

UM MÉTODO DE CONTROLE ROBUSTO APLICADO NO PROBLEMA DE RASTREAMENTO DE TRAJETÓRIA POR UM ROBÔ MÓVEL NÃO-HOLONÔMICO

Jair Luiz de Azevedo Filho, jairfilho_el@hotmail.com¹

Josiel Alves Gouvêa, josiel.gouvea@cefet-rj.br²

Alessandro Rosa Lopes Zachi, alessandro.zachi@cefet-rj.br³

¹Universidade Federal do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Elétrica (COPPE) - Centro de Tecnologia, Cidade Universitária, Rio de Janeiro

²Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca (CEFET-RJ)/Campus Nova Iguaçu, Núcleo de Pesquisa em Mecatrônica - Estrada de Adrianópolis, 1317, Nova Iguaçu - RJ

³Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca (CEFET-RJ)/Campus Maracanã, Programa de Engenharia Elétrica - Avenida Maracanã, 229, Rio de Janeiro - RJ

Resumo: Este trabalho propõe a utilização de uma extensão da técnica de controle ADRC (Active Disturbance Rejection Control) em um robô móvel não-holonômico. Devido à sua robustez às incertezas paramétricas da planta, a extensão do método ADRC aqui proposta pode ser aplicada no controle de rastreamento de trajetória por um robô móvel com acionamento diferencial e parâmetros dinâmicos incertos, incluindo a incerteza no seu ganho de controle. Utilizando uma estratégia em cascata, o modelo dinâmico do robô é separado em uma parte dinâmica em série com uma parte cinemática não-holonômica. Então, utilizando a estratégia ADRC estendida, é projetado um controlador de rastreamento dinâmico, cujo o sinal de referência é a saída de um controlador que resolve o problema de rastreamento para a parte cinemática, levando a um sistema estável em malha fechada e robusto às incertezas paramétricas.

Palavras-chave: Controle ADRC, Robôs móveis, Controle em cascata, Sistemas não-holônômicos, Parâmetros incertos

1. INTRODUÇÃO

O estudo de técnicas de controle dinâmico para o campo de robótica móvel surge como uma importante área de estudo devido à grande gama de aplicações, tais como inspeção, monitoramento e exploração de ambientes hostis, transporte de cargas, vigilância e outras. No entanto, para os robôs desempenharem suas tarefas, é necessário o controle dos mesmos, de forma a seguirem trajetórias de referência pré-definidas. Contudo, um fator complicante no controle de robôs móveis são as incertezas nos valores dos seus parâmetros dinâmicos, seja por problemas de modelagem ou pela variação destes parâmetros como consequência da tarefa a ser desempenhada. É o caso, por exemplo, de robôs que transportam cargas, onde as suas massas variam conforme a carga a ser transportada. Uma vez que as incertezas nos parâmetros dinâmicos geram perda de desempenho do controlador, deve-se procurar algoritmos de controle robustos à essas incertezas. Neste contexto, foram implementadas técnicas de controle adaptativas não lineares, tais como backstepping (Hou *et al.*, 2009; Esmaeili *et al.*, 2017), MRAC (Tzafestas, 2018; Naveed and Khan, 2017) e VS-MRAC (Oliveira *et al.*, 2014), que garantem o rastreamento da trajetória mesmo com incertezas nos parâmetros dinâmicos dos robôs. No entanto, a fraqueza das estratégias de controle backstepping e MRAC é o comportamento transitório imprevisível durante a fase de adaptação dos parâmetros do controlador, principalmente se houver erro significativo nos valores iniciais dos parâmetros dinâmicos. Além disso, apresentam pouca robustez às perturbações externas. No caso do VS-MRAC, o mesmo tem melhor robustez e comportamento transitório, no entanto o sinal de controle possui indesejadas oscilações de alta frequência e amplitude finita (*chattering*), o que torna necessária a utilização de estratégias para atenuar essas oscilações, estratégias essas que podem comprometer o desempenho do controlador.

Neste trabalho, propõe-se a aplicação de uma extensão, proposta em (Correia *et al.*, 2017), da técnica de controle ADRC (Active Disturbance Rejection Control) (Gao *et al.*, 2001a) no controle de rastreamento de trajetória de um robô móvel não-holonômico com parâmetros dinâmicos incertos. A vantagem da estratégia ADRC com relação às técnicas de controle adaptativas não-lineares citadas, é a sua simplicidade de implementação e menor custo computacional, por se tratar de uma técnica de controle linear, além de ter grande robustez às perturbações externas. A extensão utilizada, denominada ADRC com planta modificada, permite, ao contrário do ADRC tradicional, considerar também as incertezas no ganho de controle. Para isto, utiliza-se um filtro em paralelo à planta, provocando uma mudança estrutural do sistema do ponto de vista entrada-saída. Com a modificação proposta, a dinâmica não modelada do sistema é estimada e cancelada, enquanto o ganho de controle do sistema torna-se unitário. Essa característica do ADRC com planta modificada é muito

útil no controle de robôs móveis, pois as incertezas na massa e momento de inércia tornam o ganho de controle também incerto.

Para utilizar o ADRC com planta modificada no controle de rastreamento de trajetória do robô móvel, utiliza-se uma estrutura em cascata, que consiste em dividir a descrição matemática do robô em uma parte dinâmica, com parâmetros incertos e as velocidades angulares das rodas como saída, em série com uma parte cinemática não-holonômica, com a posição e orientação como saída. A ideia é projetar um controlador de rastreamento cinemático, que considera as restrições não-holonômicas dos robôs, e utilizar a saída deste controlador como uma velocidade de referência a ser rastreada pela parte dinâmica, controlada pelo ADRC com planta modificada.

Este artigo está organizado da seguinte forma: Na seção 2, é apresentado o controlador ADRC e o estimador estendido, onde é feita uma análise de estabilidade em malha fechada. Na seção 3, é apresentado o ADRC com planta modificada (Correia *et al.*, 2017), onde é feita uma pequena alteração na lei de controle, visando resolver o problema de rastreamento de trajetória. É implementada uma análise matemática do sistema em malha fechada, onde o rastreamento de trajetória é demonstrado. O modelo dinâmico do robô utilizado e as estratégia de controle em cascata são apresentados na seção 4. Os resultados de simulação são apresentados na seção 5. Finalmente, a seção 6 apresenta as conclusões finais.

2. Controlador ADRC

Considere uma classe de sistemas lineares e invariantes no tempo de segunda ordem representada por

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = bu(t), \quad (1)$$

onde $y(t) \in \mathbb{R}$ representa a variável de saída da planta e $u(t) \in \mathbb{R}$ representa a variável de entrada. Os coeficientes a_1 e a_0 são constantes reais e $b \in \mathbb{R}$ é a constante que será, doravante, denominada *ganho de controle*. Assuma que o objetivo de controle é projetar uma lei de formação para $u(t)$ que force a saída da planta a convergir para um valor constante $y^* \in \mathbb{R}$ em regime permanente. Reescrevendo (1) na forma

$$\ddot{y} = f(t) + bu(t), \quad (2)$$

surge o termo

$$f(t) = -a_1\dot{y} - a_0y. \quad (3)$$

Com esta abordagem, o sistema dinâmico da Eq. (2) pode ser considerado como uma cadeia de dois integradores em série, com sinal de entrada $u(t)$, sinal de saída $y(t)$ e sujeito a um distúrbio de entrada $f(t)$. Em (Han, 1998; Gao *et al.*, 2001b; Han, 2009), este termo $f(t)$, que é definido pela combinação dos sinais não mensuráveis do sistema, foi denominado de *distúrbio generalizado*. Nesta formulação, uma lei de controle estabilizante poderia ser escolhida como:

$$u(t) = \left(\frac{1}{b}\right) \left[-f(t) - \lambda_1\dot{y} - \lambda_0(y - y^*) \right], \quad (4)$$

sendo λ_1 e λ_0 os coeficientes de um polinômio (mônico) *Hurwitz* de segunda ordem. Entretanto, como o termo $f(t)$ não é mensurável, a lei de controle (4) não pode ser implementada diretamente. Contudo, se por metodologia de projeto, o distúrbio $f(t)$ for considerado como uma variável de estado estendida, isto é, $X_1 = y$, $X_2 = \dot{y}$ e $X_3 = f(t)$, então uma representação de estados para o sistema em (2) poderia ser:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2 \\ \dot{X}_2 &= X_3 + bu \\ \dot{X}_3 &= \dot{f}(t), \end{aligned} \quad (5)$$

para a qual são definidas as seguintes matrizes

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C &= [1 \quad 0 \quad 0], D = [0] \end{aligned} \quad (6)$$

Assumindo, por ora, que o ganho de controle b é conhecido, é possível projetar um estimador (observador) de estados para o sistema da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}} &= A\hat{X} + Bu + Le_y, \\ \hat{y} &= C\hat{X}, \end{aligned} \quad (7)$$

sendo $e_y = (y - \hat{y})$ o erro de saída do observador e $L = [L_1 \ L_2 \ L_3]^T \in \mathbb{R}^3$ o vetor de ganhos ajustáveis para gerar estimativas dos sinais da lei de controle em (4), ou seja,

$$u(t) = \left(\frac{1}{b}\right) \left[-\hat{X}_3 - \lambda_1\hat{X}_2 - \lambda_0(\hat{X}_1 - y^*) \right], \quad (8)$$

onde $\hat{X}_1(t)$, $\hat{X}_2(t)$ e $\hat{X}_3(t)$ são as respectivas estimativas de $X_1(t)$, $X_2(t)$ e $X_3(t)$ (ou $f(t)$).

O Teorema 1, demonstrado em (Correia *et al.*, 2017), assegura que o observador de estados estendido (7) e a lei de controle (8) garantem, dada uma sintonia apropriada dos ganhos L_1 , L_2 , L_3 do observador e λ_1 , λ_0 da lei de controle, que $\lim_{t \rightarrow \infty} e_{xi}(t) = 0$ para $i = 1, 2, 3$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y^*) = 0$, onde

$$e_x = \begin{bmatrix} e_{x1} \\ e_{x2} \\ e_{x3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y - \hat{X}_1 \\ \dot{y} - \hat{X}_2 \\ f(t) - \hat{X}_3 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Theorem 1 *Considere o sistema de controle composto pela planta (1), pelo observador de estados estendido (7) e pela lei de controle (8). Se os valores das constantes de projeto L_1 , L_2 , L_3 do observador e λ_1 , λ_0 da lei de controle forem escolhidos suficientemente grandes, então as seguintes propriedades serão válidas para o sistema em malha fechada:*

(i) *Todos os sinais do sistema são uniformemente limitados $\forall t$;*

(ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} e_{xi}(t) \rightarrow 0$, $(i = 1, 2, 3)$;

(iii) $\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - y^*) \rightarrow 0$.

Observação 1 *Note que o projeto do observador estendido, definido na Eq. (7), é dependente do valor exato do ganho de controle b da planta. Na falta do conhecimento exato desta constante, o projeto do observador estendido fica inviabilizado, causando uma restrição de aplicação do método tradicional em plantas com incerteza no ganho de controle. Esse problema é resolvido utilizando-se o ADRC com planta modificada, explicado na próxima seção.*

3. ADRC com planta modificada

Considere-se a classe de sistemas definidos por (1), mas com incerteza também no ganho de controle b , além de a_1 e a_0 . Pretende-se projetar uma lei de controle $u(t)$ tal que a saída da planta $y(t)$ rastreie um valor de referência $y^*(t)$. Para o problema de controle formulado, assumem-se as seguintes hipóteses fundamentais:

(H1) *O sinal de saída $y(t)$ da planta é mensurável;*

(H2) *O ganho de controle b é uma constante não-nula que possui sinal conhecido;*

Note que, ao contrário do que foi considerado na seção 2, o sinal de referência não é constante, o que exigiu uma pequena alteração na lei de controle proposta em (Correia *et al.*, 2017), que também considerava a referência fixa..

A ideia principal do ADRC com planta modificada é promover uma transformação estrutural no sistema original, do ponto de vista entrada/saída, a fim de se conseguir obter um novo sistema dinâmico com ganho de controle conhecido. Em seguida, o método ADRC padrão é aplicado para controlar a saída deste novo sistema e verificar se os efeitos resultantes na planta original atenderam aos objetivos delineados inicialmente. A metodologia utilizada para produzir tal efeito consiste na introdução de um filtro linear e estável $Q_0(s)$ em paralelo com a planta, conforme o diagrama em blocos da Figura 1. No diagrama, $K_0 > 0 \in \mathbb{R}$ representa uma constante de projeto e $sign(b)$ é uma constante que representa os valores $+1$ ou -1 . Sendo $Q_0(s)$ um filtro estável, então tem-se que:

$$\gamma > 0, \quad (s + \gamma)^2 = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0.$$

Escrevendo a equação dinâmica do novo sinal de saída $z(t)$, considerando $\beta = K_0 sign(b)$ e com base na configuração da Fig. 1, tem-se que:

$$z(t) = \beta y(t) + u_f(t), \quad (10)$$

$$\ddot{z} = \beta(-a_1 \dot{y} - a_0 y + bu) + \ddot{u}_f, \quad (11)$$

$$\dot{u}_f = \dot{z} - \beta \dot{y}, \quad (12)$$

$$\ddot{u}_f = -\alpha_1 \dot{u}_f - \alpha_0 u_f + \dot{u}. \quad (13)$$

Utilizando (12) e (13) em (11), a dinâmica de segunda ordem vai resultar em

$$\ddot{z} = -\alpha_1 \dot{z} - \alpha_0 z + \beta(\alpha_1 - a_1)\dot{y} + \beta(\alpha_0 - a_0)y + b_p u + \dot{u}, \quad (14)$$

sendo $b_p = K_0 sign(b)b = K_0|b|$.

Definindo-se a perturbação generalizada $g(t)$ como sendo:

$$g(t) = \beta(\alpha_1 - a_1)\dot{y} + \beta(\alpha_0 - a_0)y + b_p u, \quad (15)$$

então a Eq. (14) reduz-se à:

$$\ddot{z} + \alpha_1 \dot{z} + \alpha_0 z = g(t) + \dot{u}, \quad (16)$$

Com esta abordagem, o novo sinal de controle passa a ser $\dot{u}$, que possui ganho unitário. Como será mostrado nos desenvolvimentos a seguir, agindo-se desta forma, é possível aplicar o método ADRC no sistema modificado da Eq. (16) sem a exigência do conhecimento exato do parâmetro b da planta original.

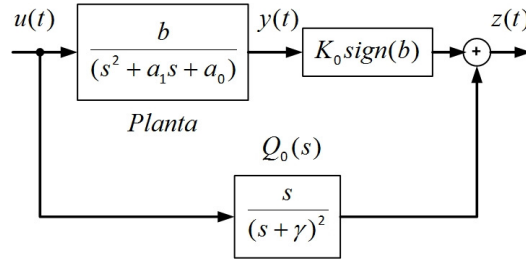


Figura 1: Diagrama em blocos da solução proposta.

3.1 Projeto do observador

Definindo-se as variáveis de estado por $Z_1 = z$, $Z_2 = \dot{z}$ e $Z_3 = g(t)$, a representação de estados do sistema (16) na forma canônica controlável possui as seguintes matrizes:

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_m = [1 \ 0 \ 0], D_m = [0]. \quad (17)$$

Uma vez que o par (A_m, C_m) é observável, então o observador estendido (ADRC) para o sistema em (16) assume o seguinte formato:

$$\begin{cases} \dot{\hat{Z}}_1 = \hat{Z}_2 + \bar{L}_1 e_z \\ \dot{\hat{Z}}_2 = -\alpha_0 \hat{Z}_1 - \alpha_1 \hat{Z}_2 + \hat{Z}_3 + \dot{u} + \bar{L}_2 e_{z1} \\ \dot{\hat{Z}}_3 = \bar{L}_3 e_z, \end{cases} \quad (18)$$

sendo $\hat{Z}_1$, $\hat{Z}_2$ e $\hat{Z}_3$ os respectivos estados estimados de z , $\dot{z}$ e $g(t)$, $e_{z1} = z(t) - \hat{Z}_1$ o erro de saída do estimador e $\bar{L}_1, \bar{L}_2, \bar{L}_3$ os ganhos do estimador. Com esta nova estrutura, a dinâmica dos erros do observador será dada por:

$$\begin{cases} \dot{e}_z = \underbrace{(A_m - \bar{L}C_m)}_{\bar{A}_m} e_z + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_g} \dot{g}(t), \\ e_y = C_g e_z, \end{cases} \quad (19)$$

onde $\bar{L} = [\bar{L}_1 \ \bar{L}_2 \ \bar{L}_3]^T$. Para obter a função de transferência que relaciona a entrada $\dot{g}(t)$ com a saída $e_{z3}(t)$, basta calcular a expressão

$$\frac{E_{z3}(s)}{G(s)} = C_g(sI - \bar{A}_m)^{-1}B_g,$$

com $C_g = [0 \ 0 \ 1]$. Logo, escolhendo-se $\bar{L}_1, \bar{L}_2$ e $\bar{L}_3$ tal que os pólos do estimador sejam iguais, tem-se que:

$$\frac{E_{z3}(s)}{G(s)} = \frac{(s+w_0)^3 - w_0^3}{(s+w_0)^3}, \quad 3w_0 = \bar{L}_1 + \alpha_1, \quad 3w_0^2 = \alpha_1 \bar{L}_1 + \bar{L}_2 + \alpha_0 \quad \text{e} \quad w_0^3 = \bar{L}_3. \quad (20)$$

Lembrando que $E_{z3} = G(s) - \hat{Z}_3(s)$, é possível simplificar a Eq. (20) para obter a relação:

$$\hat{Z}_3(s) = \frac{w_0^3}{(s+w_0)^3} G(s). \quad (21)$$

Assim como no caso do método ADRC tradicional do Teorema 1, a estimativa $\hat{Z}_3(t)$ da perturbação generalizada $g(t)$ pode ser obtida de forma mais precisa escolhendo-se valores suficientemente grandes para os módulos dos polos $s = -w_0$ do observador estendido (18)-(20). A seguir, será proposta a lei de controle que utiliza a estimação $\hat{Z}_3(t)$ da perturbação generalizada $g(t)$.

3.2 Projeto de Controle

Observe que a parte homogênea de (16) (análoga ao polinômio do denominador do filtro $Q_0(s)$, dado por (13)) é estável. Logo, para promover a convergência assintótica de $z(t)$ para um valor de referência $z^*(t)$, basta escolher uma lei de controle $\dot{u}(t)$ do tipo:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\hat{Z}_3 + \alpha_0 z^* + \alpha_1 \dot{z}^* + \ddot{z}^*, \\ z^*(t) &= \beta y^*(t). \end{aligned} \quad (22)$$

Substituindo-se (22) em (16), obtém-se

$$\ddot{e} + \alpha_1 \dot{e} + \alpha_0 e = \underbrace{g(t) - \hat{Z}_3}_{e_{z3}}. \quad (23)$$

onde $e(t) = z(t) - z^*(t)$.

Uma condição suficiente que garante a convergência de $z(t)$ para $z^*(t)$ é que $\hat{Z}_3$ convirja para o valor real de $g(t)$. De acordo com (21), isto pode ser conseguido fazendo-se $w_0 \rightarrow \infty$, que é uma atribuição de valor inviável na prática. Sendo assim, é necessário investigar o sistema planta-observador-controlador em malha fechada como um todo para identificar se existem outras condições que possam assegurar suas propriedades de estabilidade e convergência.

3.3 Análise de estabilidade

Nesta seção, o interesse principal é investigar a estabilidade do sistema planta-observador-controlador em malha fechada em termos da limitação uniforme das amplitudes dos seus sinais. Para facilitar os desenvolvimentos matemáticos que se seguem sem perder a consistência matemática, assume-se, com base na Eq. (21), que:

$$\begin{aligned} \hat{Z}_3(s) &= c_0 G(s). \\ c_0 &\in (0; 1). \end{aligned} \quad (24)$$

Em (24), $c_0 \in \mathbb{R}$ é uma variável definida apenas para fins de análise e representa um fator de escala entre a estimativa e o valor de $G(s)$. Escrevendo (22) no domínio da frequência, com base em (24), tem-se

$$sU(s) = -c_0 G(s) + J^*(s), \quad (25)$$

onde $J^*(s)$ é a transformada de Laplace de $j(t) = \alpha_0 z^*(t) + \alpha_1 \dot{z}^*(t) + \ddot{z}^*(t)$.

Manipulando (25), com a ajuda das Eqs. (1), (15) e $b_p = K_0|b|$, é possível deduzir a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} U(s) &= \frac{(s^2 + a_1 s + a_0)J^*(s)}{s(s^3 + p_2 s^2 + p_1 s + p_0)}. \\ p_2 &= a_1 + b_p c_0, \\ p_1 &= a_0 + b_p c_0 \alpha_1, \\ p_0 &= b_p c_0 \alpha_0. \end{aligned} \quad (26)$$

Observe em (26) que, com exceção do polo simples na origem, é possível alocar os demais polos da função $U(s)$ no semi-plano lateral esquerdo do plano complexo apenas escolhendo-se valores para K_0 , α_1 e α_0 . Ajustando-se estes parâmetros, é possível afirmar, uma vez que o sinal de referência $z^*(t)$ é limitado, que a derivada do sinal de controle $\dot{u}(t)$ também será limitada, assim como $\hat{Z}_3$ (ver (22)). Uma vez que ω_0 pode ser alocado no semiplano lateral esquerdo por uma escolha apropriada de $\bar{L}$, α_1 e α_0 , conclui-se de (21) que $g(t)$ é limitado e consequentemente também é e_{z3} . Contudo, de (13) e (23) sabe-se respectivamente que

$$U_f(s) = \frac{1}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} \bar{U}(s) \quad (27)$$

e

$$E(s) = \frac{1}{s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} E_{z3}(s) = \frac{1}{(s + \gamma)^2} E_{z3}(s). \quad (28)$$

onde $\bar{U}$ é a representação de $\dot{u}(t)$ no domínio da frequência. Portanto, $u_f(t)$ e $e = z - z^*$ são limitados e podem ser feitos arbitrariamente pequenos aumentando-se o parâmetro γ . Finalmente, a partir das conclusões anteriores, (10) e (22), conclui-se o mesmo de $e_y = y - y^*$.

O resultado destas análises é resumido no Teorema 2 a seguir.

Theorem 2 *Considere o sistema de controle composto pela planta modificada (10)-(13), pelo observador de estados estendido (18) e pela lei de controle (22). Se os valores das constantes de projeto $\bar{L}_1$, $\bar{L}_2$, $\bar{L}_3$ do observador, γ do filtro $Q_0(s)$ e K_0 da planta modificada forem escolhidos de forma que os polinômios*

$$\bar{\alpha}_1(s) = s^3 + 3\omega_0 s^2 + 3\omega_0^2 s + \omega_0^3, \quad (29)$$

$$\bar{\alpha}_2(s) = s^2 + 2\gamma s + \gamma^2, \quad (30)$$

sejam Hurwitz, onde ω_0 é dado por (20), então as seguintes propriedades são válidas para o sistema em malha fechada:

- (i) *Todos os sinais do sistema são uniformemente limitados $\forall t$;*
- (ii) *O erro de rastreamento $e_y(t) = y(t) - y^*$ pode ser reduzido arbitrariamente aumentando-se o valor de γ .*

Toda a análise das propriedades de rastreamento da estratégia ADRC com planta modificada foi implementada visando a utilização da mesma em uma estrutura em cascata, visando o controle de rastreamento de trajetória por um robô móvel não-holonômico. Na próxima seção será apresentada o modelo dinâmico do robô e a estratégia em cascata utilizada.

4. MODELO DINÂMICO E ESTRATÉGIA DE CONTROLE EM CASCATA

Considere a classe de robôs móveis não-holonômicos cujo modelo dinâmico é descrito por

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} = B(q) \tau + J^T(q) \lambda \quad (31)$$

$$J(q) \dot{q} = 0 \quad (32)$$

onde $q \in \mathbb{R}^n$ é a configuração do robô, $J(q) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ são as restrições cinemáticas, $\lambda \in \mathbb{R}^k$ são os multiplicadores de Lagrange, $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de inércia, $C(q, \dot{q}) \dot{q} \in \mathbb{R}^n$ são as forças centrípeta e Coriolis, $\tau \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de torques aplicados, $B(q) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é a matriz de entrada e $m = n - k$. Considerando $R(q) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tal que $J(q)R(q) = 0$, pode-se trocar as restrições (32) pelo modelo cinemático

$$\dot{q} = R(q) v \quad (33)$$

onde $v \in \mathbb{R}^m$ is o vetor de *pseudo*-velocidades.

Considerando $\ddot{q} = R(q)\dot{v} + \dot{R}(q)v$ e substituindo (33) em (31), após alguma manipulação algébrica, o modelo dinâmico do robô pode ser expresso por

$$M_R(q) \dot{v} + R^T(q)C_R(q, \dot{q}) v = B_R(q) \tau \quad (34)$$

onde $M_R(q) = R^T(q)M(q)R(q)$, $C_R(q, \dot{q}) = R^T(q)(M(q)\dot{R}(q) + C(q, \dot{q}))R(q)$ e $B_R(q) = R^T(q)B(q)$.

Neste trabalho, são utilizados robôs móveis com acionamento diferencial, onde

$$M_R = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ -m_{12} & m_{11} \end{bmatrix}, \quad C_R(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & C\omega \\ -C\omega & 0 \end{bmatrix}, \quad (35)$$

$$R(q) = \frac{r}{2} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta) \\ \sin(\theta) & \sin(\theta) \\ b^{-1} & -b^{-1} \end{bmatrix}, \quad B_R(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$\tau = [\tau_1 \quad \tau_2]^T$, $v = [\omega_1 \quad \omega_2]^T$ e $q = [x \quad y \quad \theta]^T$, sendo m_{11} , m_{12} e C parâmetros dinâmicos incertos, r e b parâmetros cinemáticos, ω_1 e ω_2 as velocidades angulares das rodas direita e esquerda respectivamente, x , y e θ as coordenadas cartesianas e a orientação do robô com relação ao sistema de coordenadas inercial e $\omega = \dot{\theta}$ a velocidade angular do robô.

O objetivo do controle é fazer a configuração do robô q rastrear uma trajetória de referência q_r , onde os parâmetros dinâmicos do robô são incertos. Para isso, é implementada uma estratégia de controle em cascata, que consiste em separar o sistema em uma parte dinâmica e uma parte cinemática, como mostrado na Figura 2. Então, primeiramente é projetado um controlador de rastreamento cinemático que gera um comando de velocidade desejada v_d . Contudo, de (33) sabe-se que

$$\dot{q} = R(q) e_v + R(q) v_d \quad (37)$$

onde $e_v = v - v_d$. Portanto, projetando-se um controlador de rastreamento dinâmico tal que $v \rightarrow v_d$, conclui-se que a diferença entre o modelo dinâmico (37) e o cinemático (33) é um sinal de erro e_v tendendo para zero.

Na próxima seção é apresentado o controlador de rastreamento cinemático.

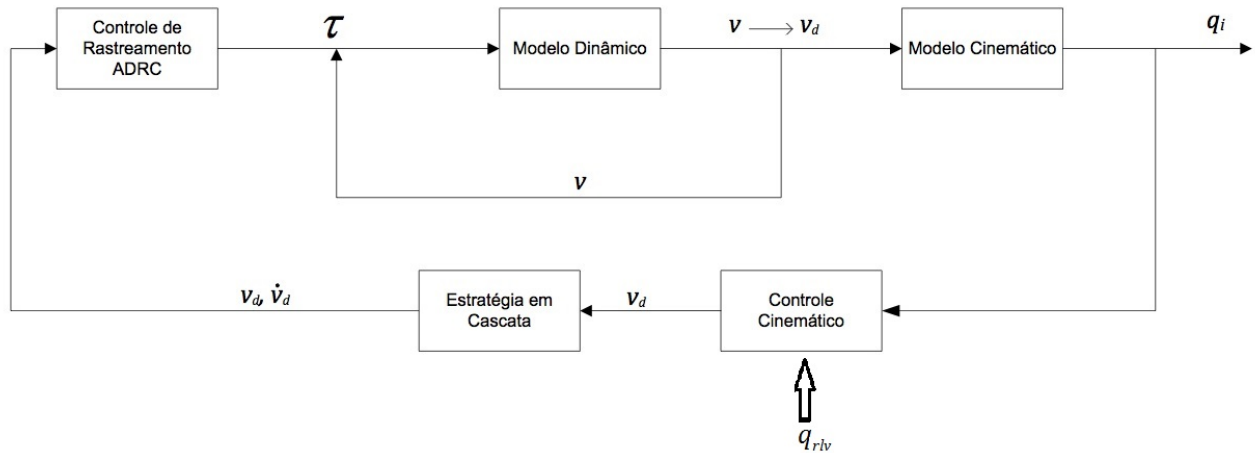


Figura 2: Estrutura de controle em cascata

4.1 Controle de Rastreamento Cinemático

Considere a Figura 3, onde um robô virtual se move no plano xy com velocidades linear e angular u_{rlv} e ω_{rlv} respectivamente. Defina x_{rlv} , y_{rlv} e θ_{rlv} como a posição e orientação do robô virtual. Assim, considerando que o modelo cinemático do robô virtual é descrito por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{rlv} \\ \dot{y}_{rlv} \\ \dot{\theta}_{rlv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta_{rlv} & 0 \\ \cos \theta_{rlv} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{rlv} \\ \omega_{rlv} \end{bmatrix}, \quad (38)$$

onde u_{rlv} e ω_{rlv} são as velocidades linear e angular respectivamente e dadas as condições iniciais $x_{rlv}(0)$, $y_{rlv}(0)$ e $\theta_{rlv}(0)$, pode-se definir uma trajetória desejada. Então, o problema de rastreamento consiste em garantir que o robô a ser controlado, doravante chamado robô seguidor, alcance a posição e orientação do robô virtual. Portanto, como mostrado na Figura 4, defina o erro de posição como

$$E_p = \begin{bmatrix} x_{rlv} - x \\ y_{rlv} - y \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Sabendo-se que a orientação do robô seguidor é dada por $R_o(q) = [\cos(\theta) \quad \sin(\theta)]^T$, utiliza-se a lei de controle de

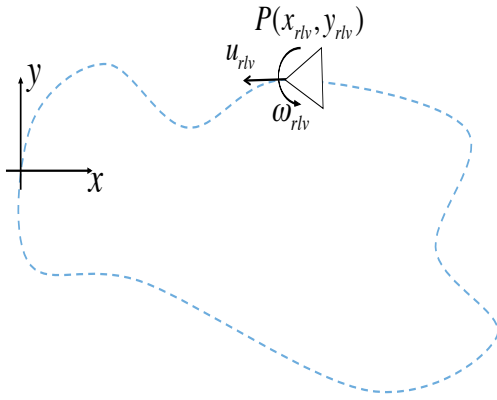


Figura 3: Trajetória definida pelo robô virtual

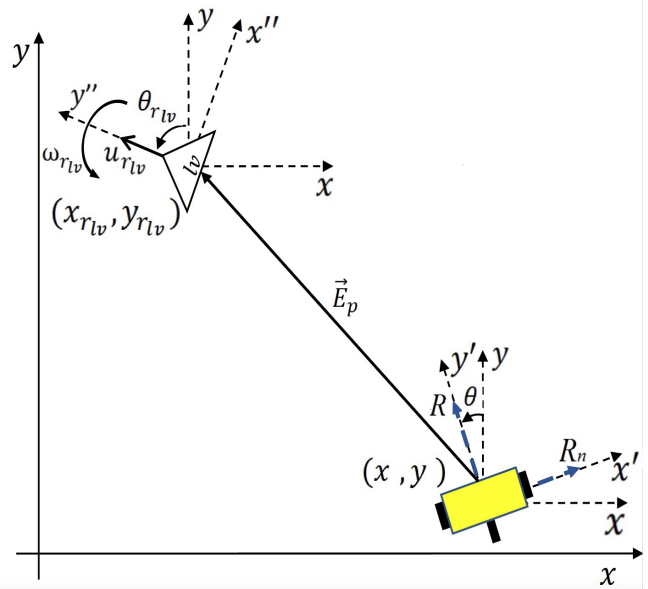


Figura 4: Vetores utilizados para o rastreamento de trajetória.

rastreamento cinemática

$$u = k_1 E_p^T R_o + u_{rlv} \cos(\theta_{rlv} - \theta), \quad (40)$$

$$\omega = -k_2 u_{rlv} E_p^T R_n + k_3 \sin(\theta_{rlv} - \theta) + \omega_{rlv}. \quad (41)$$

onde $R_n(q) = [-\sin(\theta) \quad \cos(\theta)]^T$ é um vetor ortogonal a R_o e u e ω são os comandos de velocidade linear e angular para o robô seguidor. Em (Fukao *et al.*, 2000), mostra-se que as leis de controle (40) e (41) garantem a convergência do robô seguidor para a posição e orientação do líder virtual caso as entradas do modelo cinemático sejam as velocidades linear u e angular ω . Contudo, esse não é o caso do modelo descrito por (37), que tem como entradas as velocidades angulares desejadas nas rodas ω_{1d} e ω_{2d} . Portanto, deve-se utilizar a transformação

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \omega_{1d} \\ \omega_{2d} \end{bmatrix}}_{v_d} = \underbrace{\frac{1}{r} \begin{bmatrix} 1 & b \\ 1 & -b \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix}}_{u_d}. \quad (42)$$

Vale ressaltar que essa transformação não altera as propriedades de rastreamento demonstradas em (Fukao *et al.*, 2000).

A seguir, será apresentada a aplicação do controlador ADRC com planta modificada, explicado na seção 3, no controle de rastreamento dinâmico, tal que $e_v = v - v_d \approx 0$.

4.2 CONTROLE DE RASTREAMENTO DINÂMICO

De (35) e (36), sabe-se que a parte dinâmica do robô pode ser descrita por

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \frac{m_{12}}{m_{11}} \dot{\omega}_2 + \frac{C}{m_{11}} \omega \omega_2 + \frac{1}{m_{11}} \tau_1, \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{m_{12}}{m_{11}} \dot{\omega}_1 - \frac{C}{m_{11}} \omega \omega_1 + \frac{1}{m_{11}} \tau_2. \end{aligned} \quad (43)$$

Tabela 1: Parâmetros dinâmicos

Parâmetros dinâmicos	$m_c = 30kg/I_\omega = 15kgm^2$	$m_c = 45kg/I_\omega = 25kgm^2$
m_{11}	0.2609	0.3838
m_{12}	0.1042	0.1501
C	0.1350	0.2025

Como os parâmetros m_{11} , m_{12} e C são incertos, os ganhos de controle $\frac{1}{m_{11}}$ também serão, o que justifica utilização do ADRC com planta modificada. A ideia é considerar (43) como dois sistemas de primeira ordem com perturbações generalizadas $f_1(t) = \frac{m_{12}}{m_{11}}\dot{\omega}_2 + \frac{C}{m_{11}}\omega\omega_2$ e $f_2(t) = \frac{m_{12}}{m_{11}}\dot{\omega}_1 - \frac{C}{m_{11}}\omega\omega_1$. Então, para cada um dos sistemas é aplicado o controlador ADRC com planta modificada. Vale ressaltar que, por se tratar de sistemas de primeira ordem, o filtro em paralelo $Q_0(s)$ também assume a forma de um sistema de primeira ordem, ou seja, $Q_0(s) = s/(s+\gamma)$. Portanto, seguindo o mesmo desenvolvimento da seção 3, conclui-se que

$$\dot{z}_1 + \gamma z_1 = g_1(t) + \dot{\tau}_1 \quad (44)$$

$$\dot{z}_2 + \gamma z_2 = g_2(t) + \dot{\tau}_2 \quad (45)$$

onde $g_1(t) = \beta(f_1 + b\tau_1 + \gamma\omega_1)$ e $g_2(t) = \beta(f_2 + b\tau_2 + \gamma\omega_2)$. Note que, neste caso, $A_m = \begin{bmatrix} -\gamma & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $C_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$. Projetando-se então o estimador estendido para (44) ($i = 1$) e (45) ($i = 2$), tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\hat{Z}}_{1i} &= -\gamma \hat{Z}_{1i} + \hat{Z}_{2i} + \bar{L}_1 e_{Z_{1i}} + \dot{\tau}_i \\ \dot{\hat{Z}}_{2i} &= \bar{L}_2 e_{Z_{1i}} \end{aligned} \quad (46)$$

onde $e_{Z_{1i}} = z_i - \hat{Z}_{1i}$, $Z_{1i} = C_m z_i$ e $\hat{Z}_{2i}$ é a estimativa da perturbação generalizada g_i . Portanto, de (22) tem-se a lei de controle

$$\dot{\tau}_i = -\hat{Z}_{2i} + \gamma^2 \beta v_{di} \quad (47)$$

onde v_{di} é a lei de rastreamento cinemática definida em (42).

Observação 2 As leis de controle (40) e (41), para a parte cinemática, e (46), para parte dinâmica, garantem, separadamente, o rastreamento de suas respectivas trajetórias de referência. No entanto, para se ter a garantia de que a estrutura em cascata da Figura 2 também rastreie a trajetória desejada, o controlador de rastreamento dinâmico deve obedecer um tempo mínimo de convergência t_m , tempo esse que depende da sintonia do controlador de rastreamento cinemático. Contudo, pode-se afirmar que, para qualquer valor dos parâmetros de sintonia do controlador cinemático, sempre haverá valores dos parâmetros do controlador dinâmico grandes o suficiente para resolver o problema de rastreamento da estrutura em cascata. Uma análise matemática mais rigorosa desse fato, que determine também a relação entre os ganhos dos controladores que garantem a convergência, é uma proposta de trabalho futuro.

Na próxima seção são apresentados os resultados de simulação.

5. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Considere um robô com acionamento diferencial descrito por (33), (34), (35) e (36). A Tabela 1 mostra os valores dos parâmetros dinâmicos correspondentes a diferentes valores de massa m_c e momento de inércia I_ω de um robô de largura $b = 1.5m$ e rodas de raio $r = 0.15m$ (Fukao *et al.*, 2000). A ideia é verificar a robustez do controlador à variação dos parâmetros dinâmicos do robô, o que pode ocorrer, por exemplo, em uma tarefa de transporte de cargas. Utilizou-se então a lei de controle (47) e o estimador (46), onde os valores de sintonia dos parâmetros dos controladores são $\bar{L}_1 = 680$, $\bar{L}_2 = 12.25 \times 10^4$, $\gamma = 20$ e $K_0 = 40$ para o controlador de rastreamento dinâmico e $k_1 = 5$, $k_2 = 1$ e $k_3 = 5$ para o controlador de rastreamento cinemático. A condição inicial do robô é $[x, y, \theta] = [8m, 0, \pi]$ e o objetivo é o rastreamento de um robô virtual movendo-se sobre uma trajetória circular de raio $R_r = 4m$. Sabe-se que a trajetória circular gera curvas senoidais para as coordenadas de posição $x_{rlv}(t)$ e $y_{rlv}(t)$ do robô virtual, onde as frequências das senoides variam com as velocidades u_{rlv} e ω_{rlv} . Como a frequência de um sinal senoidal pode influenciar no erro de rastreamento, foram feitas simulações para dois valores diferentes de velocidades linear e angular do robô virtual.

As Figuras 5, 6, 7, 8 mostram as trajetórias do robô virtual e do robô seguidor e os erros de rastreamento para os diferentes valores de massa e momento de inércia da Tabela 1, sendo a velocidade do robô virtual $u_{rlv} = 1.26m/s$. Note que não há uma perceptível diferença de desempenho, o que mostra a robustez da estratégia de controle proposta.

Para verificar a influência da velocidade no erro de rastreamento, as Figuras 9 e 10 mostram, respectivamente, a trajetória e o erro de rastreamento para $m_c = 45kg$, $I_\omega = 25kgm^2$, mas para uma velocidade do robô virtual $u_{rlv} = 6.28m/s$, que é uma situação extrema, dadas as dimensões do robô e o raio da trajetória. Observe que há uma pequena diferença de desempenho, que não é significativa, mostrando que o controlador também é robusto à mudança de velocidade de rastreamento.

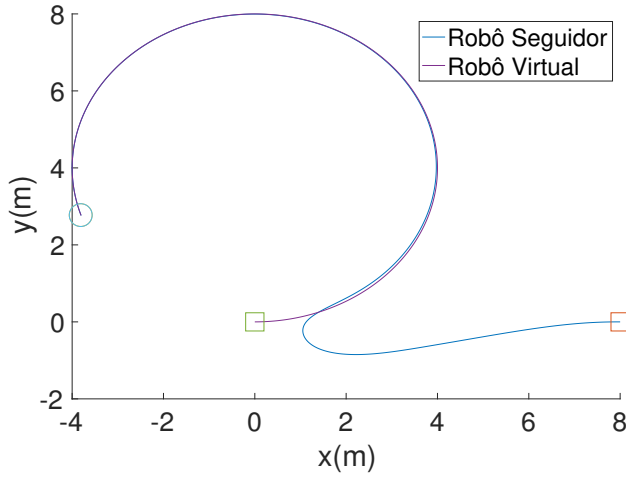


Figura 5: Trajetórias do robô virtual e do robô seguidor: $m_c = 30kg$, $I_\omega = 15kgm^2$ e $u_{rlv} = 1.26m/s$

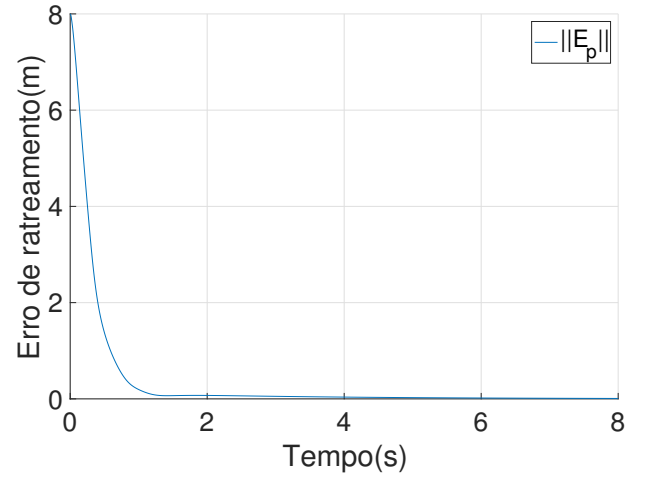


Figura 6: Erro de rastreamento: $m_c = 30kg$, $I_\omega = 15kgm^2$ e $u_{rlv} = 1.26m/s$

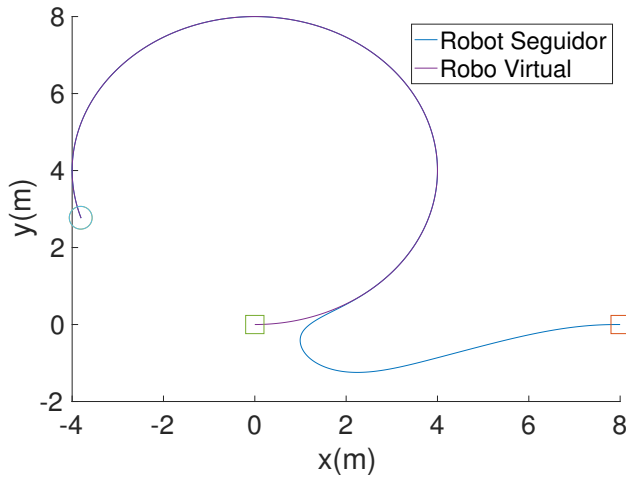


Figura 7: Trajetórias do robô virtual e do robô seguidor: $m_c = 45kg$, $I_\omega = 25kgm^2$ e $u_{rlv} = 1.26m/s$

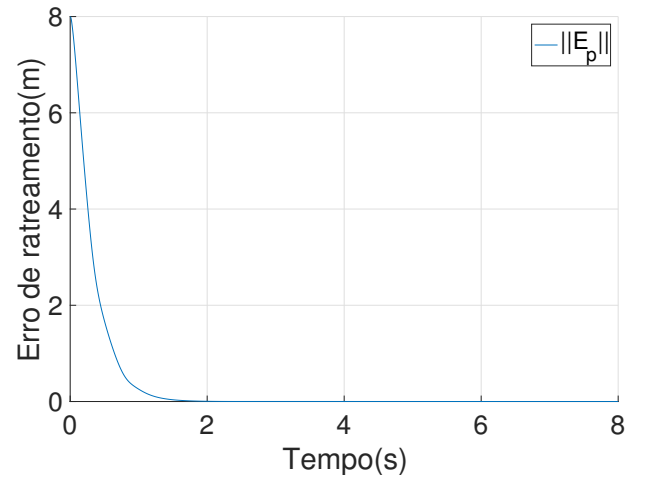


Figura 8: Erro de rastreamento: $m_c = 45kg$, $I_\omega = 25kgm^2$ e $u_{rlv} = 1.26m/s$

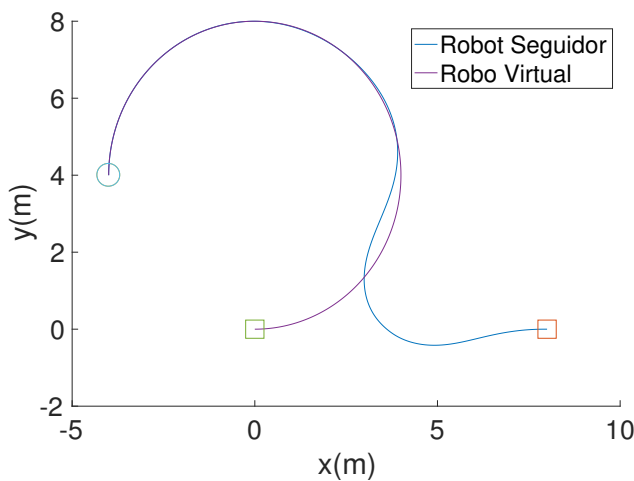


Figura 9: Trajetórias do robô virtual e do robô seguidor: $m_c = 45kg$, $I_\omega = 25kgm^2$ e $u_{rlv} = 6.28m/s$

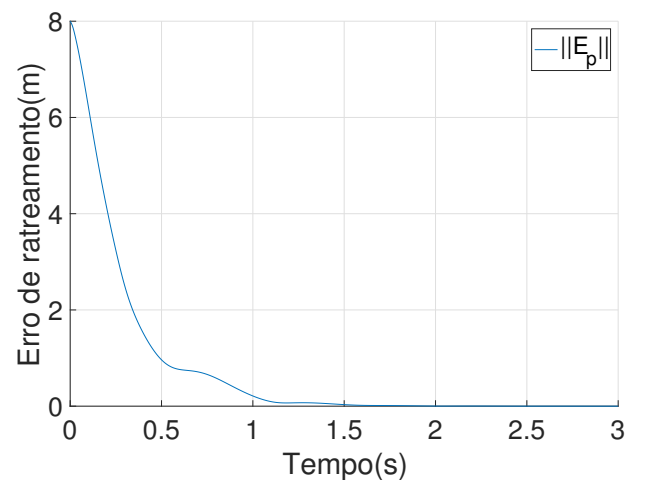


Figura 10: Erro de rastreamento: $m_c = 45kg$, $I_\omega = 25kgm^2$ e $u_{rlv} = 6.28m/s$

6. Conclusões

Este artigo apresentou a aplicação, em um robô móvel não-holonômico, de uma estratégia de controle robusta às incertezas nos parâmetros dinâmicos, incluindo a incerteza no ganho de controle, denominada ADRC com planta modificada. Uma análise matemática mostrou que esse controlador garante a convergência do sistema em malha fechada para uma

trajetória de referência. Posteriormente, foi implementado um esquema de controle em cascata, onde o ADRC com planta modificada garantiu a convergência das velocidades angulares das rodas dos robôs para um comando de velocidades desejadas, definido por um controle de rastreamento cinemático que leva em consideração a não-holonomia do robô, levando a um sistema estável em malha fechada. Resultados de simulação foram implementados e conclui-se que o esquema de controle em cascata, juntamente com o ADRC com planta modificada, é eficiente no controle de rastreamento de trajetória de um robô móvel não-holônomico com parâmetros dinâmicos incertos.

7. REFERÊNCIAS

- Correia, C.A.M., Zachi, A.R.L. and Gouvea, J.A., 2017. “Um método de controle robusto por realimentação de saída aplicado em sistemas com parâmetros incertos.” In *Simposio Brasileiro de Automacao Inteligente*. Porto Alegre (RS), pp. 1351–1356.
- Esmaeili, N., Alfi, A. and Khosravi, H., 2017. “Balancing and trajectory tracking of two-wheeled mobile robot using backstepping sliding mode control: Design and experiments”. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, Vol. 87, pp. 601–613.
- Fukao, T., Nakagawa, H. and Adachi, N., 2000. “Adaptive tracking control of a nonholonomic mobile robot”. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, Vol. 16, No. 5, pp. 609–615.
- Gao, Z., Hu, S. and Jiang, F., 2001a. “A novel motion control design approach based on active disturbance rejection”. In *Proc. IEEE Conference on Decision and Control*. Orlando, Florida, USA.
- Gao, Z., Huang, Y. and Han, J., 2001b. “An alternative paradigm for control system design”. In *Decision and Control, 2001. Proceedings of the 40th IEEE Conference on*. IEEE, Vol. 5, pp. 4578–4585.
- Han, J., 1998. “Auto-disturbance rejection control and its applications”. *Control and decision*, Vol. 13, No. 1, pp. 19–23.
- Han, J., 2009. “From pid to active disturbance rejection control”. *IEEE transactions on Industrial Electronics*, Vol. 56, No. 3, pp. 900–906.
- Hou, Z., Zou, A., Cheng, L. and Tan, M., 2009. “Adaptive control of an electrically driven nonholonomic mobile robot via backstepping and fuzzy approach”. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol. 17, pp. 803–815.
- Naveed, K. and Khan, Z.H., 2017. “Adaptive path tracking control design for a wheeled mobile robot”. In *Proc. IEEE International Conference on Control Science and Systems Engineering*. Beijing (China), pp. 194–199.
- Oliveira, T.R., Amindé, N.O. and Hsu, L., 2014. “Monitoring function based extremum seeking control for uncertain relative degrees with light source seeking experiments”. In *IEEE Conference on Decision and Control*. Los Angeles, pp. 3456–3462.
- Tzafestas, A.G., 2018. “Mobile robot control and navigation: A global overview”. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, Vol. 90, pp. 01–24.

8. RESPONSABILIDADE AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho.

A ROBUST CONTROL STRATEGY APPLIED ON TRAJECTORY TRACKING PROBLEM BY A NONHOLONOMIC MOBILE ROBOT.

Jair Luiz de Azevedo Filho, jairfilho_el@hotmail.com¹

Josiel Alves Gouvêa, josiel.gouvea@cefet-rj.br²

Alessandro Rosa Lopes Zachi, alessandro.zachi@cefet-rj.br³

¹Federal University of Rio de Janeiro Universidade, Dept of Electrical Engineering - Technological Center, Rio de Janeiro

²Federal Center of Technological Education Celso Suckow da Fonseca (CEFET-RJ)/Campus Nova Iguaçu, Research Nucleus on Mechatronics - Estrada de Adrianópolis, 1317, Nova Iguaçu - RJ

³Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca (CEFET-RJ)/Campus Maracanã, Programa de Engenharia Elétrica - Avenida Maracanã, 229, Rio de Janeiro - RJ

Resumo: This paper proposes to apply an extension of Active Disturbance Rejection Control (ADRC) strategy on trajectory tracking problem by a nonholonomic mobile robot. Due to its robustness to parametric plant uncertainties, the ADRC extension used here can be applied in the trajectory tracking by a differential drive nonholonomic mobile robot with uncertain dynamic parameters, including the uncertainty of its control gain. Using a cascaded strategy, the robot dynamic model is separated in a dynamic part in series with a nonholonomic kinematic part. Then, using the ADRC strategy, it is designed a dynamic tracking control, where its reference signal is the output of a controller that solves the trajectory tracking problem of kinematic part, leading to a stable closed loop system which is robust to parametric uncertainties.

Palavras-chave: ADRC control, mobile robots, cascaded strategy, nonholonomic system, uncertain parameters