

SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA PROBLEMAS GEOFÍSICOS, APLICANDO O MÉTODO MODIFICADO DA DECOMPOSIÇÃO DE LAPLACE

José Humberto de Souza Prates, hprates2005@hotmail.com¹,
Davidson Martins Moreira, davidson.moreira@fieb.org.br¹.

¹ Campus Integrado de Manufatura e Tecnologia SENAI CIMATEC, BA, Brasil

Resumo: A modelagem matemática em problemas de engenharia frequentemente levam a equações diferenciais de soluções não triviais. As soluções analíticas para as equações diferenciais são de suma importância para o conhecimento dos resultados exatos de problemas, que futuramente servem como parâmetros de comparação com os resultados numéricos. Existem diversos métodos que resolvem equações diferenciais lineares e não lineares. Dentre estes, temos o método modificado da decomposição de Laplace (MLDM), que fornece uma solução em série, convergindo rapidamente para o resultado exato. Neste trabalho, serão resolvidas duas equações diferenciais derivadas de problemas teóricos em geofísica. O primeiro trata do campo magnético dentro de um semi-espço. Este campo é devido a uma fonte de corrente pontual localizada em sua superfície. Considerando na geometria do problema o plano $z = 0$, como a superfície de separação entre o ar ($z < 0$) e o semi-espço ($z > 0$) e, considerando o meio para $z < 0$ com resistividades infinita e o meio $z > 0$ com resistividade constante, temos o modelo mais simplificado desta aplicação. Este problema tornou-se relevante em decorrência do crescente interesse em viabilizar o método MMR (Método da Resistividade Magnetométrica) em poços. O segundo trata das ondas eletromagnéticas planas, considerando a fonte suficientemente afastada da região onde se quer resolver o problema, considerando o meio homogêneo e isotrópico. Vários métodos geofísicos usam ondas eletromagnéticas, onde se pode citar como exemplo o método GPR (“ground penetrating radar”). Utiliza-se neste artigo, para a elucidação destas questões, o método MLDM. Os resultados obtidos mostram que este método representa uma poderosa ferramenta que leva a uma rápida convergência da solução.

Palavras-chave: Método da resistividade magnetométrica, Método modificado da decomposição de Laplace, Equações diferenciais lineares e não lineares.

1. INTRODUÇÃO

O método da resistividade magnetométrica (MMR) é um método elétrico que se utiliza da medida de campos magnéticos estáticos gerados por um fluxo de corrente elétrica, que estabelecem-se no subsolo condutor devido a uma fonte pontual de corrente elétrica estacionária. No método MMR obtém-se a intensidade do campo magnético, o qual depende: (i) do local da medição, (ii) das intensidades das correntes elétricas injetadas através da fonte pontual de corrente instalada no meio, portanto da sua localização, e (iii) dos parâmetros físicos e geométricos desse meio. A técnica MMR iniciou com a patente de Jakosky, J. J. (1933); em Jakosky, J. J. (1940) descreve-se a aquisição das medidas usando dois eletrodos de corrente na superfície e o campo medido, também na superfície. Em Stefanescu, S. S. (1929) e Maillet, R. (1947), foi mostrado que esta prática seria impossível de determinar estruturas com acabamento horizontal. A partir do desenvolvimento do magnetômetro “flux-gate” MFM-3, pela Scintrex Ltd, permitiu experimentos de campo usando o MMR, mostrado em Edwards, R. N. (1974) e Edwards, R. N. e Howell, E. C. (1976). Em Edwards, R. N.; Lee, H. e Nabighian, M. N. (1978) foi feito um resumo dos trabalhos anteriores de Stefanescu e seus alunos, e acrescentaram outros resultados teóricos. Os trabalhos Edwards, R. N. (1974) e Seigel, H. O. (1974) apontaram que o MMR pode trazer resultados melhores que os métodos elétricos convencionais. No que diz respeito a solução da equação diferencial a ser resolvida analiticamente neste trabalho encontramos soluções para esta equação em Chen, J. e Oldenburg, D. W. (2004), Sripanya, W. (2011) e Chaladgarn, T. e Yooyuanyong, S. (2013), todas aplicando a transformada de Hankel.

Neste trabalho o meio considerado será um semi-espço infinito com resistividade constante como mostrado na figura 1.

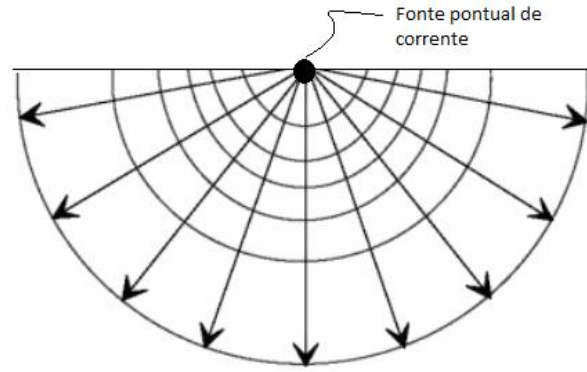


Figura 1: Fonte de corrente pontual injetando corrente no semi-espço infinito.

Pela clara simetria axial, neste problema adotamos o sistema de coordenadas cilíndricas e a única componente do campo magnético H é azimutal. Segundo Edwards, R. N. e Nabighian, M. N. (1991), este componente satisfaz a equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{H}{r^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

Em Edwards, R. N.; Lee, H. e Nabighian, M. N. (1978) a solução desta equação para a fonte localizada na superfície ($z = 0$) e semi-espço infinito com resistividade constante é dada por:

$$H = \frac{I}{4\pi r} \left[1 - \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right] \quad (2)$$

Da solução exata podemos extrair as condições de contorno,

$$H(r, 0) = \frac{I}{4\pi r} \quad (3)$$

$$\frac{\partial H}{\partial z}(r, 0) = -\frac{I}{4\pi r^2} \quad (4)$$

2. O MÉTODO MODIFICADO DA DECOMPOSIÇÃO DE LAPLACE

O método utilizado para solucionar analiticamente a equação diferencial será o método modificado da decomposição de Laplace (MLDM). Este método é muito interessante para solução das EDP lineares e não lineares, pois é capaz de reduzir o volume do trabalho computacional e dá alta precisão nos resultados numéricos. Para ilustrar este método será considerado uma equação diferencial parcial, não linear, não homogênea e de segunda ordem, como mostrado em Hussain, M.; Khan, Majid. (2010),

$$Lu(x, t) + Ru(x, t) + Nu(x, t) = h(x, t) \quad (5)$$

onde $L = \frac{\partial^2}{\partial t^2}$, R é o operador linear, N é o operador não linear e $h(x, t)$ é o termo fonte. Aplicando a transformada de Laplace nos dois membros da equação, tem-se:

$$\mathcal{L}[Lu(x, t)] + \mathcal{L}[Ru(x, t)] + \mathcal{L}[Nu(x, t)] = \mathcal{L}[h(x, t)] \quad (6)$$

$$\mathcal{L}[u(x, t)] = \frac{f(x)}{s} + \frac{g(x)}{s^2} + \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[h(x, t)] - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[Ru(x, t)] - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[Nu(x, t)] \quad (7)$$

Agora, seguindo a metodologia MLDM, a próxima etapa é a representação da solução através de uma série infinita:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t). \quad (8)$$

e o operador linear é decomposto como:

$$Nu(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad (9)$$

Enquanto que A_n são os polinômios de Adomian, que, como em A.M. Wazwaz (2002), podem ser calculados como:

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Substituindo (8) e (9) em (7) obtem-se,

$$\mathcal{L} \left[\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right] = \frac{f(x)}{s} + \frac{g(x)}{s^2} + \frac{1}{s^2} \mathcal{L} [h(x, t)] - \frac{1}{s^2} \mathcal{L} [Ru(x, t)] - \frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right], \quad (11)$$

onde

$$K(x, s) = \frac{f(x)}{s} + \frac{g(x)}{s^2} + \frac{1}{s^2} \mathcal{L} [h(x, t)] \quad (12)$$

Comparando os lados da equação (11) e aplicando a transformada inversa de Laplace resulta:

$$u_0(x, t) = \mathcal{L}^{-1} [K(x, s)] = K(x, t) \quad (13)$$

$$u_{n+1}(x, t) = -\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \mathcal{L} [Ru_n(x, t)] + \frac{1}{s^2} \mathcal{L} [A_n] \right], \quad n \geq 0, \quad (14)$$

A modificação do método está no termo $u_0(x, t)$, que é dividido em duas partes. Esta divisão é fundamental para a convergência da série acontecer rapidamente. No problema específico deste trabalho, as equações anteriores serão naturalmente simplificadas, pois a EDP é linear.

3. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO CAMPO MAGNÉTICO GERADO POR UMA FONTE PONTUAL DE CORRENTE

Para calcular a solução analítica da equação (1), utilizando as condições (3) e (4), aplica-se o método MLDM. Primeiro aplica-se a transformada de Laplace na equação (1),

$$\mathcal{L} \left[\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} \right] + \mathcal{L} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} \right] - \mathcal{L} \left[\frac{H}{r^2} \right] + \mathcal{L} \left[\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right] = \mathcal{L} [0] \quad (15)$$

Seguindo a metodologia proposta de modificação no método, temos:

$$K(x, t) = K_0(x, t) + K_1(x, t) = \frac{I}{4\pi r} - \frac{zI}{4\pi r^2} \quad (16)$$

onde,

$$H_0 = \frac{I}{4\pi r} \quad (17)$$

$$H_1 = -\frac{zI}{4\pi r^2} - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left[\frac{\partial^2 H_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_0}{\partial r} - \frac{H_0}{r^2} \right] \right] \quad (18)$$

$$H_{n+1} = -\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \mathcal{L} \left[\frac{\partial^2 H_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_n}{\partial r} - \frac{H_n}{r^2} \right] \right] \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (19)$$

resultando,

$$H(r, z) = \frac{I}{4\pi r} \left[1 - \frac{z}{r} + \frac{z^3}{2r^3} - \frac{3z^5}{8r^5} + \frac{5z^7}{16r^7} - \frac{35z^9}{128r^9} + \dots \right] \quad (20)$$

A equação (20) representa a medida do componente azimutal do campo gerado por um fluxo de corrente elétrica injetada em um semi-espaco infinito com resistividade constante.

A equação (20) foi plotada para $r = 100$ m e $z = 80$ m na figura 2, confrontada com a solução dada na literatura representada pela equação (2). A convergência acontece para 9 termos da série. Já na figura 3 foi aumentado o valor de r em relação ao valor de z , e a convergência já acontece no quarto termo da série.

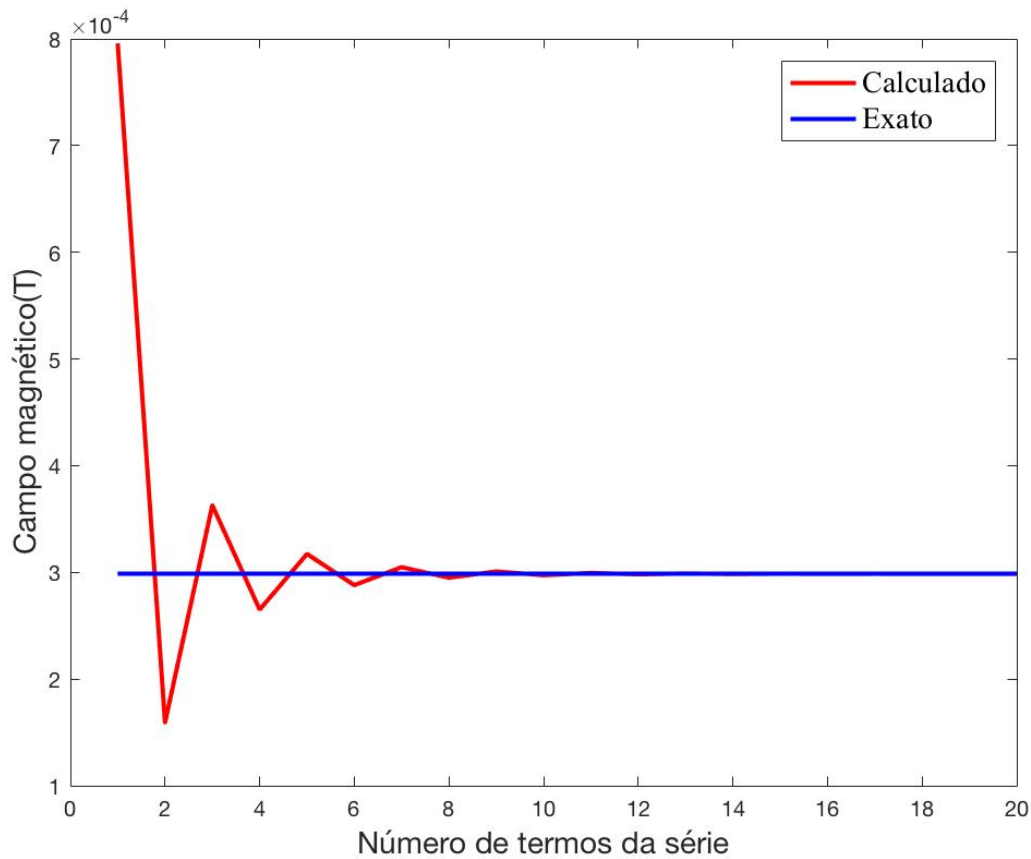


Figura 2: Convergência entre o valor calculado e o valor exato para $r = 100$ m e $z = 80$ m.

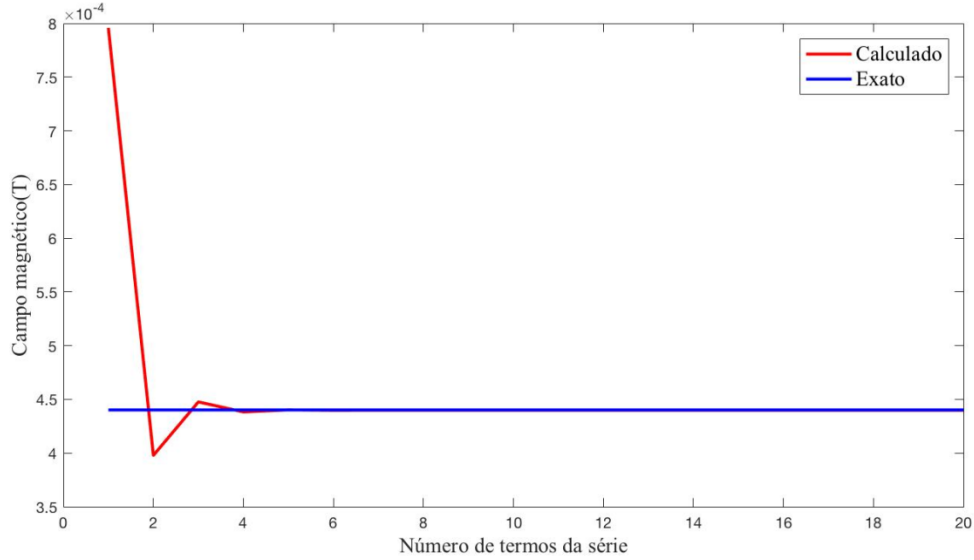


Figura 3: Convergência entre o valor calculado e o valor exato para $r = 100\text{m}$ e $z = 50\text{m}$.

No eixo horizontal temos o número de termos somados da série, e no eixo vertical o campo magnético em Tesla (T). O gráfico dos termos somados, que é o valor calculado, converge rapidamente para o do valor exato, como era esperado.

4. SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DAS ONDAS PLANAS

As equações de Maxwell norteiam toda a teoria dos métodos eletromagnéticos. Estas no domínio da frequência podem ser escritas da seguinte forma:

$$\nabla \cdot \epsilon E = 0, \quad (21)$$

$$\nabla \times H - (\sigma + i\omega\epsilon) E = J_{ext}, \quad (22)$$

$$\nabla \times E + i\omega\mu H = 0, \quad (23)$$

$$\nabla \cdot \mu H = 0, \quad (24)$$

onde E representa o campo elétrico, H o campo magnético, σ a condutividade elétrica do meio, ω a frequência angular, i a constante imaginária ($i = \sqrt{-1}$), ϵ é a permissividade elétrica do meio e μ a permeabilidade magnética do meio. O termo J_{ext} representa a densidade de corrente elétrica externa.

Em um meio eletricamente homogêneo, as equações de Maxwell se reduzem a:

$$\nabla \times H - \eta E = J_{ext}, \quad (25)$$

$$\nabla \times E + \lambda H = 0, \quad (26)$$

em que $\eta = (\sigma + i\omega\epsilon)$ é a admitividade e $\lambda = i\omega\mu$ é a impeditividade do meio.

Neste trabalho estas equações se simplificarão, pois a situação estudada é a de ondas planas que incidem em um semi-espaco infinito, onde a fonte esteja suficientemente afastada da região que se quer resolver o problema. Considera-se também que nesta região o meio seja homogêneo e isotrópico. Sendo assim, pode-se simplificar as equações:

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} + \eta E_x = 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \eta E_y = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} - \lambda H_x = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} + \lambda H_y = 0 \quad (30)$$

Isolando-se E_x na equação (27) e substituindo-se na equação (30), obtém-se a equação diferencial conhecida como equação de Helmholtz, ou equação de onda:

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + k^2 H_y = 0 \quad (31)$$

onde $k^2 = -\lambda\eta = -i\omega\mu(\sigma + i\omega\varepsilon)$ é o número de onda. Da mesma forma, pode-se repetir o processo anterior com as equações (28) e (29), obtendo-se:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k^2 E_y = 0 \quad (32)$$

Sendo assim, conhecendo-se as condições iniciais a serem aplicadas na equação (31):

$$H(r, 0) = h_0 \quad (33)$$

$$\frac{\partial H(r, 0)}{\partial z} = -ikh_0 \quad (34)$$

assumindo $H_y = H$, aplica-se a metodologia MLDM na equação (31):

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\right] + \mathcal{L}[k^2 H] = \mathcal{L}[0] \quad (35)$$

Obtendo-se,

$$s^2 \hat{H}(r, s) - sH(r, 0) - \frac{\partial H(r, 0)}{\partial z} + \mathcal{L}[k^2 H] = 0 \quad (36)$$

e,

$$\hat{H}(r, s) = \frac{1}{s} H(r, 0) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial H(r, 0)}{\partial z} - \frac{1}{s^2} \mathcal{L}[k^2 H] \quad (37)$$

Aplicando-se a transformada inversa,

$$\mathcal{L}^{-1}[\hat{H}(r, s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} H(r, 0)\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} \frac{\partial H(r, 0)}{\partial z}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} \mathcal{L}[k^2 H]\right] \quad (38)$$

resulta,

$$H(r, z) = H(r, 0) + z \frac{\partial H(r, 0)}{\partial z} - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} \mathcal{L}[k^2 H]\right] \quad (39)$$

e verifica-se facilmente que,

$$H_0 = h_0 \quad (40)$$

$$H_1 = -zikh_0 - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2} \mathcal{L}[k^2 H_0]\right] \quad (41)$$

Usando a equação recursiva,

$$H_{n+1} = -\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \mathcal{L} [k^2 H_n] \right] \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (42)$$

a série resultante é:

$$H_y = h_0 \left(1 - ikz - \frac{1}{2} k^2 z^2 + \frac{1}{6} ik^3 z^3 + \frac{1}{24} k^4 z^4 - \frac{1}{120} ik^5 z^5 - \frac{1}{720} k^6 z^6 + \dots \right) \quad (43)$$

Conhecendo-se a identidade,

$$e^{-ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ix)^n}{n!} \quad (44)$$

Obtem-se,

$$H_y = h_0 e^{-ikz} \quad (45)$$

Com este resultado pode-se facilmente calcular o campo elétrico E_x . A mesma metodologia pode ser aplicada na equação (30) resultando na solução:

$$E_y = E_0 e^{-ikz} \quad (46)$$

Com (46) pode-se calcular o campo magnético H_x .

A Figura 4 mostra o comportamento de H_y em função de z . Por simplicidade foi atribuído o valor 1 aos parâmetros k e H_0 e desconsiderada a parte imaginária.

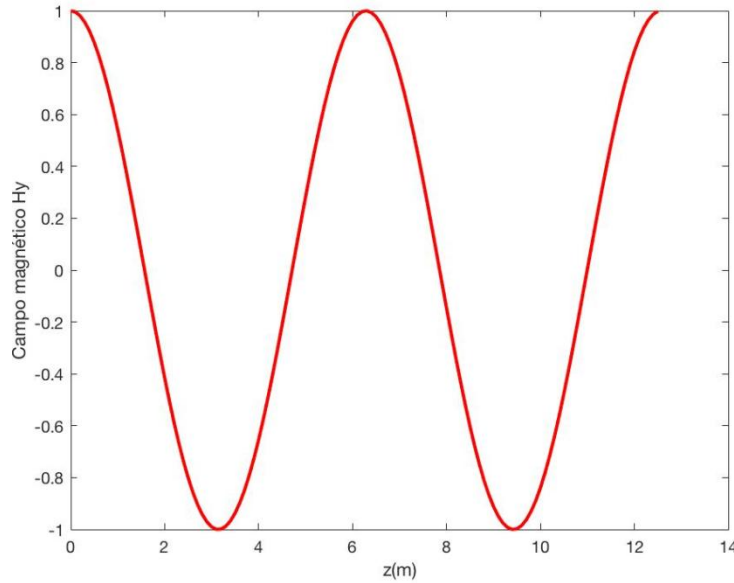


Figura 4: Amplitude do campo magnético na direção y de uma onda plana.

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi utilizado o método modificado da decomposição de Laplace (MLDM) para resolver a equação diferencial derivada de dois problemas teóricos em geofísica: (i) do campo magnético dentro de um semi-espaco gerado por uma fonte pontual de corrente, (ii) o de uma onda plana, utilizada em muitos métodos eletromagnéticos. Os resultados mostraram a eficiência deste método para resolver problemas desta natureza, de particular interesse em problemas de engenharia. Ainda sobre este método, podemos dizer que ele é capaz de reduzir o volume do trabalho computacional e fornece uma alta precisão nos resultados numéricos.

6. REFERÊNCIAS

- Jakosky, J. J. (1933) Method and apparatus for determining underground structure, U. S. patent, no. 1,906,271.
- Jakosky, J. J. (1940) Exploration Geophysics, Los Angeles Times-Mirror Press.
- Stefanescu, S. S. (1929) Theoretical studies of electrical prospecting of the subsurface, *Studii Technice si Economica*, Academie de la Republique Populaire Roumaine, 14(1), (in French).
- Maillet, R. (1947) The fundamental equations of electrical prospecting, *Geophysics*, 12:529–556.
- Edwards, R. N. (1974) The magnetometric resistivity method and its application to the mapping of a fault, *Can. J. Earth Sci.*, 11:1136–1156.
- Edwards, R. N. e Howell, E. C. (1976) A field test of the magnetometric resistivity (MMR) method, *Geophysics*, 41:1170–1183.
- Edwards, R. N.; Lee, H. e Nabighian, M. N. (1978) On the theory of magnetometric resistivity (MMR) methods, *Geophysics*, 43(6):1176–1203.
- Seigel, H. O. (1974) The magnetic induced polarizaton (MIP) method, *Geophysics*, 39(3):321–339.
- Chen, J. e Oldenburg, D. W. (2004) Magnetic and electric fields of direct currents in a layered earth, *Exploration Geophysics*, 35:157–163.
- Chaladgarn, T. e Yooyuanyong, S. (2013) Mathematical model of magnetometric resistivity sounding for a conductive host with a bulge overburden, *Applied Mathematical Sciences*, 7(7):335–348.
- Sripanya, W. (2011) Mathematical solutions of electric potential and magnetic field response from heterogeneous media, Tese de Doutorado, Silpakorn University.
- Edwards, R. N. e Nabighian, M. N. (1991) The magnetometric resistivity method, In: M. N. Nabighian, ed., *Electromagnetic methods in applied geophysics*, vol. 2, Application, Part A and B, cap. 2, pp. 47–104, Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, Oklahoma.
- Hussain, M.; Khan, Majid. (2010) Modified Laplace Decomposition Method. *Applied Mathematical Sciences*, v. 4, n. 36, p. 1769-1783.
- A.M. Wazwaz (2002), *Partial differential equations methods and applications*, Netherland Balkema Publisher.

7. RESPONSABILIDADE AUTORAL

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho”.

ANALYTICAL SOLUTION FOR GEOPHYSICAL PROBLEMS, APPLYING THE MODIFIED LAPLACE DECOMPOSITION METHOD

José Humberto de Souza Prates, hprates2005@hotmail.com¹,
Davidson Martins Moreira, davidson.moreira@fieb.org.br¹.

¹Integrated Campus of Manufacturing and Technology SENAI CIMATEC, BA, Brasil

Resumo: Mathematical modeling in engineering problems often leads to differential equations of nontrivial solutions. The analytical solutions for the differential equations are for paramount importance for the knowledge of the exact results of problems, which in the future serve as parameters of comparison with the numerical results. There are several methods that solve linear and non-linear differential equations. Among these, we have the modified method of Laplace decomposition (MLDM), which provides a solution in series, converging quickly to the exact result. In this work, two differential equations derived from theoretical problems in geophysics will be solved. The first deals with the magnetic field within a half-space. This field is due to a point current source located on its surface. Considering the geometry of the problem, the surface $z = 0$, as the separation surface between the air ($z < 0$) and the half-space ($z > 0$), and considering the environment for $z < 0$ with infinite resistivities and $z > 0$ with constant resistivity, we have the most simplified model of this application. This problem became relevant due to the increasing interest in make the MMR (Method of Magnetometric Resistivity) feasible in wells. The second one deals with flat eletromagnetic waves, considering the source far enough from the region where the problem is to be solved, considering the homogeneous environment and isotropic. Several geophysical methods use eletromagnetic waves, where the GPR (“ground penetrating radar”) method can be cited as an example. In this article, the MLDM method is used to elucidate these questions. The results show that this method represents a powerful tool that leads to a quick convergence

Keywords: *Method of Magnetometric Resistivity, Modified method of Laplace decomposition, non-linear differential equations and linear differential equations*