

QUANTIFICAÇÃO DA INCERTEZA DO PROCESSO ESTOCÁSTICO TAMANHO DE TRINCA PARA O MODELO DE PROPAGAÇÃO DE TRINCA DE FORMAN VIA METODOLOGIA “FAST CRACK BOUNDS”

Bruno dos Santos, santos.engenheiro@outlook.com¹

Claudio Roberto Ávila da Silva Jr, avila@utfpr.edu.br¹

Marco van der Meer, marco.meer@gmail.com¹

Thiago Castro Bezerra, thiagotcb@gmail.com¹

Gracielle Lima de Oliveira, oliveirag@alunos.utfpr.edu.br¹

¹Universidade Tecnológica Federal do Paraná; Rua Deputado Heitor Alencar Furtado, 5000, 81280-340, Curitiba, PR, Brasil; NuMAT/PPGEM.

Resumo: A mecânica da fratura linear elástica (MFLE) permite a quantificação das relações entre as propriedades dos materiais, o nível de tensão, a presença de defeitos geradores de trincas e os mecanismos de propagação de trincas. Existem inúmeros modelos buscando descrever o comportamento do crescimento de trinca. Estes são classificados em duas grandes áreas, a saber: amplitude de tensão constante (CATC) e amplitude de tensão variável (CATV). Neste trabalho apresentou-se a utilização do modelo do tipo CATC proposto por Forman. Admite-se a existência da incerteza nos parâmetros de definição do modelo. O objetivo desse estudo é a quantificação da incerteza do fenômeno de propagação de trincas a voz do modelo de Forman, visando formula-lo como um problema de valor inicial (PVI) com a aplicação da metodologia “Fast Crack Bounds” (FCB) obtendo-se assim a curva de evolução da trinca por intermédio do método numérico Runge-Kutta de quarta ordem (RK4). Para isso a modelagem da incerteza será feita através das variáveis aleatórias. A partir disso, os métodos de simulação de Monte Carlo (SMC) e FCB serão utilizados conjuntamente para se estimar os momentos estatísticos do processo estocástico “tamanho de trinca”. O desempenho da proposta será avaliado a partir da combinação dos métodos de SMC com Runge-Kutta de quarta ordem. Busca-se quantificar o desempenho da proposta para um exemplo “clássico” da mecânica da fratura, denominado de “Placa com largura finita e trinca central” onde a função de correção do fator de intensidade de tensão é conhecida. O trabalho identifica ganhos computacionais de tempo da metodologia FCB na ordem de 3500 vezes menor ao obtido pelo RK4. Com uma pequena variação dos desvios relativos. Possuindo desvios máximos de 16,2%. Validando a eficiência da metodologia FCB para a análise do fenômeno “tamanho de trinca”.

Palavras-chave: Modelo de Forman; Mecânica da fratura linear elástica; Momentos estatísticos do tamanho de trinca; Método “Fast Crack Bounds”.

1. INTRODUÇÃO

A necessidade do desenvolvimento tecnológico para processos de análise estrutural, está intimamente ligada aos motivos que ocasionam falhas no material metálico. Dentro deste contexto, o de maior relevância é o fenômeno de fadiga. Este é definido como sendo o processo de degradação localizada, progressiva e permanente, que ocorre em material sujeito a variações de tensões e deformações e que produzem a nucleação de trincas ou a completa fratura depois de um número suficiente de ciclos (ASTM, 2000).

Segundo Moura (2017), existem inúmeras aplicações nas indústrias automobilística e aeroespacial que admitem a simultaneidade de trincas durante a vida útil de operação dos componentes. A existência de trincas dentro da taxa de tolerância de trabalho, não representa uma falha ou a necessidade de substituição do componente. Contudo fundamentado na detecção de uma trinca, se faz necessário o acompanhamento e monitoramento de sua evolução em situação de trabalho. Por consequência, o prognóstico da taxa de evolução de trinca, é de suma importância na caracterização de manutenções preventivas e preditivas.

Buscando solucionar a problemática da determinação da taxa de propagação de trincas, a Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) evidencia inúmeros modelos de evolução de trinca. Estes são classificados em duas grandes áreas, a saber: amplitude de tensão constante (CATC) e amplitude de tensão variável (CATV). Para os modelos do tipo CATC, enfatiza-se as leis de evolução de Paris-Erdogan (1963), Forman (1967), Walker (1970), Collipriest (1972), Priddle (1976), McEvily (McEvily & Groeger, 1977), Wang (1994), entre outros.

Os modelos de propagação de trincas são desenvolvidos por intermédio de um problema de valor inicial (PVI). Onde aplica-se soluções numéricas aproximadas para o PVI. Com a finalidade de alcançar essas soluções numéricas emprega-se o procedimento numérico de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4), representando a necessidade de elevado esforço e custo computacional.

Santos et al, (2016) contribuíram para minimizar esse problema propondo a metodologia FCB. Essa metodologia efetua a determinação das funções descritas como cotas superior e inferior, que envelopam a solução numérica aproximada encontrada pelo método de RK4.

Sendo assim, o objetivo desse estudo é a realização da quantificação de incertezas. Utilizando-se de uma metodologia computacionalmente eficiente através dos estimadores dos momentos estatísticos das funções de cotas superiores e inferiores, obtidas pela metodologia FCB, para o processo estocástico “tamanho de trinca” para o modelo de propagação de trinca, do tipo CATC, proposto por Forman (1972).

Para isso admite-se a existência da incerteza nos parâmetros de definição do modelo. A modelagem da incerteza será feita através das variáveis aleatórias. A partir disso, os métodos de SMC e FCB serão utilizados conjuntamente para se estimar os momentos estatísticos do processo estocástico “tamanho de trinca”. O desempenho da proposta será avaliado a partir da combinação dos métodos de SMC com RK4.

2. MÉTODO DE PESQUISA

Essa pesquisa se classifica como quantitativa e exploratória em função de apresentar a característica de se centrar na objetividade, recorrendo a linguagem matemática para descrever as causas do fenômeno de propagação de trinca. Tendo como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito. Conforme citam os autores Fonseca (2002) e Gil (2007).

O método de pesquisa adotado, é a pesquisa experimental. Conforme Triviños (1987), em função de representar um valioso procedimento para testar hipóteses que estabelecem relações de causa e efeito entre as variáveis, observando se as diferenças nas respostas são estatisticamente significantes. A pesquisa é desenvolvida em três etapas descritas a seguir:

1. Formulação Matemática - Para o desenvolvimento dessa fase efetua-se a formulação matemática buscando a determinação das cotas superior e inferior para a evolução de trinca do modelo de Forman por intermédio da metodologia FCB, estipulando-se as cotas mediante série de Taylor de segunda ordem com resto de Lagrange.
2. Métodos e algoritmos - Nessa etapa a quantificação da incerteza do modelo de propagação de trinca de Forman consistirá em utilizar conjuntamente os métodos de SMC e FCB para obter cotas para os momentos estatísticos do processo estocástico “tamanho de trinca”.
3. Implementação computacional - Utilizando-se do software MatLab desenvolve-se o ambiente computacional. Implementa-se os métodos SMC, RK4 e FCB do modelo de propagação de trinca de Forman. Em conformidade com o exemplo clássico “Placa com largura finita e trinca central”. O resultado dessa iteração dentro do ambiente computacional, resultará em um algoritmo que desempenhará uma confrontação entre as soluções numéricas adquiridas através do método de RK4 e os estimadores das cotas

3. FADIGA

A MFLE assume que os componentes mecânicos mesmo antes de serem colocados em serviço possuem trincas. Onde as trincas podem propagar até tornarem-se críticas para um elemento quando está sujeito a tensões dinâmicas e oscilantes, fenômeno este nomeado de fadiga.

Segundo ASTM (2000), a fadiga é um processo progressivo e localizado de modificações estruturais permanentes ocorridas em um material submetido a condições que produzem tensões e deformações cíclicas em um ponto ou em vários pontos e que pode culminar em trincas ou fratura após um número suficiente de ciclos. Desta forma nota-se que o fenômeno da fadiga adquire importância em função do seu potencial para aumento da vida útil de componentes mecânicos. Assim, o estudo da MFLE viabiliza métodos de análise para prever o tamanho dessas trincas antes que atinjam tamanhos catastróficos.

3.1. Modelo de propagação de trincas

Através da MFLE, pode-se prognosticar o número de ciclos necessários para que uma determinada trinca atinja um tamanho especificado. Valor este que pode estar diretamente ligado a uma condição de falha. Em geral, os modelos matemáticos para a evolução de trinca são definidos pelo seguinte PVI, conforme Eq. (1).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } a \in C^1[N_0, N_1]; \mathbb{R}^+ \text{ tal que:} \\ \frac{da}{dN}(N) = h(\alpha, \Delta K), \forall N \in (N_0, N_1); \\ a(N_0) = a_0. \end{array} \right. \quad (1)$$

Sendo “h” a lei de evolução, “ ΔK ” a variação do Fator de intensidade tensão (FIT) e “ α ” representa os parâmetros característicos do modelo.

O estudo da evolução de uma trinca é feito com base na taxa de crescimento de trinca. Com relação ao comportamento da taxa de propagação de trinca, o diagrama “log (da/dN) vs log(ΔK)”, pode ser dividido em três regiões da Fig. 1, representando as etapas de nucleação, propagação e falha por fadiga. Em geral cada modelo de propagação de trinca, descreve uma ou mais regiões do diagrama “log (da/dN) versus log(ΔK)”.

Para uma análise das regiões II e III do diagrama “log (da/dN) vs log(ΔK)”, nesse trabalho elaborou-se um estudo referente ao modelo de propagação de trinca proposto por Forman (1967).

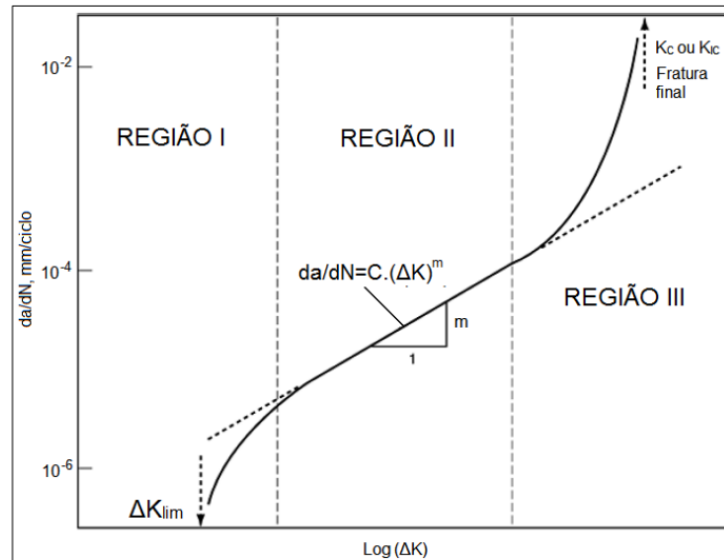


Figura 1. Curva da taxa de propagação de trinca por fadiga, log (da/dN), vs a variação do fator de intensidade de tensão, log(ΔK), em escala log-log.

Fonte: Elaborada pelos autores.

3.1.1 Modelo de propagação de trinca de Forman

O modelo de Forman (1967) é usado para prever a taxa de crescimento de trinca em fadiga nas regiões II e III do diagrama “log (da/dN) vs log(ΔK)” da Fig 1. Este modelo constata os efeitos da tensão média e altas taxas de propagação de trinca. Sendo descrito como segue.

$$\frac{da}{dN} = \frac{C_f (\Delta K)^{m_f}}{(1-R)K_C - \Delta K} \quad (2)$$

Sendo C_f e m_f parâmetros do material para o modelo de Forman, ΔK a variação do fator de intensidade de tensão e K_C a tenacidade a fratura do material. Por esses fatos o modelo de Forman é capaz de descrever o comportamento da evolução de uma trinca para várias razões de tensão, R ($R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max} = K_{\min}/K_{\max}$), aplicadas nas regiões II e III da Fig 1. A equação é válida para valores de $R > 0$, pois, para determinados materiais, quando $R < 0$ não ocorre mudanças significativas na taxa de propagação de trinca se comparada com a taxa de propagação quando $R \geq 0$ (HUDSON, SCARDINA, 1969; BANNANTINE et al., 1989; KUMAR et al., 2013). A razão de tensão, utilizada no modelo de Forman, é um fator que influencia diretamente na taxa de propagação de trinca. De forma geral, para valores de ΔK constante, quanto maior o valor de R , maior a taxa de propagação de trinca. Destaca-se que o efeito da razão de tensão é fortemente dependente do tipo de material em análise (HUDSON, SCARDINA, 1969; YUEN et al., 1974; BANNANTINE et al., 1989; MEHRZADI, TAHERI, 2012).

3.2. Metodologia “Fast Crack Bounds”

A metodologia FCB foi apresentada nos trabalhos de Ávila e Santos (2015) e Machado Jr. (2015). Segundo Ávila e Santos (2015), propõe estabelecer cotas superiores e inferiores para a função tamanho de trinca. Estas cotas “envelopam” a solução do PVI do modelo de propagação de trincas de Forman.

A partir da equação Eq. (1). Efetuam-se algumas hipóteses buscando uma posterior aplicação do método FCB e fundamentando nestas hipóteses possibilita para a função tamanho de trinca a sua correta representação por intermédio da série de Taylor de segunda ordem com resto de Lagrange, conforme Santos (2015):

$$a(N) = a_0(N_0) + \frac{da}{dN}(N_0)(N - N_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2a}{dN^2}(\eta) \right) (N - N_0)^2, \text{ com } \eta \in [N_0, N]. \quad (3)$$

O método FCB propõe a partir da série de Taylor retendo termos até segunda ordem, com resto de Lagrange utilizando as hipóteses, quando necessárias, com majorações adequadas, obter cotas da seguinte forma:

$$\underline{a}(N) \leq a(N) \leq \bar{a}(N), \forall N \in [N_0, N]. \quad (4)$$

Onde Ávila et al. (2016) cita que os parâmetros $\underline{a}(N)$, $a(N)$ e $\bar{a}(N)$, são respectivamente a função de cota inferior, tamanho de trinca e função da cota superior. Buscando uma posterior verificação da acurácia do método FCB, as cotas obtidas através desta técnica serão comparadas com a solução numérica adquirida através do método de RK4.

3.2.1 Determinação das cotas via FCB para o modelo de Forman

Como os modelos matemáticos para a evolução de trinca são formulados através de PVI. Onde possuem como características serem equações diferenciais ordinárias de 1º ordem, não lineares e autônomas. As determinações das cotas consistem em um problema de Cauchy, buscando a trajetória que satisfaça a equação diferencial do PVI. Aplicando a expansão em série de Taylor com resto de Lagrange, Eq. (3), considerando as seguintes hipóteses (SANTOS, 2015):

$$\begin{aligned} H1: f &\in C^1(\mathbb{R}^+); \\ H2: 0 < f(a_0) &\leq f(x) \leq f(y), x \leq y, \forall x, y \in [a_0, a_1]; \\ H3: f'(a_0) &\leq f'(x) \leq f'(y), \forall x, y \in [a_0, a_1]; \\ H4: m &\geq 1. \end{aligned} \quad (5)$$

A segunda derivada da Eq. (2) é:

$$\begin{aligned} \frac{d^2a}{dN^2}(a(N)) &= \frac{d}{dN} \left(\frac{da}{dN}(a(N)) \right) = \frac{d}{da} \left(\frac{da}{dN}(a(N)) \right) \frac{da}{dN}(a(N)) \\ &= \left[\frac{C_f \Delta k^{m_f}}{(1-R)k_c - \Delta k} \right]^2 \left[m_f + \frac{1}{(1-R)K_c - 1} \right] \left[\frac{1}{2a} + \frac{f'(a)}{f(a)} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

Assim, as cotas superior e inferior são obtidas, considerando, também, a hipótese H1, obtém-se assim as funções que definirão as cotas superior e inferior para o modelo de Forman são:

$$\left\{ \begin{aligned} a(N) - a_0 &\leq \left\{ \frac{C_f (\Delta K(a_0))^{m_f}}{(1-R)K_c - \Delta K(a_0)} + \frac{1}{2} \left[\frac{C_f (\Delta K(a^*))^{m_f}}{(1-R)K_c - \Delta K(a^*)} \right]^2 \left[m_f + \frac{1}{(1-R) \frac{K_c}{\Delta K(a^*)} - 1} \right] \right\} (N - N_0) \\ &\quad \left[\frac{1}{2(a^*)} + \left(\frac{f'}{f} \right)(a^*) \right] (N - N_0) \end{aligned} \right\} \quad \forall N \in [N_0, N_1] \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{aligned} a(N) - a_0 &\geq \frac{C_f (\Delta K(a_0))^{m_f}}{(1-R)K_c - \Delta K(a_0)} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{C_f (\Delta K(a_0))^{m_f}}{(1-R)K_c - \Delta K(a_0)} \right] \left[m_f + \frac{1}{(1-R) \frac{K_c}{\Delta K(a_0)} - 1} \right] \right\} (N - N_0), \\ &\quad \left[\frac{1}{2(a_0)} + \left(\frac{f'}{f} \right)(a_0) \right] (N - N_0) \end{aligned} \right\}$$

Representa-se mais satisfatoriamente o fenômeno de propagação de trincas quando se considera os efeitos probabilísticos. Justificando-se esta abordagem estatística em função da dispersão dos valores mensurados dos parâmetros que envolvem os modelos de propagação de trinca (GHONEM e DORE, 1987).

3.3. Momentos estatísticos para a metodologia FCB

Os parâmetros matemáticos do modelo são variáveis aleatórias absolutamente contínuas em um dado espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, onde Ω um espaço amostral, $\mathcal{F}$ uma σ -álgebra de eventos e P uma medida de probabilidade (JAMES, 1981). Desta forma pode-se rescrever a Eq. (2) conforme a equação abaixo (LOPEZ e ÁVIA, 2015).

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Determinar } a : (N_0, N_1) \times (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow \mathbb{R}^+, \text{ tal que,} \\ \left(\frac{da}{dN} \right) (N) = \frac{C_f \left(\sqrt{\pi a(N, \omega)} f(a(N, \omega)) \Delta \sigma \right)^m f}{(1-R) K_c - \Delta K}, \forall (N, \omega) \in (N_0, N_1) \times (\Omega, \mathcal{F}, P); \\ a(N_0, \omega) = a_0(\omega), \forall \omega \in (\Omega, \mathcal{F}, P). \end{array} \right. \quad (8)$$

Sendo ω eventos randômicos do espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. A partir do PVI da Eq. (8), analisa-se os momentos estatísticos até a segunda ordem. O valor esperado e a relação entre a variância e o valor esperado são respectivamente as estimativas do primeiro e segundo momento estatístico. A seguir define-se os estimadores dos momentos estatísticos através do seguinte lema.

LEMA

Conforme Moura (2017), seja $\left\{ a(\omega_1), a(\omega_2), \dots, a(\omega_{N_S}) \right\}$ o conjunto de um dado modelo CATC, $\left\{ a_{CI}(N, \omega_i) \right\}_{i=1}^{N_S}$ a cota inferior e $\left\{ a_{CS}(N, \omega_i) \right\}_{i=1}^{N_S}$ a cota superior. A partir do exposto, obtém-se as seguintes desigualdades, Eq. (9):

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \hat{\mu}_a(N) \leq \hat{\mu}_a(N) \leq \hat{\mu}_a(N), \forall N \in [N_0, N]; \\ (ii) \hat{\mu}_a^{(2)}(N) \leq \hat{\mu}_a^{(2)}(N) \leq \hat{\mu}_a^{(2)}(N), \forall N \in [N_0, N]. \end{array} \right. \quad (9)$$

A primeira relação (i) representa as cotas para o estimador do momento estatístico de primeira ordem (valor esperado), onde $\hat{\mu}_a(N)$ é cota inferior do tamanho de trinca, $\hat{\mu}_a(N)$ a função tamanho de trinca e $\hat{\mu}_a(N)$ a cota superior do tamanho de trinca. A segunda relação retrata o estimador do momento estatístico de segunda ordem, onde $\hat{\mu}_a^{(2)}(N)$ é cota inferior do tamanho de trinca, $\hat{\mu}_a^{(2)}(N)$ a função tamanho de trinca e $\hat{\mu}_a^{(2)}(N)$ a cota superior do tamanho de trinca. Vuolo (1996), define a Eq. (10) como uma boa alternativa para o cálculo da estimativa experimental da variância

$$\sigma_a^2(N) = \frac{1}{N_S - 1} \sum_{i=1}^{N_S} \left(a - \hat{\mu}_a \right)^2 (N), \forall N \in [N_0, N]. \quad (10)$$

Onde σ_a^2 , representa a variância da função tamanho de trinca. Assim o estimador do momento estatístico de segunda ordem é determinado pela Eq. (11):

$$\hat{\mu}_a(N) = \sigma_a^2(N) + \frac{N_S}{N_S - 1} \left(\hat{\mu}_a \right)^2, \forall (N, \omega) \in [N_0, N] \times (\Omega, \mathcal{F}, P). \quad (11)$$

Por intermédio de variáveis randômicas com distribuição uniforme realiza-se a modelagem da incerteza aplicada ao modelo de propagação de trinca proposto por Forman. Os parâmetros com incerteza são apresentados na Eq. (12).

$$\begin{cases} C_f(\omega) = \mu_{C_f} + \sqrt{3} \cdot \delta_{C_f} \cdot \xi(\omega), & \forall \omega \in \Omega; \\ m_f(\omega) = \mu_{m_f} + \sqrt{3} \cdot \delta_{m_f} \cdot \xi(\omega), & \forall \omega \in \Omega; \\ K_c(\omega) = \mu_{a_0} + \sqrt{3} \cdot \delta_{K_c} \cdot \xi(\omega), & \forall \omega \in \Omega; \end{cases} \quad (12)$$

No qual $\{\mu_{C_f}, \mu_{m_f}, \mu_{K_c}\}$ representa as médias e $\{\delta_{C_f}, \delta_{m_f}, \delta_{K_c}\}$ os coeficientes de dispersão das variáveis randômicas. Ainda as variáveis aleatórias $\xi(\bullet)$ são uniformes ($U[-1,1]$) e estatisticamente independentes. O desempenho da proposta será avaliado a partir da combinação dos métodos de SMC com RK4, comparando os estimadores dos momentos estatísticos das cotas com os estimadores obtidos para a solução numérica aproximada.

3.4. Simulação de Monte Carlo

A SMC é uma técnica matemática computadorizada que possibilita levar em conta o risco em análises quantitativas e tomadas de decisão. (ULAM J. VON NEUMANN, 1947). É visto como método numérico universal para resolver problemas por meio de amostragem aleatória (aproximação da solução).

Conforme Elishakoff (1999) o método de SMC é baseado na geração e simulação de amostras. O método consiste normalmente em três etapas:

1. Simulação da função da variável aleatória;
2. Solução do problema determinístico para um grande número de realizações;
3. Análise estatística dos resultados.

Buscando angariar as estimativas dos momentos estatísticos de esperança do processo estocástico, para a função de tamanho de trinca. Adentro da metodologia FCB para o método numérico de RK4, será utilizado durante a execução deste trabalho o método de SMC.

No trabalho de Lopez e Ávila (2015), a aproximação numérica das realizações do processo estocástico que descreve a propagação da trinca é avaliada usando um método RK4. Assim, para a i -ésima realização dos parâmetros, a solução numérica aproximada da i -ésima realização do processo estocástico “tamanho de trinca” é dada pela Eq. (13).

$$\begin{cases} \text{Determinar } a_{K+1}(\omega_i) \in i^+, \text{ para cada } \omega_i \in \Omega; \\ a_{K+1}(\omega_i) = a_K(\omega_i) + \left(\frac{\Delta N}{6} \right) (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)(\omega_i), \forall K \in \{0, 1, \dots, n\} \\ K_1(\omega_i) = \frac{C_f \left(\sqrt{\pi a(N)} f(a(N)) \Delta \sigma \right)^{m_f}}{(1-R) K_c - \Delta K}; \\ K_2(\omega_i) = a_K(\omega_i) + \left(\frac{\Delta N}{2} \right) K_1(\omega_i); \\ K_3(\omega_i) = a_K(\omega_i) + \left(\frac{\Delta N}{2} \right) K_2(\omega_i); \\ K_4(\omega_i) = a_K(\omega_i) + (\Delta N) K_3; \\ a_0(\omega_i) = a(N, \omega_i). \end{cases} \quad (13)$$

A Eq. (13) representa o desenvolvimento matemático da metodologia proposta para a solução numérica aproximada da i -ésima realização do processo estocástico “tamanho de trinca” para o modelo de propagação de trinca de Forman.

4. RESULTADOS NÚMERICOS

Os resultados alcançados, foram gerados utilizando o software MatLab (versão R2015a), por intermédio de um computador com processador Intel Celeron B830 (1,80 GHz) e memória RAM de 4,00 GB. Para avaliar o desempenho das cotas aplicado ao modelo de propagação de trincas de Forman, utilizou-se os dados apresentados nos trabalhos de Castro e Meggiolaro (2009), para um material de aço ferrítico. Todos os dados empregados nas simulações estão apresentados na Tab. 1, sendo que a cada parâmetro com incerteza, foram geradas 10.000 amostras randômicas, para a estimativa dos momentos estatísticos.

Tabela 1. Dados empregados nas simulações numéricas.

Parâmetro	Representação	Valor numérico	Unidade
Valor esperado da variável randômica “CF”	μ_{CF}	2,00e-9	m/ciclo
Valor esperado da variável randômica “mf”	μ_{mF}	2,9	Adimensional
Valor esperado da variável randômica “K _c ”	μ_{kc}	250	MPa√m
Coeficiente de dispersão da variável randômica “CF”	δ_{CF}	(1/10) μ_{CF}	m/ciclo
Coeficiente de dispersão da variável randômica “mf”	δ_{mF}	(1/10) μ_{mF}	Adimensional
Coeficiente de dispersão da variável randômica “K _c ”	δ_{Kc}	(1/10) μ_{kc}	MPa√m
Amplitude de tensão nominal	$\Delta\sigma$	70	MPa
Razão entre tensões mínima e máxima	R	0	Adimensional
Largura da placa	b	0.1	m
Número de ciclos	N	900.000	Ciclos

Complementa-se aos dados expostos na Tab. 1, o valor de tamanho de trinca estrela para a cota superior (a*). Segundo Santos (2015), determina-se o valor de a* por inspeção, e este é responsável por assegurar que a cota superior não seja violada pela solução numérica. Neste estudo aplica-se a metodologia a um exemplo clássico da literatura utilizando-se de um $a^* = 1,4^*a_0$.

A fim de avaliar o desempenho da proposta apresentada neste trabalho, estabeleceu-se funções de “desvio relativo” das cotas para os estimadores dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem. Relacionadas aos resultados alcançados com o método numérico RK4. A Eq. (14) descreve os desvios de primeiro momento e a Eq. (15) caracteriza os desvios de segundo momento estatístico.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{\hat{\mu}_{\bar{a}}}^{\wedge}(N) = 100. \left(\frac{\hat{\mu}_{\bar{a}} - \mu_{\bar{a}}}{\hat{\mu}_{\bar{a}}} \right) (N) \quad [\%], \forall N \in [N_0, N] \\ \varepsilon_{\hat{\mu}_{\underline{a}}}^{\wedge}(N) = 100. \left(\frac{\hat{\mu}_{\underline{a}} - \mu_{\underline{a}}}{\hat{\mu}_{\underline{a}}} \right) (N) \quad [\%], \forall N \in [N_0, N] \end{array} \right. \quad (14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{\hat{\mu}_{\bar{a}}^{(2)}}^{\wedge}(N) = 100. \left(\frac{\hat{\mu}_{\bar{a}}^{(2)} - \mu_{\bar{a}}^{(2)}}{\hat{\mu}_{\bar{a}}^{(2)}} \right) (N) \quad [\%], \forall N \in [N_0, N] \\ \varepsilon_{\hat{\mu}_{\underline{a}}^{(2)}}^{\wedge}(N) = 100. \left(\frac{\hat{\mu}_{\underline{a}}^{(2)} - \mu_{\underline{a}}^{(2)}}{\hat{\mu}_{\underline{a}}^{(2)}} \right) (N) \quad [\%], \forall N \in [N_0, N] \end{array} \right. \quad (15)$$

Apresenta-se a seguir a aplicação da metodologia para um exemplo clássico da mecânica da fratura designado como “Placa com largura finita e trinca central”, utilizou-se uma função de correção do Fator de intensidade tensão descrita por Bannantine (1989).

4.1. Placa com largura finita e trinca central

A função de correção do fator de intensidade de tensão para o caso de “Placa com largura finita e trinca central”, representada pela Fig. 2. É dada por Bannantine et al. (1989), Eq. (16)

$$f(a) = \sqrt{\sec\left(\frac{\pi \bar{a}}{2b}\right)}, \text{ em } (N_0, N_1) \times (\Omega, \mathcal{F}, P). \quad (16)$$

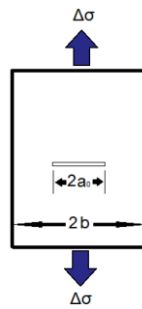


Figura 2. Placa com largura finita e trinca central.
Fonte: Elaborada pelos autores.

Observa-se na Fig. 03 a estimativa do primeiro momento estatístico para o processo estocástico “tamanho de trinca” da variável randômica C_f .

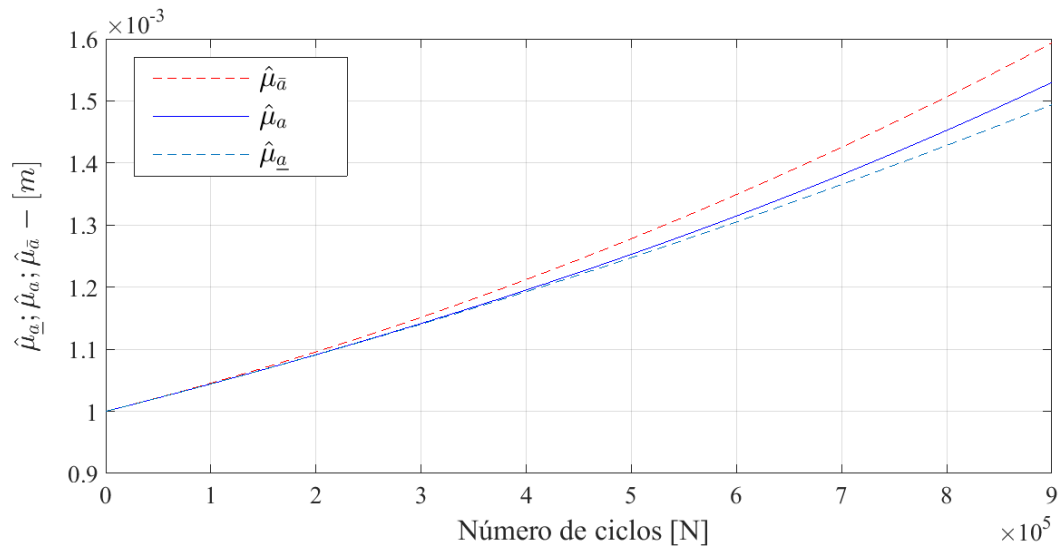


Figura 3. Primeiro momento estatísticos – C_f .
Fonte: Elaborada pelos autores.

Apresenta-se na Tab. 2 os desvios relativos ao primeiro e segundo momento estatístico para o exemplo clássico “Placa com largura finita e trinca central”.

Tabela 2. Desvio relativo do primeiro e segundo momento estatístico [%].

Parâmetro		Primeiro momento estatístico			Segundo momento estatístico		
		3.10 ⁵ Ciclos	6. 10 ⁵ Ciclos	9. 10 ⁵ Ciclos	3.10 ⁵ Ciclos	6.10 ⁵ Ciclos	9. 10 ⁵ Ciclos
C_f	$\bar{a}$ (N)	0,871	2,622	4,152	1,754	5,335	8,434
	$\underline{a}$ (N)	-0,096	-0,7325	-2,349	-0,1943	-1,401	-4,697
m_f	$\bar{a}$ (N)	1,373	3,43	3,783	2,927	7,584	6,038
	$\underline{a}$ (N)	-0,240	-1,936	-6,6	-0,5138	-4,404	-16,2
K_c	$\bar{a}$ (N)	0,8884	2,661	4,18	1,79	5,418	8,57
	$\underline{a}$ (N)	-0,1003	-0,7571	-2,418	-0,2013	-1,522	-4,84

A Tabela 2 apresenta os tempos computacionais para a determinação das cotas via FCB-SMS e solução numérica via RK4-SMS para 900.000 ciclos. A confrontação dos tempos, ocorre através da Eq. (17).

$$\rho = RK4 / (FCB) * 100 \quad (17)$$

Tabela 3. Tempo de execução (em segundos) para 900000 ciclos para o modelo de Forman.

Parâmetro		Tempo [s]	ρ [%]
C_f	RK4	19.0910	4663,165
	FCB	0.4094	
m_f	RK4	20.8506	3810,416
	FCB	0.5472	
K_c	RK4	28.7451	3597,184
	FCB	0.7991	

5. CONCLUSÃO

Através de um problema clássico da literatura técnica designado como “Placa com largura finita e trinca central” e dados de um material de aço ferrítico. Buscou-se realizar a quantificação da incerteza do fenômeno de propagação de trincas a voz do modelo de Forman. Onde os métodos de SMC e FCB foram utilizados conjuntamente para se estimar os momentos estatísticos do processo estocástico “tamanho de trinca”.

Constatou-se que as cotas para o primeiro e segundo momento estatístico, enveloparam a solução numérica. Atendendo as desigualdades propostas na Eq. (9). Com a análise dos “desvios relativos” observa-se uma ínfima variação da metodologia FCB em relação a solução numérica RK4, com desvios máximos de 16,2%. Através do confronto dos tempos computacionais, demonstrado na Tab. 3, observa-se que a metodologia FCB obteve um tempo de 3500 vezes menor ao obtido pelo RK4.

Com o estudo pôde-se validar a eficiência da metodologia FCB para a análise do fenômeno “tamanho de trinca”. Em razão de apresentar tempos computacionais relativamente inferiores as soluções numéricas com desvios relativos pequenos.

Considerando as limitações desse trabalho, sugere-se como trabalhos futuros a implementação da metodologia FCB para outros modelos de propagação de trinca e materiais.

6. REFERÊNCIAS

- ASTM E 823-96. (2000), Standard Terminology Relating to Fatigue and Fracture testing.
- Ávila, S. Jr. C. R.; Santos, Rodrigo Villaca and Beck, A. T. (2016), “Analytical Bounds for Efficient Crack Growth Computation”, Applied mathematical modelling, Vol. 40, p. 2312-2321.
- Ávila, s. Jr. C. R. and Santos, R. V. (2015), “Bounds for the Propagation Model of Crack Forman”, International journal of sciences: basic and applied research, Vol. 22, n. 2, p. 219-231.
- Bannantine, J. A. et al. (1989), Fundamentals of metal fatigue analysis. 1nd ed, Prentice Hall, New Jersey.
- Branco, C., Fernandes, A. and Castro, P. (1999), “Fadiga de Estruturas Soldadas”. Fundação Calouste Gulbenkian – Lisboa.
- Callister, W. D. (2009), Ciência e Engenharia de Materiais - Uma Introdução. 1nd ed, LTC, Rio de Janeiro.
- Castro, J. T. P. and Meggiolaro, M. A. (2009), Técnicas e Práticas de Dimensionamento Estrutural sob Cargas Reais de Serviço. 1 ed, Create Space
- Colippriest, J. E. (1972), “An experimentalist’s view of the surface flaw problem”, American Society for Testing and Materials. p. 43-62.
- Elishakoff, I. (1999), Probabilistic theory of structures, 2nd ed., Dover Mineola, New York.
- Forman, R. G. (1972), “Study of fatigue crack initiation from flaws using fracture mechanics theory”, Engineering Fracture Mechanics. Vol. 4, p. 333-345.
- Forman, R. G; Kearney, V. E. and Engle, R. M. “Numerical analysis of crack propagation in cyclic loaded structures” J. Basic Engineering 89, p. 459-464.
- Ghonem, H. and Dore, S (1987), “Experimental Study of the Constant-Probability Crack Growth Curves Under Constant Amplitude Loading”, Engineering fracture mechanics. Vol. 27, n. 1, p. 1-25.
- Gil, A.C. (2002), Como elaborar projetos de pesquisa. 4nd.ed., Atlas S/A, São Paulo.
- Hudson, C. M. and Scardina, J. T. (1969), “Effect of stress ratio on fatigue-crack growth in 7075-T6 aluminum-alloy sheet”, Engineering Fracture Mechanics. Vol. 1, p. 429-446.
- James, B, R. (1981), Probabilidade: Um curso em nível intermediário, 1nd ed. Hamburg, São Paulo, SP.
- Kumar, A; Murthy, R. C. and Iyer, N. R. (2013). “Enhanced model for describing total fatigue rate curve considering stress ratio effects”, Advances in Structural Engineering. Vol. 17, p. 1011-1028.
- Lopez, R. H. and Ávila, S. Jr. C. R. (2015) “A non-intrusive methodology for the representation of crack growth stochastic processes”, Mechanics research communications. Vol. 64, p. 23-28.
- Machado Jr, W. M. (2015). Aplicação da metodologia “fast bounds crack” para a estimativa eficiente da evolução do tamanho de trinca. Mestre. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
- Mehrziadi, M and Taheri, F. (2012) “The influence of negative and positive stress ratios on crack growth rate in AM60B magnesium alloy”, Materials Science and Engineering A. Vol, 545, p. 68-77.
- Mcevely, A. J and Groeger, J. (1977), On the threshold for fatigue crack growth. In: ICF4, Waterloo (Canada).

- Moura, L. G. (2017). Estabelecimento de cotas para os momentos estatísticos do tamanho de trinca, para o modelo de Collipriest via método Fast Crack Bounds. Mestre. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
- Paris, P. and Erdogan, F. A (1963) "Critical analysis of crack propagation laws", Journal of fluids engineering. Vol. 85, p. 528-533.
- Priddle, E. K. (1976) "High cycle fatigue crack propagation under random and constant amplitude loadings", International journal of pressure vessels and piping, Vol. 4, n. 2, p. 89-117.
- Santos, R. V. (2015) Desenvolvimento de uma nova metodologia estabelecendo cotas para a evolução de trincas para modelos de carregamento com amplitude de tensão constante. Doutor. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
- Shigley, J. E. (2005), Projeto de Engenharia Mecânica. 7 nd ed. Bookman, Michigan – USA.
- Triviños, A. N. S. (1987), Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação. 5nd ed. Atlas, São Paulo.
- Ulam J. and Von Neumann, R. D. R. S. (1947), Statistical methods in neutron diffusion. LAMS-551, April 9 1947.
- Vuolo, J. H. (1996), Fundamentos da teoria de erros. 2nd ed. Edgard Blucher LTDA, São Paulo.
- Walker, K. (1970) "The effect of stress ratio during crack propagation and fatigue for 2024-T3 and 7076-T6 aluminum. Effect of environment and complex load history on fatigue life", American society for testing and materials. p. 1–14.
- Wang, W. and Cheng, T. (1994) "Fatigue Crack Growth Rate of Metal by Plastic Energy Damage Accumulation Theory", Journal of engineering mechanics, p. 776-795.
- Yuen A. et al. (1974) "Correlations between fracture surface appearance and fracture mechanics parameters for stage II fatigue crack propagation in TI-6Al-4V", Metallurgical and Materials Transactions B. v. 5, p. 1833-1842.

7. RESPONSABILIDADE AUTORAL

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho.

UNCERTAINTY QUANTIFICATION OF THE STOCHASTIC PROCESS "CRACK SIZE" FOR THE FORMAN CRACK PROPAGATION MODEL USING THE "FAST CRACK BOUNDS" METHODOLOGY.

Bruno dos Santos, santos.engenheiro@outlook.com1
Claudio Roberto Ávila da Silva Jr1, avila@utfpr.edu.br1
Marco van der Meer, marco.meer@gmail.com1
Thiago Castro Bezerra, thiagotcb@gmail.com1
Gracielle Lima de Oliveira, oliveirag@alunos.utfpr.edu.br

¹Federal University of Technology - Paraná (UTFPR), NuMAT/PPGEM; 5000 Deputado Heitor Alencar Furtado St, Curitiba, PR, 81280-340, Brasil.

Abstract. The Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM) allows the quantification of the relations between the properties of the materials, the stress level, the presence of crack-generating defects and the mechanisms of crack propagation. There are numerous models that seek to describe the behavior of crack growth. These are classified into two main areas, namely: constant amplitude loading (CAL) and variable amplitude loading (VAL). This dissertation presented the using of the CAL model proposed by Forman. The existence of uncertainty in the model definition parameters is assumed. The purpose of this study is the uncertainty quantification of the crack propagation phenomenon according to the Forman model, aiming to formulate it as an initial value problem (IVP) applying the Fast Crack Bounds methodology, thus obtaining the crack evolution curve by means of the fourth-order Runge-Kutta numerical method (RK4). For this, the uncertainty modeling will be done through random variables. From this, the Monte Carlo and Fast Crack Bounds simulation methods will be used together to estimate the statistical moments of the stochastic process "crack size". The performance of the proposal will be evaluated by combining the Monte Carlo simulation with fourth-order Runge-Kutta methods. It is tried to quantify the performance of the proposal for a "classical" example of the mechanics of the fracture, denominated of "Plate with finite width and central crack" where the function of correction of the factor of intensity of tension is known. The work identifies computational time gains of FCB methodology in the order of 3500 times smaller than that obtained by RK4. With a small variation of the relative deviations. Possessing maximum deviations of 16.2%. Validating the efficiency of the FCB methodology for the analysis of the "crack size" phenomenon.

Keywords: Forman model; Linear elastic fracture mechanics; Statistical moments of crack size; Fast Crack Bounds Method