon para regiões em que essa é mais adequada que o método RK4.

$\uparrow E$	$\downarrow R_{u_0,\delta}$	$\downarrow R_{T,dt}$	$\uparrow n_{ciclos}$
$\downarrow E$	$\uparrow R_{u_0,\delta}$	$\uparrow R_{T,dt}$	$\downarrow n_{ciclos}$

4. CONCLUSÃO

Após a obtenção dos resultados, notou-se claramente que as folgas geométricas afetam nas análises de sistemas vibratórios mesmo para um sistema de um grau de liberdade. Entretanto, observou-se que existem algumas técnicas de soluções numéricas computacionais que estão disponíveis para resolver esses sistemas não lineares, como o método de Runge-Kutta de quarta ordem convencional (RK4) e a Técnica de Hénon. Tendo observado os resultados foi possível concluir que a combinação de parâmetros do sistema influencia em qual método é o mais adequado, ou seja, o que apresenta menor erro em relação à solução analítica. De maneira geral, o erro diminui para razões $R_{u_0,\delta}$ e $R_{T,dt}$ maiores e para número de ciclos percorridos menor. Além disso, regiões em que o erro é maior coincidem com regiões em que o RK4 é mais adequado. Todavia, em regiões em que a técnica de Hénon é mais adequada, seu erro em relação à analítica chega a ser mais de 1000 vezes menor que o do RK4.

5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) (proc. n° 2017/08008–1) pelo apoio financeiro e ao Grupo de Materiais e Sistemas Inteligentes (GMSINT).

6. REFERÊNCIAS

- Bueno, D.D., Góes, L.C.S. and Gonçalves, P.J.P., 2014. “Control of limit cycle oscillation in a three degrees of freedom airfoil section using fuzzy takagi-sugeno modeling”. *Shock and Vibration*, pp. 1–12.
- Den Hartog, J., 1985. *Mechanical Vibrations*. Civil, Mechanical and Other Engineering Series. Dover Publications. ISBN 9780486647852.
- Henon, M., 1982. “On the numerical computation of Poincaré maps”. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 5, No. 2-3, pp. 412–414.
- Preumont, A., 2013. *Twelve Lectures on Structural Dynamics*. Solid Mechanics and Its Applications. Springer Netherlands. ISBN 9789400763821.
- Sperandio, D., Mendes, J. and Silva, L., ????. *Calculo Numerico*. PEARSON BRASIL. ISBN 9788543006536.

ANALYSIS OF A DYNAMIC SYSTEM WITH FREEPLAY USING HÉNON’S TECHNIQUE

Larissa Drews Wayhs, laridw9@gmail.com¹

Douglas Domingues Bueno, douglas.bueno@unesp.br²

¹São Paulo State University (UNESP), Department of Mechanical Engineering, Ilha Solteira, SP, Brasil

²São Paulo State University (UNESP), Department of Mathematics, Ilha Solteira, SP, Brasil

Resumo: It is known that the presence of nonlinear effects in aeroelastic systems can change so important to flight dynamics. In particular, freeplay may cause changes in the stability of the aircraft, as, for example, phase error, in which case feature a high degree of importance to self-excited vibration problems, such as the flutter. Thus, this work aims to analyze and compare with the analytic solution two techniques for numerical solution of a vibratory system with one degree of freedom and with the presence of freeplay, one being the Runge-Kutta 4th order conventional method and the other the technique of Hénon. After comparison with the analytic solution, one could observe that for a specific combination of parameters, the Hénon’s technique presents an error more than 1000 times smaller when compared with Runge-Kutta 4th order. It is noted that, depending on the combination of parameters like mass, oscillation frequency, range of motion, range of freeplay and step of integration, changes which is the most appropriate numeric method among the analyzed. In addition, it is possible to observe that as increases the time analyzed and diminishes the reasons $R_{T,dt}$ and $R_{u_0,\delta}$, the errors obtained are greater, that is, the lags of the numerical solutions with the analytic solution increases. In this way, clearly noted that freeplays can affect the analysis of vibration problems and must be taken into consideration, especially when it concerns self-excited vibration.

Palavras-chave: freeplay, Hénon’s technique, numerical solution, phase error