

INFLUÊNCIA DO CONTORNO NO CÁLCULO DE CONSTANTES EFETIVAS DE UMA CLASSE DE SÓLIDOS ELÁSTICOS POROSOS

Adair R. Aguiar, aguiarar@sc.usp.br
Edmar B. T. Prado, edmarbt@sc.usp.br
Uziel Paulo da Silva, uziel@sc.usp.br

Departamento de Engenharia de Estruturas - SET/EESC/USP,
Av. Trabalhador São-carlense, 400, São Carlos, CEP: 13566-590, Brazil

Resumo: A determinação das propriedades efetivas de um sólido não homogêneo por meio de expressões analíticas geralmente pressupõe que o sólido possui dimensões infinitas. Em experimentos de laboratório, no entanto, corpos de prova têm dimensões finitas e é, portanto, de interesse verificar se tais expressões fornecem valores precisos para as constantes medidas experimentalmente. Este trabalho representa os esforços iniciais do grupo nesta verificação e na obtenção de propriedades efetivas de sólidos com microestrutura complexa, tais como o osso seco. Empregamos o Método de Homogeneização Assintótica (MHA) para determinar a constante efetiva c_{44}^{ef} de um sólido elástico de dimensões infinitas contendo uma distribuição uniforme e periódica de furos cilíndricos circulares. Empregamos também o Método de Elementos Finitos (MEF) para determinar esta constante no caso de um corpo de prova cilíndrico de secção transversal quadrada contendo a mesma distribuição uniforme de furos longe do contorno deste corpo. Ambos os sólidos possuem as mesmas propriedades elásticas e são submetidos ao mesmo experimento de cisalhamento antiplano. Mostramos gráficos de c_{44}^{ef} versus a fração de área da parte vazia que permitem verificar o bom acordo entre os valores obtidos via MHA e via MEF. O procedimento descrito neste trabalho fornece resultados para as demais constantes elásticas efetivas do corpo de prova.

Palavras-chave: elasticidade linear, método de homogeneização assintótica, método dos elementos finitos, sólido poroso, propriedade efetiva.

1. INTRODUÇÃO

O estudo do comportamento de sólidos não homogêneos requer a determinação de propriedades efetivas por meio de métodos experimentais, analíticos, computacionais, ou, de uma combinação destes métodos. Neste trabalho empregamos o Método de Homogeneização Assintótica (MHA) e o Método de Elementos Finitos (MEF) para determinar as propriedades efetivas de um sólido elástico em equilíbrio submetido a um carregamento mecânico. No caso do MHA, consideramos que o sólido tem dimensões infinitas e possui microestrutura constituída de duas fases distribuídas uniformemente sobre todo o domínio do sólido. Isto permite expandir a solução do problema de equilíbrio correspondente em termos de uma série assintótica e obter problemas locais a partir dos quais os termos da série podem ser calculados analiticamente no caso de sólidos com microestrutura simples, ou, numericamente no caso de microestrutura complexa. O processo de obtenção das soluções dos problemas locais fornece as propriedades efetivas do sólido não homogêneo a partir das propriedades físicas e geométricas de suas fases.

Neste trabalho consideramos que o sólido possui uma distribuição uniforme e periódica de furos cilíndricos circulares em um meio elástico linear isotrópico. Os cilindros estão centrados em células unitárias de secções transversais quadradas. Utilizamos resultados obtidos em Bravo-Castillero *et al.* (2009) para calcular analiticamente a constante elástica efetiva c_{44}^{ef} do sólido. A secção transversal do sólido está ilustrada na Fig. 1. O procedimento utilizado para o cálculo desta constante pode ser empregado no cálculo das demais constantes elásticas efetivas. O procedimento pode ainda ser utilizado no cálculo das constantes elásticas efetivas de um sólido com células unitárias de diferentes secções transversais, tais como a hexagonal.

Uma vez que o sólido utilizado na análise via MHA possui dimensões infinitas e que experimentos de laboratório são realizados em corpos de prova com dimensões finitas, realizamos simulações numéricas via MEF destes experimentos e calculamos numericamente a constante elástica efetiva mencionada acima. O experimento numérico que fornece esta constante consiste no cisalhamento antiplano de um cilindro reto de secção transversal quadrada contendo a mesma distribuição uniforme de células unitárias do sólido infinito. A secção transversal do sólido está ilustrada na Fig. 2. O material deste corpo de prova também é elástico linear e isotrópico.

Comparações de resultados obtidos analiticamente com resultados numéricos são relatadas na literatura. Em Michel *et al.* (1999) os autores resolvem os casos de distribuições periódicas de células quadrada e hexagonal via funções explícitas de Green e comparam estas soluções com soluções aproximadas obtidas via MEF e via Transformada Rápida de Fourier (TRF). Estes autores observam que quando as fases são elásticas e lineares e as diferenças de propriedades entre as fases não são muito grandes a TRF é muito mais rápida computacionalmente do que o MEF. No entanto, quando as diferenças de propriedades entre as fases são grandes, ou, tendem a casos limites, tais como os casos de inclusões rígidas, ou, de vazios, a TRF não produz resultados convergentes. Em Drago *et al.* (2008) os autores obtêm expressões fechadas para os módulos efetivos de materiais heterogêneos reforçados com fibras unidirecionais em termos de matrizes de concentração de deformação de Hill sujeitos a combinações de carregamentos arbitrários em células periódicas retangulares e quadradas. Esses autores comparam as soluções obtidas analiticamente com as soluções obtidas via MEF e encontram boa concordância entre elas, principalmente na reprodução dos campos de deslocamento locais por meio de séries de Fourier. Em Wang e Pindera (2016b), os autores estendem os métodos apresentados em Drago *et al.* (2008), para fases isotrópicas, e em Wang e Pindera (2016a), para fases transversalmente isotrópicas, na investigação de compósitos contendo fibras revestidas. Para modelar uma matriz contendo vazios, os autores adotam valores muito pequenos para os módulos elásticos das fibras. Nosso trabalho diferencia-se dos trabalhos mencionados acima por considerar condições impostas no contorno do sólido, em vez de condições periódicas nas células. Desejamos, desta maneira, simular computacionalmente experimentos realizados em laboratório e verificar a concordância entre resultados obtidos analiticamente para sólidos infinitos e computacionalmente para sólidos finitos.

Na Seção 2 apresentamos a formulação do problema antiplano em um meio elástico linear de dimensões infinitas e utilizamos esta formulação juntamente com o MHA para calcular a constante efetiva c_{44}^{ef} . Na Seção 3 consideramos que o meio elástico linear é finito e utilizamos a analogia do problema elástico a um problema de condução de calor em regime estacionário para formular o problema que desejamos resolver numericamente utilizando pacote comercial de elementos finitos. Na Seção 4 comparamos os resultados numéricos obtidos via MHA e via MEF. Na Seção 5 apresentamos conclusões deste trabalho.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere que um sólido elástico linear e isotrópico tem dimensões infinitas e possui uma distribuição uniforme e periódica de furos cilíndricos circulares centrados em células unitárias de secções transversais quadradas. Em relação a um sistema de coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) com origem em um ponto fixo O , os eixos dos furos são paralelos ao eixo de coordenadas Ox_3 e a secção transversal da região ocupada pelo sólido em uma configuração não deformada livre de tensão é paralela ao plano x_1x_2 . Esta secção transversal juntamente com a secção transversal da célula unitária quadrada estão ilustradas na Fig. 1, em que M e Y correspondem às partes do sólido sem furos e R e Γ correspondem ao raio e ao contorno do furo na célula, respectivamente.

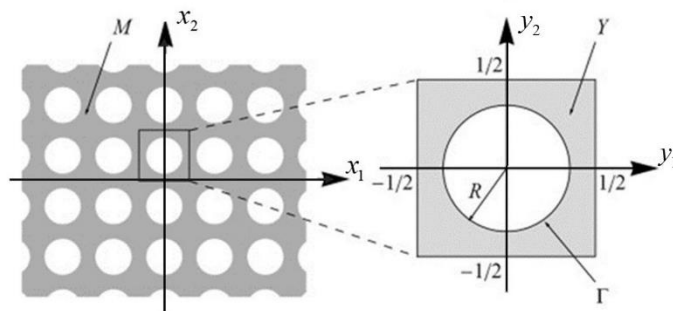


Figura 1. Sólido com distribuição periódica de células quadradas contendo furos cilíndricos circulares. Figura adaptada de Bravo-Castillero *et al.* (2009).

O sólido está em equilíbrio na ausência de força de corpo e está sujeito a um carregamento ortogonal ao plano x_1x_2 no infinito. Admitimos, portanto, que as componentes u_i , $i=1,2,3$, do campo de deslocamento $\mathbf{u}: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ em relação ao sistema de coordenadas (x_1, x_2, x_3) sejam da forma $u_1 = u_2 = 0$ e $u \triangleq u_3 = u_3(x_1, x_2)$. Substituindo estas componentes nas relações cinemáticas $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$, $i, j=1,2,3$, e as expressões resultantes na lei de Hooke generalizada para materiais isotrópicos, obtemos que as únicas componentes não nulas do tensor tensão são dadas por

$\sigma_{23} = c_{44} \frac{\partial u}{\partial x_2}$, $\sigma_{13} = c_{55} \frac{\partial u}{\partial x_1}$, em que $c_{55} \equiv c_{44}$ são constantes elásticas, e que a única equação de equilíbrio não nula é dada por $\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} = 0$. Obtemos das expressões acima que a equação diferencial governante é dada por

$$\Delta_x u \triangleq \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \quad \text{em } M, \quad (1)$$

em que Δ_x é o operador de Laplace bidimensional.

As paredes dos furos estão livres de tensão, ou seja, $\sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 = 0$ sobre Ω , em que Ω é a união de todos os contornos dos furos e $n_i, i = 1, 2$, são as componentes do versor normal $\mathbf{n}$ a uma parede do furo. Segue do exposto acima que as condições nas paredes dos furos são dadas por

$$\mathbf{n} \cdot \nabla_x u \triangleq n_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \quad \text{sobre } \Omega, \quad (2)$$

em que ∇_x é o operador gradiente bidimensional. O problema antiplano definido em M consiste em achar o deslocamento $u: M \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça a equação de equilíbrio Eq. (1), a condição de paredes dos furos livres de tensão Eq. (2) e condições de periodicidade sobre o contorno de M no infinito.

Introduzimos agora um parâmetro geométrico pequeno ε que relaciona as escalas global, representada por $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2)$, e local, representada por $\mathbf{y} \equiv (y_1, y_2)$, de modo que $\mathbf{y} = \mathbf{x} / \varepsilon$, e expandimos a solução u em uma série de potências de ε na forma

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) = u^{(0)}(\mathbf{x}) + \varepsilon u^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 u^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots, \quad (3)$$

em que as funções $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots$, são Y -periódicas, i.e., são periódicas com respeito à variável $\mathbf{y}$ e diferenciáveis até segunda ordem em relação a esta variável. Estas funções juntamente com $u^{(0)}$ também são diferenciáveis até segunda ordem em relação a $\mathbf{x}$. Substituindo a Eq. (3) na Eq. (1) e Eq. (2), isolando termos que multiplicam potências de ε e igualando estes termos a zero, obtemos uma sequência recorrente de problemas para a determinação de $u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots$. No processo de resolução destes problemas aplicamos sucessivamente o método de separação de variáveis e obtemos equações que dependem exclusivamente da variável $\mathbf{y}$, o que nos permite definir *problemas locais*, os quais estão definidos na célula periódica Y . Detalhes sobre a formulação destes problemas no contexto da piezoelectricidade encontram-se em Aguiar *et al.* (2013).

Um dos problemas locais referidos acima, que nos permite calcular a constante elástica efetiva de interesse, consiste em encontrar a função $U: Y \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça o sistema de equações

$$\Delta U = 0 \quad \text{em } Y, \quad (4)$$

$$U_{,\alpha} n_\alpha = -n_1 \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (5)$$

$$\langle U \rangle = 0, \quad (6)$$

em que $\langle U \rangle \triangleq \int_Y F(\mathbf{y}) d\mathbf{y} / |Y|$ e $|Y|$ é a área de Y . Seguindo o procedimento apresentado em Bravo-Castillero *et al.* (2009), buscamos uma solução do problema Eq. (4)-Eq. (6) na classe das funções harmônicas duplamente periódicas tendo a forma

$$U(z) = \Re\{a_1[\zeta(z) - \pi z] + \sum_{k=3,5,\dots}^{\infty} a_k \zeta^{(k-1)}(z) / (k-1)!\}, \quad (7)$$

em que $z \triangleq y_1 + iy_2$ é uma variável complexa, $a_k, k = 3, 5, 7, \dots$, são coeficientes a determinar, $\zeta(z)$ e $\zeta^{(k)}(z)$ são as funções quase periódicas zeta de Weierstrass e suas k -ésimas derivadas de períodos $\omega_1 = 1$ e $\omega_2 = i$ e $\Re\{\bullet\}$ é a parte real do argumento.

Ainda segundo o procedimento apresentado em Bravo-Castillero *et al.* (2009), o módulo efetivo é dado por

$$c_{44}^{ef} \triangleq \langle c_{44} \rangle + c_{44} \langle U_{,1} \rangle, \quad (8)$$

em que

$$\langle U_{,1} \rangle = (\pi R^2 - 2\pi a_1). \quad (9)$$

O coeficiente a_1 em (9) é solução do sistema infinito

$$a_l = R^{2l} [(1 - \pi a_1) \delta_{1l} + \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} a_k \eta_{(kl)}] \quad \text{para } l = 1, 3, \dots, \quad (10)$$

em que R é o raio do furo cilíndrico circular ilustrado na Fig. 1, δ_{il} é o delta de Kronecker e

$$\eta_{(kl)} = -C_{k+l-1}^l S_{k+l}, \quad S_{k+l} = \sum_{\substack{m,n \\ |m|+|n| \neq 0}} \beta_{mn}^{-k-l} \quad \text{para } k+l > 2,$$

$$\beta_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2 \quad \text{para } m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad C_k^l = \frac{k!}{l!(k-l)!}.$$

As séries S_{k+l} são nulas quando $k+l$ não é da forma $4t$ para $t = 1, 2, 3, \dots$.

Para obter uma expressão fechada de a_1 , utilizamos o fato de $\eta_{(kl)}$ serem nulas quando S_{k+l} são nulas, e decompomos o sistema infinito na Eq. (10) tomando $l = 1$, $l = 4s - 1$ e $l = 4s + 1$, sucessivamente, para $s = 1, 2, 3, \dots$. Resolvemos os três sistemas infinitos resultantes e chegamos à expressão

$$a_1 = \frac{R^2}{1 + A_2 - \mathbf{V}_p^T \mathbf{M}_p^{-1} \tilde{\mathbf{V}}_p}, \quad (11)$$

em que $A_2 = \pi R^2$ é a fração de área da parte vazia e, para o caso de uma distribuição de células quadradas considerado neste trabalho,

$$\mathbf{V}_p = \mathbf{V}_p(\omega_s), \quad \mathbf{M}_p = \mathbf{M}_p(m_{ts}) \quad \text{e} \quad \mathbf{V}_p = \mathbf{V}_p(\tilde{\omega}_t) \quad (12)$$

são vetores e matrizes de dimensão infinita e

$$\omega_s = R^{8s} \eta_{(1 \ 4s-1)}, \quad m_{ts} = \delta_{(4t-1 \ 4s-1)} - R^{8s} \sum_{i=1}^{\infty} R^{8i} \eta_{(4t-1 \ 4i+1)} \eta_{(4i+1 \ 4s-1)}, \quad \tilde{\omega}_t = \eta_{(4t-1 \ 1)}, \quad t, s = 1, 2, 3, \dots$$

Substituindo a Eq. (11) na Eq. (9) e a expressão resultante na Eq. (8), obtemos a expressão

$$c_{44}^{ef} = c_{44} (1 - 2 A_2 K^0), \quad (13)$$

em que

$$K^0 = \frac{1}{1 + A_2 - \mathbf{V}_p^T \mathbf{M}_p^{-1} \tilde{\mathbf{V}}_p}. \quad (14)$$

Para obter valores numéricos da Eq. (13) juntamente com a Eq. (14), consideramos dimensões finitas para os vetores e matrizes na Eq. (12).

3. PROCEDIMENTO COMPUTACIONAL

A constante efetiva calculada na seção anterior, c_{44}^{ef} , refere-se a um sólido de dimensões infinitas contendo uma distribuição uniforme de furos cilíndricos circulares. Nesta seção simulamos numericamente o cisalhamento antiplano

de um corpo de prova cilíndrico de secção transversal quadrada contendo a mesma distribuição uniforme de furos cilíndricos circulares e determinamos a constante efetiva correspondente. A secção transversal do sólido está ilustrada na Fig. 2. O material do corpo de prova é elástico linear e isotrópico com as mesmas constantes elásticas do sólido de dimensões infinitas.

A equação diferencial governante e a condição de contorno sobre as paredes dos furos têm a mesma forma da Eq. (1) e Eq. (2), respectivamente. Aqui, no entanto, M e Ω são substituídos por, respectivamente, M_C e Ω_C , em que M_C está ilustrado na Fig. 2 e Ω_C é a união de todos os contornos dos furos. Sobre o contorno externo do corpo de prova, ∂M_C , impomos as condições ilustradas na Fig. 2, em que L é o comprimento do lado da secção transversal quadrada do corpo de prova, $\mathbf{n}$ é o vetor normal ao contorno exterior do corpo de prova e $\odot$ representa a direção do deslocamento $\bar{\mathbf{u}}$ imposto sobre $\Psi \subset \partial M_C$ e na direção normal ao plano x_1x_2 .

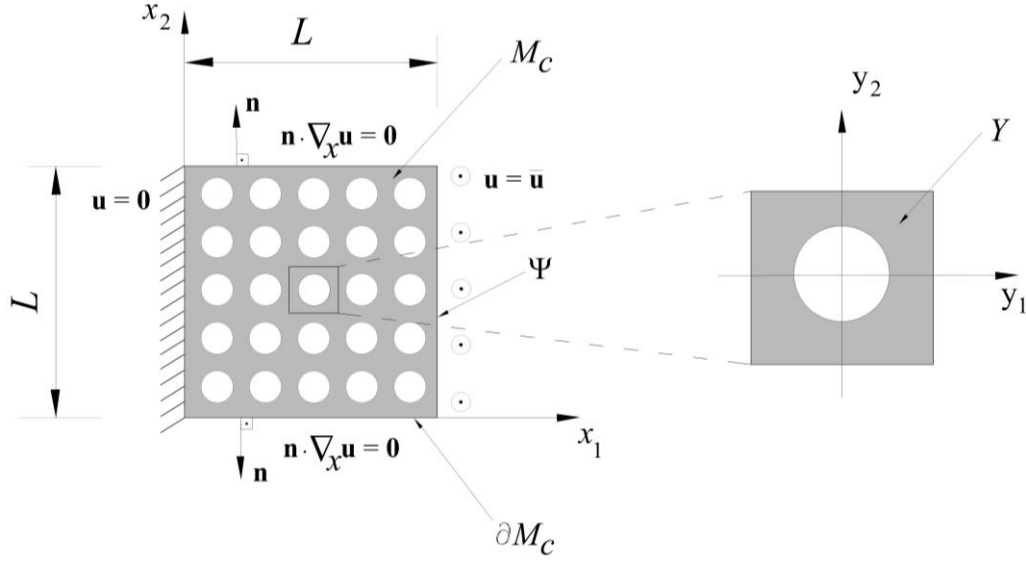


Figura 2: Secção transversal de corpo de prova cilíndrico contendo distribuição uniforme de furos cilíndricos circulares.

Para resolver numericamente o problema de equilíbrio descrito acima, observamos que o mesmo é análogo ao problema de condução de calor em regime estacionário, o qual consiste em achar o campo de temperatura $T : M_C \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça

$$\Delta_x T = 0 \quad \text{em } M_C, \quad (15)$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla_x T = 0 \quad \text{sobre } \Omega_C, \quad (16)$$

$$T = \bar{T} \quad \text{sobre } \Psi, \quad (17)$$

em que Δ_x e ∇_x são os operadores de Laplace e gradiente introduzidos na Eq. (1) e Eq. (2), respectivamente, e ∂M_C é o contorno externo de M_C . Utilizamos o pacote comercial de elementos finitos COMSOL 4.4[®] para obter soluções aproximadas das Eq. (15)-Eq. (17). O campo de temperatura T é aproximado por elementos finitos triangulares quadráticos.

Uma vez obtida a solução aproximada do problema térmico para uma dada discretização, associamos a temperatura T ao deslocamento u e a condutividade k à constante elástica c_{44} . Assim, a constante efetiva c_{44}^{ef} é determinada da expressão

$$c_{44}^{ef} = \frac{\int_{\Psi} \mathbf{n} \cdot \nabla_x T dx_2}{\bar{T}/L}, \quad (18)$$

em que $\int_{\Psi} \mathbf{n} \cdot \nabla_x T dx_2$ e $\bar{T}$ são, respectivamente, o fluxo de calor e a temperatura imposta sobre Ψ e adotamos $c_{44} = 1$ GPa para o material do sólido poroso.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Na Fig. 3 mostramos gráficos da constante efetiva c_{44}^{ef} , em GPa, versus fração de área da parte vazia A_2 obtidos via MHA, por meio da Eq. (13) e Eq. (14), e via MEF para $L = 1$, conforme ilustrado na Fig. 2, e para um número crescente de células periódicas (CP) no sólido, partindo de uma única célula, 1CP, até o número de quatrocentas células periódicas, 400CP. Observamos boa concordância entre as diferentes curvas até próximo do limite em que as paredes dos furos tocam umas às outras. No caso de células com secção transversal quadrada tratado neste trabalho, este limite é 0.7853.

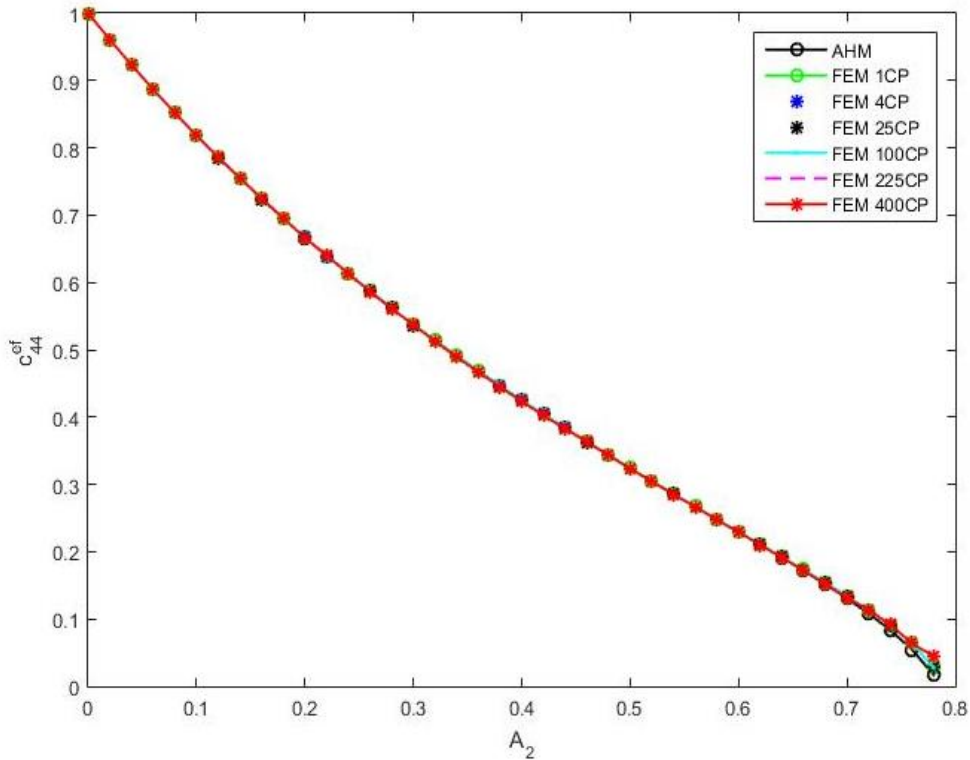


Figura 3: Curvas c_{44}^{ef} versus concentração de área A_2 para sólidos com distribuição periódica de células quadradas contendo furos cilíndricos circulares.

5. CONCLUSÃO

Apresentamos resultados analíticos e numéricos relacionados ao cálculo da constante elástica efetiva c_{44}^{ef} de um sólido contendo uma distribuição uniforme de furos cilíndricos circulares em um meio elástico linear isotrópico. Os cilindros estão centrados em células unitárias de secções transversais quadradas. Os resultados analíticos foram obtidos para um sólido de dimensões infinitas via MHA e os resultados numéricos foram obtidos para um sólido de secção transversal quadrada via MEF. Os gráficos de c_{44}^{ef} versus concentração de área A_2 para $L = 1$ e diferentes distribuições de células periódicas com secções transversais quadradas indicam que os cálculos analíticos e numéricos estão de muito bom acordo entre si.

Este trabalho representa os esforços iniciais do grupo para o cálculo de constantes efetivas de sólidos não homogêneos utilizando métodos analíticos, computacionais e experimentais.

6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), processo nº 444896/2014-7, à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo nº 2014/21836-2, e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), projeto PNPd n.º 20131731, pelo apoio

financeiro. Expressamos ainda nosso agradecimento ao Prof. Dr. Daniel Varela Magalhães por gentilmente ceder o uso da licença do COMSOL 4.4® #2075380 FNL.

7. REFERÊNCIAS

- Aguiar, A.R., Bravo-Castillero, J., Rodriguez-Ramos, R., Silva, U.P., 2013, "Effective Electromechanical Properties of 622 Piezoelectric Medium with Unidirectional Cylindrical Holes", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 80, pp. 050905-1 - 050905-11.
- Bravo-Castillero, J., Rodriguez-Ramos, R., Guinovart-Díaz, R., Sabina, F. J., Aguiar, A. R., Silva, U. P., Gomez-Munoz, J. L., 2009, "Analytical Formulae for Electromechanical Effective Properties of 3-1 Longitudinally Porous Piezoelectric Materials", *Acta Materialia*, Vol. 57, pp. 796-803.
- COMSOL Multiphysics Reference Manual, versão 4.4. COMSOL, Inc., www.comsol.com.
- Drago A.S., Pindera, M. A., 2008, "Locally Exact Homogenization Theory for Periodic Microstructures with Isotropic Phases", *ASME. J. Appl. Mech.*, Vol. 75, No. 5, pp.051010-051010-14.
- Michel, J., Moulinec, H., Suquet, P., 1999, "Effective Properties of Composite Materials with Periodic Microstructure: A Computational Approach", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, Vol. 172, pp. 109-143.
- Wang, G., Pindera, M.-J., 2016a, "Locally-Exact Homogenization Theory for Transversely Isotropic Unidirectional Composites", In: *Mechanics Research Communications*, Vol. 78, Part B, pp. 2-14.
- Wang, G., Pindera, M.-J., 2016b, "Locally-Exact Homogenization of Unidirectional Composites with Coated or Hollow Reinforcement", In: *Materials & Design*, Vol. 93, pp. 514-528.

8. RESPONSABILIDADE AUTORAL

"Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho".

INFLUENCE OF THE BOUNDARY ON THE CALCULATION OF EFFECTIVE CONSTANTS OF A POROUS ELASTIC SOLIDS CLASS

Adair R. Aguiar, aguiarar@sc.usp.br
Edmar B. T. Prado, edmarbt@sc.usp.br
Uziel Paulo da Silva, uziel@sc.usp.br

Department of Structural Engineering - SET/EESC/USP,
Av. Trabalhador São-carlense, 400, São Carlos, CEP: 13566-590, Brazil.

Abstract. *The determination of the effective properties of a nonhomogeneous solid using analytical expressions is usually based on the assumption that the solid has infinite dimensions. In laboratory experiments, however, samples have finite dimensions. Here, we are interested in verifying whether the analytical expressions provide accurate values for the constants measured in laboratory. This work represents the initial efforts of the group in this verification and in obtaining effective properties of solids with complex microstructure, such as dry bone. We use the Asymptotic Homogenization Method (AHM) to determine the effective shear constant c_{44}^{ef} of an elastic solid with infinite dimensions containing a uniform and periodic distribution of circular cylindrical holes. We also use the Finite Element Method (FEM) to determine this constant in the case of a finite cylindrical specimen of square cross-section containing the same uniform distribution of holes away from its boundary. Both solids have the same elastic properties and they are subjected to similar anti-plane shear experiments. We show graphs of c_{44}^{ef} versus the void area fraction that allow verifying the good agreement between the values obtained via AHM and via FEM. The procedure described in this work can be used to obtain values for the other effective elastic constants of the specimen.*

Keywords: *linear elasticity, asymptotic homogenization method, finite element method, porous solid, effective property.*