

IDENTIFICAÇÃO DE DANOS ESTRUTURAIS UTILIZANDO TRANSFORMAÇÕES INTEGRAIS E OS MÉTODOS METROPOLIS-HASTINGS E MONTE CARLO HAMILTONIANO

Carlos Eduardo Závoli Cordeiro, caduzavoli1@gmail.com¹

Leonardo Tavares Stutz, ltstutz@iprj.uerj.br¹

Diego Campos Knupp, diegoknupp@iprj.uerj.br¹

¹ Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro - Rua Bonfim, 25, Vila Amélia, Nova Friburgo, RJ,

Resumo: Este trabalho abrange a identificação de danos estruturais em uma viga de Euler-Bernoulli simplesmente apoiada. Para a solução da equação diferencial proposta, é utilizada a Técnica da Transformada Integral Generalizada (Generalized Integral Transform Technique – GITT). A partir do modelo empregado, a identificação de danos pode ser definida como um problema inverso, onde a solução do problema consiste na obtenção dos parâmetros de coesão da estrutura. Foi aplicado o Método de Monte Carlo com Cadeias de Markov (MCMC), utilizando duas técnicas de amostragem, sendo elas os métodos de Metropolis-Hastings (MH) e o Monte Carlo Hamiltoniano (Hamiltonian Monte Carlo – HMC) para a amostragem da distribuição de probabilidade a posteriori dos parâmetros de coesão, havendo ainda um comparativo entre o desempenho de tais métodos. Para a avaliação dos métodos, foram realizadas simulações numéricas, considerando-se o problema de identificação de danos. A conclusão obtida é que ambos os métodos são capazes de amostrar a densidade de probabilidade a posteriori dos parâmetros de coesão, embora as amostras geradas pelo HMC sejam de qualidade superior e necessitem de uma quantidade menor de estados para a convergência das cadeias, se comparado ao Metropolis-Hastings.

Palavras-chave: Identificação de Danos, Técnica da Transformada Integral Generalizada, Método de Monte Carlo com Cadeias de Markov, Algoritmo de Metropolis-Hastings, Monte Carlo Hamiltoniano.

1. INTRODUÇÃO

A avaliação da integridade de estruturas é de fundamental importância em engenharia, haja vista que estruturas danificadas podem comprometer a capacidade de carregamento, podendo acarretar em falha. Neste sentido, torna-se altamente desejável o desenvolvimento de uma metodologia que permita a identificação de danos em estruturas.

De modo geral, danos estruturais modificam as propriedades físicas da estrutura e essas, por sua vez, alteram suas características vibracionais (Pandey & Biswas, 1994). A abordagem escolhida para o estudo da estrutura se baseia na resposta impulsiva da mesma (Matt, 2013). Em outras palavras, no modelo escolhido é observada a deflexão da estrutura a partir de uma excitação externa – nesse caso, uma aproximação de um impulso unitário.

Na formulação do problema direto, é utilizada a Técnica da Transformada Integral Generalizada (Cotta, 1993; Cotta, 1994; Cotta & Mikhailov, 1997; Cotta, 1998; Cotta & Mikhailov, 2006 e Knupp et al., 2012).

Com relação à identificação de danos, esta pode ser definida como um problema inverso de estimação de parâmetros. Na formulação adotada, a integridade da estrutura é continuamente descrita, na coordenada espacial, pelo parâmetro β denominado “parâmetro de coesão”. Dessa forma, a identificação de danos consiste na obtenção de estimativas para os parâmetros de coesão da estrutura.

Neste trabalho optou-se por utilizar o Método de Monte Carlo com Cadeias de Markov (Orlande, 2011) para a solução do problema inverso. Dentro do método, a geração dos estados da cadeia é feita utilizando duas técnicas de amostragem distintas: os algoritmos de Metropolis-Hastings e a dinâmica Hamiltoniana (Duane et al., 1987 e Neal, 2011), esta segunda sendo denominada, portanto, “Monte Carlo Hamiltoniano”.

O objetivo principal do presente trabalho é gerar amostras suficientes com ambas as técnicas de amostragem para estimar os parâmetros de coesão, identificando possíveis danos na estrutura estudada, além de obter o comparativo entre estas técnicas.

2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DIRETO

O problema direto aborda a dinâmica vibracional de uma estrutura – mais especificamente uma viga de Euler-Bernoulli, simplesmente apoiada – que vibra a partir de uma excitação externa. A representação esquemática da estrutura é dada pela Fig. 1.

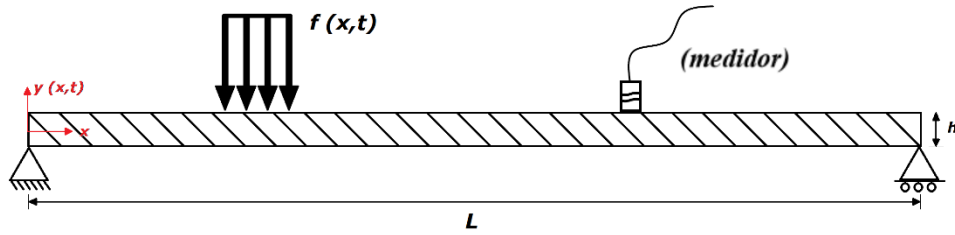


Figura 1. Representação esquemática da viga.

No problema, a aplicação de um carregamento externo $f(x,t)$ resulta na vibração da estrutura, captada pelo sensor que mede o deslocamento $y(x,t)$. A equação de movimento que descreve esse problema pode ser escrita como (Matt, 2013):

$$\rho A \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + EI_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\beta(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] = f(x,t) \quad (1)$$

No caso particular de uma viga simplesmente apoiada, tem-se ainda as seguintes condições de contorno.

$$\begin{aligned} y(0,t) &= 0 \\ y(L,t) &= 0 \\ \left. \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=0} &= 0 \\ \left. \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right|_{x=L} &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Considerando que a viga não possui velocidade no instante inicial e que a mesma não possui deflexões nesse tempo, temos as condições iniciais dadas por.

$$\begin{aligned} y(x,0) &= 0 \\ \left. \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Temos que $y(x,t)$ representa a deflexão da linha neutra em um ponto x , no instante de tempo t , η é o coeficiente de amortecimento viscoso, ρ é a massa específica do material, A é a área da seção transversal, E_0 é o módulo de elasticidade nominal, I_0 o momento de inércia de área nominal da seção transversal da viga com relação ao eixo z e $f(x,t)$ é o carregamento externo, distribuído por unidade de comprimento.

A integridade da estrutura é descrita ao longo da mesma através do parâmetro de coesão $\beta(x)$, que mensura o estado da ligação entre os pontos materiais da viga. Em outras palavras, $\beta(x)$ indica o estado de coesão local da estrutura que, em suma, indica a presença ou não de danos estruturais, bem como os quantifica, e é definido como

$$\beta(x) = \frac{E(x)I(x)}{E_0 I_0} \quad (4)$$

Por simplicidade, no presente trabalho, será considerado que a presença de danos altera somente as propriedades geométricas da viga. Ademais, serão considerados danos uniformes ao longo da largura das seções transversais da viga. Sendo assim, no caso particular de vigas de seção retangular, o parâmetro de coesão pode ser reescrito como

$$\beta(x) = \left(\frac{h(x)}{h_0} \right)^3 \quad (5)$$

onde $h(x)$ é a espessura da viga na posição x e h_0 é a espessura nominal da viga.

Para $\beta = 1$, considera-se conservadas todas as ligações, representando a ausência de danos. Para $0 \leq \beta < 1$, ocorre a presença de um dano estrutural. No caso extremo de $\beta = 0$, tem-se a completa ruptura das ligações entre os pontos materiais e, conseqüentemente, da viga. Ao conjunto de parâmetros de coesão da estrutura, dá-se o nome “campo de coesão”.

Para a solução do problema direto, será utilizada a Técnica da Transformada Integral Generalizada (Generalized Integral Transform Technique – GITT) (Cotta, 1993; Cotta, 1994; Cotta & Mikhailov, 1997; Cotta, 1998; Cotta & Mikhailov, 2006 e Knupp et al., 2012).

O princípio da técnica se assemelha com o conceito de expansão em séries de Fourier, que diz que é possível escrever uma função qualquer em termos de uma base de autofunções, obtidas de um Problema de Autovalor Diferencial (PAD). Na GITT, conhecendo essa base de autofunções e o potencial transformado, consegue-se uma expressão para o potencial de interesse. Na técnica, é definido o par de transformação integral, que é composto pela fórmula de inversão e pela transformada integral, respectivamente apresentadas a seguir

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{N_r} \tilde{\psi}_i(x) \bar{y}_i(t) \quad (6)$$

$$\bar{y}_i(t) = \int_0^L \tilde{\psi}_i(x) y(x, t) dx \quad (7)$$

onde i é o índice do somatório que possui truncamento N_r , $\bar{y}_i(t)$ é o potencial transformado e $\tilde{\psi}_i(x)$ são autofunções normalizadas, com normalização dada por.

$$\tilde{\psi}_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\sqrt{N_i}}, \text{ com } N_i = \int_0^L [\psi_i(x)]^2 dx \quad (8)$$

Essas autofunções auxiliares são obtidas de um problema de autovalor diferencial que guarda informações do problema original. Para o PAD, foi utilizada a Eq. (1) na versão homogênea e sem a presença de danos, no qual foi aplicado o Método de Separação de Variáveis, para obter

$$\frac{\partial^4 \psi(x)}{\partial x^4} - \frac{\mu^4}{EI_0} \psi(x) = 0 \quad (9)$$

As condições de contorno são dadas por.

$$\begin{aligned} \psi(0) &= 0 \\ \psi(L) &= 0 \\ \left. \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} \right|_{x=0} &= 0 \\ \left. \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} \right|_{x=L} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Tal problema possui solução analítica, e tendo a expressão para as autofunções, resta obter os potenciais transformados. Para isso, opera-se a integral $\int_0^L \tilde{\psi}_i(x) \cdots dx$ no problema original, Eq. (1), para obter o seguinte sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs).

$$\rho A \frac{d^2 \bar{y}_i(t)}{dt^2} + \eta \frac{d \bar{y}_i(t)}{dt} + \mu_i^4 \bar{y}_i(t) = \int_0^L \tilde{\psi}_i(x) f(x, t) dx + EI_0 \sum_{j=1}^{N_r} \bar{y}_j(t) \int_0^L (1 - \beta(x)) \frac{d^2 \tilde{\psi}_i(x)}{dx^2} \frac{d^2 \tilde{\psi}_j(x)}{dx^2} dx \quad (11)$$

As condições iniciais são dadas por.

$$\begin{aligned}\bar{y}_i(0) &= 0 \\ \left. \frac{d\bar{y}_i(t)}{dt} \right|_{t=0} &= 0\end{aligned}\quad (12)$$

A presença de $\bar{y}_j(t)$ na Eq. (11) caracteriza o acoplamento desse conjunto de EDOs, motivo pelo qual a solução de Eq. (11) é obtida numericamente, utilizando a rotina NDSolve do software Wolfram Mathematica.

Com a solução para o problema transformado, basta aplicar a fórmula de inversão, Eq. (6), para conseguir a solução do potencial original.

3. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA INVERSO

No presente trabalho, o problema inverso de identificação de danos é formulado segundo a abordagem bayesiana, onde o objetivo é obter estimativas para os parâmetros de coesão. O teorema de Bayes é dado por

$$\pi_{\text{posterior}}(\boldsymbol{\theta}) = \pi(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{Y}) = \frac{\pi_{\text{prior}}(\boldsymbol{\theta})\pi(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\theta})}{\pi(\mathbf{Y})} \quad (13)$$

onde $\pi_{\text{posterior}}(\boldsymbol{\theta})$ é a densidade de probabilidade a posteriori do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$, $\pi_{\text{prior}}(\boldsymbol{\theta})$ é a densidade a priori, $\pi(\mathbf{Y})$ é a densidade de probabilidade marginal das medidas $\mathbf{Y}$, que funciona como uma constante de normalização e $\pi(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\theta})$ é a função de verossimilhança, dada por

$$\pi(\mathbf{Y} | \boldsymbol{\theta}) = (2\pi)^{-N_d/2} |\mathbf{W}|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_{\text{calc}}(\boldsymbol{\theta}))^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_{\text{calc}}(\boldsymbol{\theta}))\right) \quad (14)$$

onde $\mathbf{W}$ é a matriz de covariância associada aos erros experimentais e $\mathbf{Y}_{\text{calc}}$ contém as respostas previstas pelo modelo considerando-se os valores $\boldsymbol{\theta}$ para os parâmetros.

Para a amostragem da densidade de probabilidade a posteriori, foram utilizados o método de Metropolis-Hastings e o método de Monte Carlo Hamiltoniano.

3.1. Metropolis-Hastings

O algoritmo de MCMC mais utilizado é o Metropolis-Hastings. Neste algoritmo, inicialmente é feita a escolha de uma densidade de transição, $w(\boldsymbol{\theta}^*, \boldsymbol{\theta}^{(t-1)})$, que gere um candidato $\boldsymbol{\theta}^*$ a partir do estado atual da Cadeia de Markov, $\boldsymbol{\theta}^{(t-1)}$. O candidato $\boldsymbol{\theta}^*$ pode ser aceito com certa probabilidade e o processo se repete. A seguir são destacados os passos para a construção do algoritmo de Metropolis-Hastings.

Passo 1: Selecionar uma amostra (candidato) $\boldsymbol{\theta}^*$ a partir da distribuição $w(\boldsymbol{\theta}^*, \boldsymbol{\theta}^{(t-1)})$.

Passo 2: Calcular o fator de aceitação α , dado por

$$\alpha = \min \left\{ 1, \frac{\pi(\boldsymbol{\theta}^* | \mathbf{Y}) w(\boldsymbol{\theta}^{(t-1)}, \boldsymbol{\theta}^*)}{\pi(\boldsymbol{\theta}^{(t-1)} | \mathbf{Y}) w(\boldsymbol{\theta}^{(t-1)}, \boldsymbol{\theta}^*)} \right\} \quad (15)$$

Passo 3: Gerar um número aleatório U vindo de uma distribuição uniforme entre 0 e 1. Se $U \leq \alpha$, $\boldsymbol{\theta}^{(t)} = \boldsymbol{\theta}^*$, caso contrário $\boldsymbol{\theta}^{(t)} = \boldsymbol{\theta}^{(t-1)}$.

Retornar ao Passo 1.

3.2. Monte Carlo Hamiltoniano

O método, inicialmente proposto por Duane *et al.* (1987) com o nome de Monte Carlo Híbrido, consiste na utilização da dinâmica hamiltoniana para simular a trajetória de uma partícula fictícia, cuja posição é definida como sendo igual ao vetor de incógnitas $\boldsymbol{\theta}$ e a quantidade de movimento $\mathbf{p}$ é dada por uma variável aleatória auxiliar (Neal, 2011). Esse sistema fictício, possui hamiltoniano dado por

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}) = \mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}) + \mathcal{K}(\mathbf{p}) \quad (16)$$

onde a energia potencial é definida como $\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}) = -\ln(\pi_{\text{posterior}}(\boldsymbol{\theta}))$ e a energia cinética é dada por $\mathcal{K}(\mathbf{p}) = 0,5\mathbf{p}^T \mathbf{M}_{\mathcal{K}}^{-1} \mathbf{p}$, onde $\mathbf{M}_{\mathcal{K}}$ é uma matriz diagonal positiva. A dinâmica hamiltoniana do sistema é, portanto, governada pelas equações

$$\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}}; \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \quad (17)$$

A evolução das variáveis $\boldsymbol{\theta}$ e $\mathbf{p}$ é obtida através da resolução numérica das equações hamiltonianas, Eq. (17), via utilização do método de integração numérica *Leapfrog*. Considerando-se apenas um único passo de tamanho δ , no método *Leapfrog*, o estado $(\boldsymbol{\theta}(t), \mathbf{p}(t))$ evolui para $(\boldsymbol{\theta}(t+\delta), \mathbf{p}(t+\delta))$ como se segue.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t+\delta/2) &= \mathbf{p}(t) - \frac{\delta}{2} \frac{d\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}(t))}{d\boldsymbol{\theta}} \\ \boldsymbol{\theta}(t+\delta) &= \boldsymbol{\theta}(t) + \delta \mathbf{M}_{\mathcal{K}}^{-1} \mathbf{p}(t+\delta/2) \\ \mathbf{p}(t+\delta) &= \mathbf{p}(t+\delta/2) - \frac{\delta}{2} \frac{d\mathcal{U}(\boldsymbol{\theta}(t+\delta))}{d\boldsymbol{\theta}} \end{aligned} \quad (18)$$

Na Eq. (18), se a trajetória se inicia no estado atual $(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p})$ e finaliza no candidato $(\boldsymbol{\theta}^*, \mathbf{p}^*)$. Este, por sua vez, possui probabilidade de aceitação dada por

$$\alpha_{HMC} = \min\left\{1, \exp\left(\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}) - \mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}^*, \mathbf{p}^*)\right)\right\} \quad (19)$$

O procedimento descrito acima é repetido N_{mcmc} vezes, resultando, para cada componente θ_j do vetor de parâmetros, na cadeia θ_j^k , $k=1, 2, \dots, N_{mcmc}$.

Cumprir destacar que, para a resolução das equações em Eq. (18), o gradiente da energia potencial foi determinado numericamente por diferença avançada.

4. RESULTADOS

Os valores dos parâmetros utilizados no modelo de viga de Euler-Bernoulli, tanto na solução numérica quanto na analítica, foram os mesmos utilizados por Matt (2013) e estão apresentados na Tab. 1.

Tabela 1. Parâmetros do modelo.

$E_0 I_0$ (Nm ²)	3,5
ρA (kg.m ⁻¹)	0,4
L (m)	1,0
η (Ns.m ⁻²)	5,0

Para o campo de coesão, foi criada uma malha com 21 pontos, sendo cada ponto o valor do parâmetro de coesão β em uma posição x . O campo que se deseja recuperar com a aplicação do problema inverso é dado pela Fig. 2, com o dano em $x=0,4$ m, com parâmetro de coesão $\beta=0,729$.

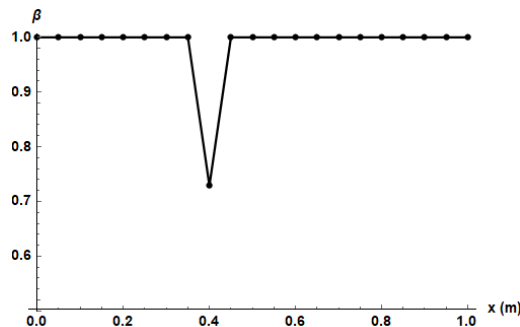


Figura 2. Campo de coesão a ser recuperado com o problema inverso.

A resposta do sistema utilizada para os dados experimentais e para o problema inverso foi obtida na posição $x = 0,2\text{m}$, no intervalo de tempo $[0; 0,6]\text{ s}$ com medições a cada $6 \times 10^{-4}\text{ s}$. Os dados experimentais foram obtidos a partir da própria solução via GITT, com adição de ruído para simular os erros de experimento. Para tal, foi utilizada a razão sinal-ruído (Signal-to-Noise Ratio – SNR), da seguinte forma

$$\text{SNR} = 10 \text{Log} \left(\frac{\sigma_{\text{sinal}}^2}{\sigma_{\text{ruído}}^2} \right) \quad (20)$$

onde SNR é a razão expressa em Decibéis, σ_{sinal}^2 é a variância do sinal e $\sigma_{\text{ruído}}^2$ é a variância do ruído adicionado.

O ruído utilizado tem SNR = 30dB e foi adicionado à solução obtida com a solução via GITT. Por ser usado o mesmo modelo para os dados experimentais e para o problema inverso, é dito que se comete um crime inverso.

A Fig. 3 mostra a resposta do sistema com e sem a adição de ruído.

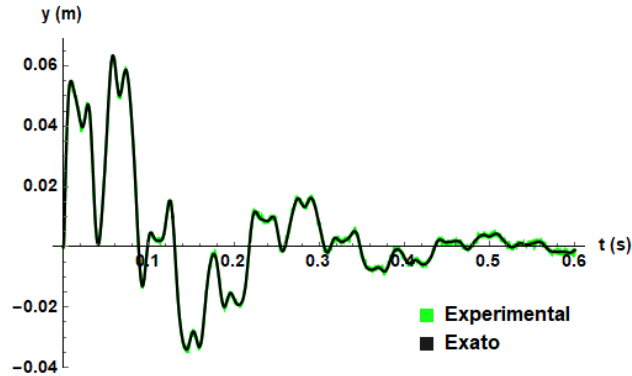


Figura 3. Resposta exata e experimental do sistema.

Com relação ao problema inverso, foi utilizada informação a priori para os 21 parâmetros de coesão. Para cada um, foi utilizado uma função contínua por partes onde, para $\beta \leq 1$, tem-se uma distribuição normal com desvio padrão $\sigma = 0,25$ e, para $\beta > 1$, uma distribuição normal com desvio padrão $\sigma = 0,01$. Possuem valores distintos pois, segundo a Eq. (5), valores de parâmetro de coesão superiores a 1 representam que a espessura local é maior que a espessura nominal da viga. Isso não é esperado, pois espera-se que o dano diminua a espessura da viga, e não aumente. Dessa forma, a priori escolhida leva em consideração essa observação, como mostra a Fig. 4.

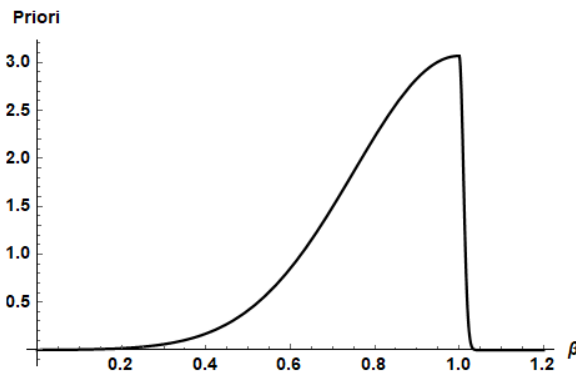


Figura 4. Densidade de probabilidade a priori acerca dos parâmetros de coesão.

Com relação às técnicas de amostragem abordadas, a Tab. 2 apresenta os parâmetros do Metropolis-Hastings e Monte Carlo Hamiltoniano.

Tabela 2. Parâmetros das técnicas de amostragem.

MH	HMC
$\sigma_{MH} = 0,001$	$N_{LF} = 2$
	$\delta = 0,001$
	$m = 1$

onde σ_{MH} é o desvio padrão da densidade de transição $w(\mathbf{Z}^*, \mathbf{Z}^{(t-1)})$, N_{LF} é o número de passos do *Leapfrog*, δ , como definido anteriormente, é o tamanho do passo e m é o valor de cada elemento da diagonal principal da matriz $\mathbf{M}_{\mathcal{K}}$.

Foram gerados 300 mil estados com o Metropolis-Hastings, com aceitação de 53,4%, enquanto para o HMC, a cadeia de Markov possui 30 mil estados, com aceitação de 84,7%. A Fig. 5 e Fig. 6 mostram, respectivamente, o avanço da cadeia na região do dano no Monte Carlo Hamiltoniano e no Metropolis-Hastings.

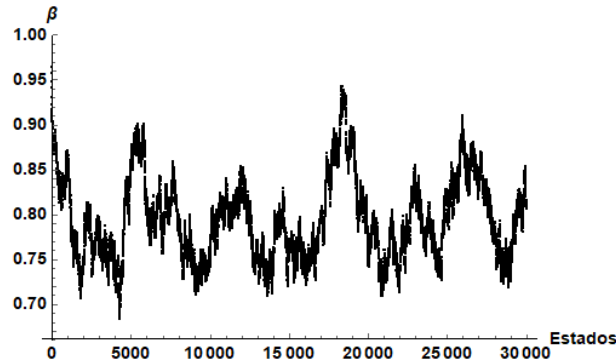


Figura 5. Cadeia de Markov para o HMC com 30 mil estados.

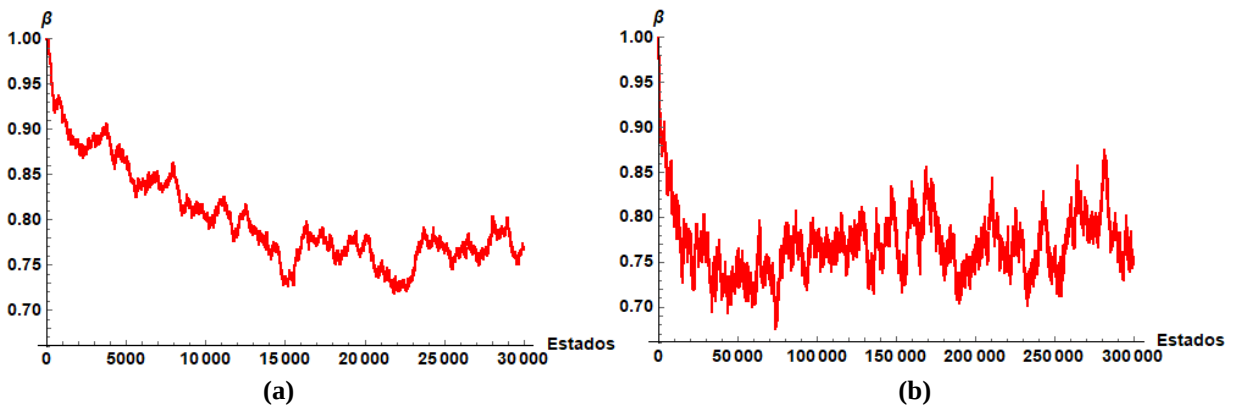


Figura 6. Cadeia de Markov para o MH com (a) 30 mil e (b) 300 mil estados.

Como é possível notar, o HMC necessitou de cerca de 1,5 mil para chegar em valores próximos de $\beta = 0,729$, enquanto no MH, foram necessários cerca de 15 mil estados para que o mesmo ocorresse.

A autocorrelação das cadeias de Markov é outro importante fator a ser analisado, que indica quantos estados são necessários para a obtenção de uma amostra não correlacionada. A Fig. 7 apresenta a interposição das funções de autocorrelação para ambas as técnicas de amostragem, para o parâmetro de coesão da região danificada.

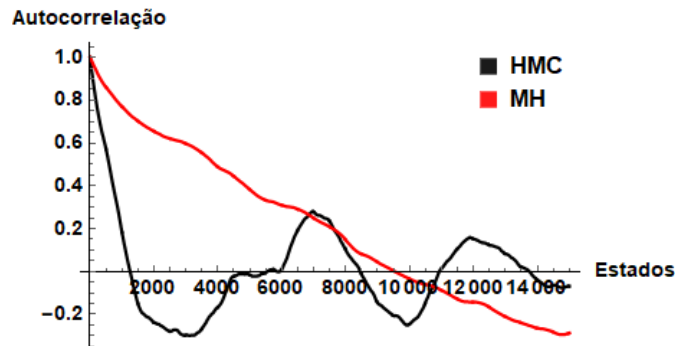


Figura 7. Funções de autocorrelação das cadeias de Markov utilizando MH e HMC.

Novamente é notória a diferença entre as técnicas pois, enquanto foram necessários por volta de 1000 estados para conseguir uma amostra não correlacionada no HMC, no MH o mesmo fato ocorre com cerca de 9,5 mil estados.

Outro dado que vale ser verificado é o histograma, também para a região com dano. Este mostra a frequência de ocorrência de determinado valor de parâmetro de coesão na cadeia de Markov. O histograma de ambas as técnicas é

apresentado na Fig.8. Ambos apresentaram resultados similares, com maior concentração de ocorrências entre os valores 0,75 e 0,80, um pouco maior que o valor exato do dano.

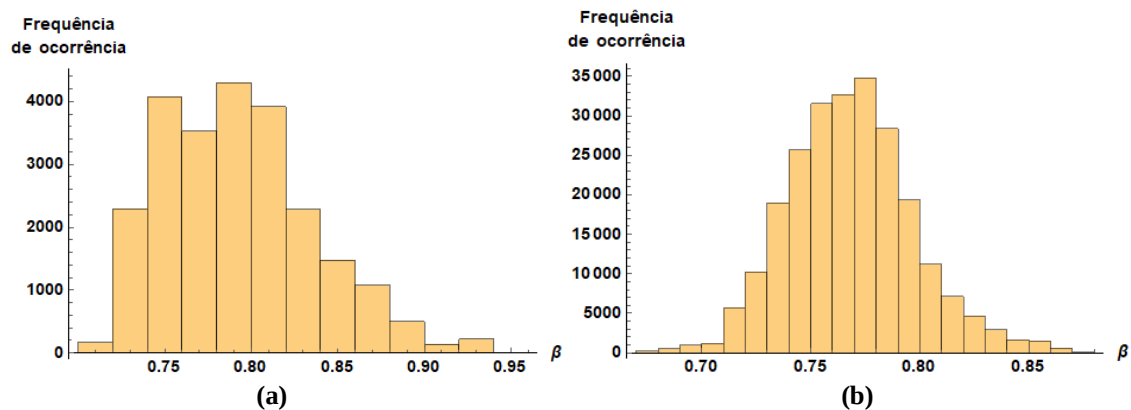


Figura 8. Histograma para o (a) HMC e (b) MH.

Por fim, são apresentados os campos de coesão obtidos com ambas as técnicas de amostragem. Ambos foram capazes de indicar com clareza a região danificada, embora o algoritmo de Metropolis-Hastings tenha obtido resultado ligeiramente superior.

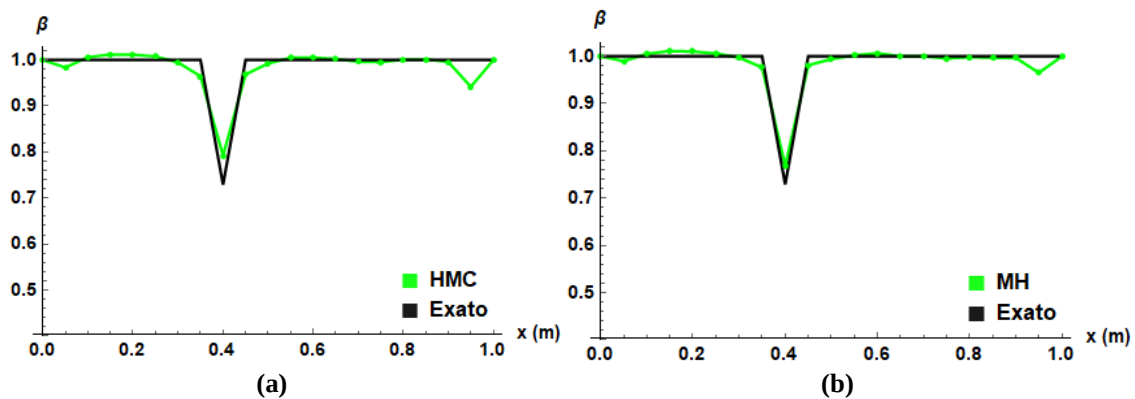


Figura 9. Campo de coesão para o (a) HMC e (b) MH.

Com relação ao tempo computacional dos dois métodos utilizados, a Tab. 3 mostra os valores para um computador com processador AMD Ryzen™ Threadripper™ 1950X 16-Core 3.40GHz e 48 GB de memória RAM, considerando o tempo total de execução e o tempo calculado pelo próprio software Wolfram Mathematica utilizando a função “Timing”, que considera apenas o tempo de utilização da CPU.

Tabela 3. Tempo computacional dos métodos.

	MH	HMC
Tempo total (h)	3,06	6,80
Função “Timing” (h)	2,97	2,06

Vale ressaltar que os valores de tempo levam em conta apenas a geração das cadeias de Markov, ou seja, 300 mil estados para o MH e 30 mil estados para o HMC. Percebe-se que, embora o tempo total do HMC seja mais que o dobro do MH, a diferença entre tempo total e o tempo obtido com a função “Timing” no MH é pequena, enquanto que para o HMC o tempo total foi mais que o triplo do tempo de processamento, indicando que em alguns pontos o processador fica ocioso.

Além disso, a derivada da energia potencial presente na Eq. (18) é calculada utilizando o conceito de diferença avançada, em que a resposta do sistema precisa ser avaliada em relação a cada parâmetro, o que consome muito tempo computacional.

Destes fatos, infere-se que, em condições mais favoráveis, como a realização do cálculo da derivada utilizando técnicas mais eficientes como a diferenciação automática (Rall, 1981), além da paralelização utilizando cluster para reduzir o tempo ocioso de processamento, o HMC poderia se tornar mais rápido proporcionalmente.

5. CONCLUSÕES

No presente trabalho foram apresentadas a formulação e solução para um problema inverso de estimação de parâmetros de coesão de uma viga de Euler-Bernoulli simplesmente apoiada. No contexto do Método de Monte Carlo com Cadeias de Markov, foram utilizadas duas técnicas de amostragem: o método de Metropolis-Hastings e o Monte Carlo Hamiltoniano. Embora a comparação gráfica entre os campos de coesão obtidos tenha obtido resultados semelhantes, observações acerca da autocorrelação da cadeia e avanço da mesma levam à conclusão de que o HMC de fato é capaz de gerar amostras de maior qualidade em comparação com o MH. Além disso, a observação com relação ao tempo de processamento ressalta o potencial do HMC em ser otimizado em trabalhos futuros. Outra sugestão é o desenvolvimento de uma solução independente para gerar dados experimentais, de modo a não cometer crime inverso.

6. AGRADECIMENTOS

Os autores deixam aqui registrados os agradecimentos às agências de fomento CAPES, CNPq e FAPERJ pelo apoio concedido.

7. REFERÊNCIAS

- Cotta, R.M., 1993, "Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow". CRC Press, 158p.
- Cotta, R.M., 1994, "Benchmark Results in Computational Heat and Fluid Flow: The Integral Transform Method. International Journal of Heat & Mass Transfer" (Invited Paper), v. 37, Suppl. 1. p.381-394.
- Cotta, R.M., Mikhailov, M.D., 1997. "Heat Conduction: Lumped Analysis, Integral Transforms, Symbolic Computation", Chichester, UK: Wiley-Interscience.
- Cotta, R.M., 1998. "The Integral Transform Method in Thermal and Fluids Sciences and Engineering", New York: Begell House.
- Cotta, R.M., Mikhailov, M.D., 2006, "Hybrid methods and symbolic computations", In: Handbook of Numerical Heat Transfer. 2.ed. Chapter 16, W.J. Minkowycz; E.M. Sparrow; J.Y. Murthy (eds.). New York: John Wiley.
- Duane, S., Kennedy, A.D., Pedleton, B.J., Roweth, D., 1987, "Hybrid monte carlo", Physics Letter B, 195(2), 216-222.
- Knupp, D.C., Naveira-Cotta, C.P., Cotta, R.M., 2012, "Theoretical analysis of conjugated heat transfer with a single domain formulation and integral transforms", Int. Commun. Heat Mass Transf. 39, 355-362.
- Matt, C.F.T., 2013, "Combined classical and generalized integral transform approaches for the analysis of the dynamic behavior of a damaged structure". Appl. Math. Model. 37, 8431-8450.
- Neal, R. M., 2011, "MCMC using Hamiltonian dynamics", In Brooks, S., Gelman, A., Jones, G. L., Meng, X. L. (ed.) Handbook of Markov Chain Monte Carlo. Boca Raton: Chapman and Hall-CRC Press, p. 113-162.
- Orlande, H. R. B., Colaço, M. J., Cotta, C. P. N., Guimarães, G., Borges, V. L., 2011, "Problemas Inversos em Transferência de Calor", São Carlos, SP: SBMAC, 113 p. (Notas em Matemática Aplicada; v. 51).
- Pandey, A.K., Biswas, M., 1994, "Damage Detection in Structures Using Changes in Exibility", J. Sound Vib. 169, 3-17.
- Rall, L.B., 1981, "Automatic Differentiation: Techniques and Applications", Lecture Notes in Computer Science, vol. 120. Springer, Berlin.

8. RESPONSABILIDADE AUTURAL

"Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho".

STRUCTURAL DAMAGE IDENTIFICATION EMPLOYING INTEGRAL TRANSFORMS, HAMILTONIAN MONTE CARLO AND METROPOLIS-HASTINGS

Carlos Eduardo Závoli Cordeiro, caduzavoli1@gmail.com¹

Leonardo Tavares Stutz, ltstutz@iprj.uerj.br¹

Diego Campos Knupp, diegoknupp@iprj.uerj.br¹

¹ Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro - Rua Bonfim, 25, Vila Amélia, Nova Friburgo, RJ,

Abstract. *The present work comprehends the structural damage identification in an Euler-Bernoulli beam, simply-supported. For the solution of the differential equation proposed, the Generalized Integral Transform Technique (GITT) is applied. From the model employed, the damage identification can be defined as an inverse problem, in which the solution basically consists in finding the structure cohesion parameters. It's utilized the Markov Chain Monte Carlo, using two different sampling techniques: Metropolis-Hastings (MH) and the Hamiltonian Monte Carlo (HMC) for the sampling of the probability distribution of the cohesion parameters. There is also a comparative between both techniques. For the methods evaluation, numerical simulations were done, considering the damage identification problem. The conclusion is that both methods are able to sample a posteriori probability distribution of the cohesion parameters, although the HMC samples are better, also need less states for the convergence of the chain, in comparison with the Metropolis-Hastings.*

Keywords: *Damage Identification, Generalized Integral Transform Technique, Monte Carlo Markov Chain, Metropolis-Hastings Algorithm, Hamiltonian Monte Carlo.*