

USO DAS SIMETRIAS DE LIE NO CÁLCULO DA DEFLEXÃO DE VIGAS

A. W. Nunes, afonso_willian@hotmail.com¹

C. H. C. Basquerotto, cbasquerotto@ymail.com¹

E. Righetto, edisonrighetto72@gmail.com¹

S. da Silva, samuel.silva13@unesp.br¹

¹ Universidade Estadual Paulista - UNESP, Faculdade de Engenharia, Departamento de Engenharia Mecânica, Ilha Solteira, SP

Resumo: As simetrias de Lie representam um conjunto de operações que podem ser feitas para mapear e manter invariantes soluções de equações diferenciais. Neste sentido, a teoria iniciada por Sophus Lie no século XIX apresentou um poderoso método para redução de ordem e obtenção de invariantes e quadraturas para solução de equações diferenciais, com uma ampla gama de aplicações práticas. Neste artigo, ilustra-se o significado físico das simetrias de Lie e dos invariantes que podem ser obtidos em uma viga de Euler-Bernoulli em condição estática. Em especial, a partir dos geradores de simetria de Lie extraídos da equação da linha elástica podem ser obtidos as equações de equilíbrio, energia de deformação e as próprias deflexões. O artigo também mostra a transformação de coordenadas para redução de ordem e integração com novas variáveis.

Palavras-chave: Simetrias de Lie, Invariantes, Viga de Euler-Bernoulli

1. INTRODUÇÃO

No século XIX, o norueguês Sophus Lie apresentou uma alternativa visando solucionar equações diferenciais usando simetrias que podem se associar com invariantes ou quantidades conservadas (Olver, 1986; Basquerotto *et al.*, 2018a). Uma simetria de um sistema de equações diferenciais é um conjunto de transformações que mapeiam qualquer solução para outra solução do sistema, mantendo-a invariante (Basquerotto *et al.*, 2018b). Tais transformações são grupos que dependem de parâmetros contínuos e consistem em transformações pontuais, também conhecidas como simetrias pontuais, atuando no espaço do sistema de variáveis dependentes e independentes, bem como em todas as derivadas das variáveis dependentes (Blumman and Kumei, 1989; Cantwell, 2002).

As simetrias têm sido usadas para obter soluções dos mais diferentes tipos de problemas, como por exemplo, vorticidade em dinâmica de fluidos (Ambrose *et al.*, 2015), equação do calor (Clarkson and Mansfield, 1994; Paliathanasis and Tsampanlis, 2012; Stepanova, 2015), equação da onda (Craddock, 2000; Mustafa and Al-Dweik, 2015), mecânica do contínuo envolvendo plasticidade (Liu, 2015), problemas de elasticidade em barras, vigas e placas (Bartsch and Ding, 2001; Bocko *et al.*, 2012), entre outros.

As relações entre simetria e invariância são fundamentais na física e aparecem em todas as áreas a partir de princípios de conservação (Mei, 2000). Um caso particular, é a obtenção de leis de conservação a partir da aplicação do Teorema de Noether em sistemas de equações diferenciais variacionais descritos por uma lagrangiana (Jean, 2014). Neste sentido, este trabalho busca determinar as simetrias de Lie e invariantes associados com o problema de viga de Euler-Bernoulli. Assim, este artigo inicia com uma descrição sucinta do significado e como calcular simetrias de Lie, seguido de um exemplo de aplicação para seu uso no cálculo de deflexão em vigas.

2. AS SIMETRIAS DE LIE E O TEOREMA DE NOETHER

Seja uma equação diferencial ordinária de segunda ordem escrita na forma (Olver, 1986; Blumman and Kumei, 1989; Basquerotto *et al.*, 2018a,b):

$$\mathcal{F}(x, u, u', u'') = 0 \quad (1)$$

sendo x a variável independente, u a variável dependente e as derivadas com relação a x denotadas por $'$. Algumas transformações podem ser aplicadas para manter a equação invariante. No caso, um gerador de simetrias, X ,

pode ser obtido a partir de:

$$\chi = \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial u} \end{Bmatrix} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial u} \quad (2)$$

sendo ξ e η funções infinitesimais. Lie demonstrou que uma equação diferencial admite um grupo de simetrias se, e somente se, a chamada condição de Lie for satisfeita. Por exemplo, em uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, pode-se aplicar um operador $\mathcal{U}''$ como:

$$\mathcal{U}'' = \beta^{(1)} \frac{\partial}{\partial u'} + \beta^{(2)} \frac{\partial}{\partial u''} \quad (3)$$

sendo $\beta^{(1)}$ o prolongamento de primeira ordem realizado nas derivadas de primeira ordem de u , dado por:

$$\beta^{(1)} = \mathcal{D}_x(\eta) - u' \mathcal{D}_x(\xi) = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial u} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) u' - \frac{\partial \xi}{\partial u} (u')^2 \quad (4)$$

e $\beta^{(2)}$ o prolongamento de segunda ordem realizado nas derivadas de segunda ordem de u , descrito por:

$$\begin{aligned} \beta^{(2)} = & \mathcal{D}_x(\beta^{(1)}) - u'' \mathcal{D}_x(\xi) = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \left(2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial u} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) u' + \\ & \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial u} \right) (u')^2 - \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} (u')^3 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial u} - 2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) u'' - 3 \frac{\partial \xi}{\partial u} u' u'' \end{aligned} \quad (5)$$

sendo $\mathcal{D}_x$ a derivada total:

$$\mathcal{D}_x = \frac{\partial}{\partial x} + u' \frac{\partial}{\partial u} + u'' \frac{\partial}{\partial u'} \quad (6)$$

Com isso, para a condição de Lie ser satisfeita deve valer a relação (Olver, 1986; Blumman and Kumei, 1989; Basquerotto *et al.*, 2018a,b):

$$(\mathcal{U}'' + \chi) \mathcal{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{U}'' + \chi) \mathcal{F} = \xi \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \eta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} + \beta^{(1)} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u'} + \beta^{(2)} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u''} = 0 \quad (7)$$

A busca por existência de simetrias na natureza tem como principal resultado a obtenção de invariantes. Nos casos onde se conhece a lagrangiana, $\mathcal{L}$, e as funções infinitesimais ξ e η , a aplicação do teorema de Noether é como se fosse um revelador de quantidades $\mathcal{A}$ se conservando (Olver, 1986; Martins, 1999). A quantidade se conservando a partir de uma transformação de simetria pode ser determinada pelo teorema de Noether a partir de (Mei, 2000):

$$\mathcal{A} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u'} (u' \xi - \eta) - \mathcal{L} \xi = \text{Constante} \Rightarrow \frac{d}{dx} \mathcal{A} = 0 \quad (8)$$

Para reescrever a equação em termos das coordenadas canônicas $\bar{u}$ e $\bar{x}$ é necessário que a seguinte relação para as novas coordenadas seja satisfeita (Silva Júnior, 2016):

$$\begin{aligned} \chi_1(\bar{u}) &= \xi \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \eta \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} = 0 \\ \chi_2(\bar{x}) &= \xi \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + \eta \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = 1 \end{aligned} \quad (9)$$

A partir das coordenadas canônicas pode-se obter a variável $v(\bar{x})$ redutora de ordem (Silva Júnior, 2016; Gilmore, 2008):

$$v(\bar{x}) = \frac{d}{d\bar{x}} \bar{u}(\bar{x}) \quad (10)$$

3. APLICAÇÃO EM VIGAS

A aplicação dos fundamentos das simetrias de Lie pode ser ilustrada na equação diferencial que descreve a deflexão de uma viga estaticamente determinada com um carregamento retangular q distribuído ao longo do comprimento 2ℓ e rigidez flexional EI , conforme a Fig. 1.

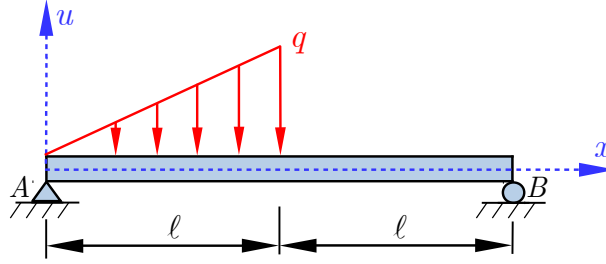


Figura 1: Viga Estaticamente Determinada

A equação da linha elástica em função da distribuição de momento fletor, $M(x)$, no trecho $0 < x < \ell$ é:

$$EI \frac{d^2 u}{dx^2} - V_A x - \frac{qx^3}{3\ell} = 0 \quad (11)$$

sendo $u(x)$ a deflexão, EI a rigidez flexional e V_A a reação de apoio no ponto A.

A partir da aplicação da condição de Lie e da solução do sistema de equações determinantes têm-se as funções infinitesimais ξ e η , mostradas na Tab. 1, que são componentes dos oito geradores de simetria.

Tabela 1: Funções infinitesimais ξ e η

	ξ	η
χ_1	0	1
χ_2	0	x
χ_3	0	$60EI\ell u - 10V_A\ell x^3 + qx^5$
χ_4	$12EI\ell$	$6V_A\ell x^2 - qx^4$
χ_5	$12EI\ell x$	$6V_A\ell x^3 - qx^5$
χ_6	$15EI\ell x^2$	$x(-qx^5 + 5V_A\ell x^3 + 15EI\ell u)$
χ_7	$12(qx^5 - 10V_A\ell x^3 + 60EI\ell u)EI\ell$	$(qx^5 - 10V_A\ell x^3 + 60EI\ell u)(-qx^4 + 6V_A\ell x^2)$
χ_8	$15x(qx^5 - 10V_A\ell x^3 + 60EI\ell u)EI\ell$	$(qx^5 - 10V_A\ell x^3 + 60EI\ell u)(-qx^5 + 5V_A\ell x^3 + 15EI\ell u)$

A lagrangiana associada ao problema é igual a energia de deformação da viga:

$$\mathcal{L} = - \int_0^x \frac{M(x)^2}{2EI} dx = \frac{1}{630EI\ell^2} [x^3 (5q^2x^4 - 42V_Aqx\ell^2 + 105V_A^2\ell^2)] \quad (12)$$

Em seguida, utilizando o Teorema de Noether, calculou-se os oito invariantes associados no trecho da viga, mostrados na Tab. 2.

Tabela 2: Invariantes para $x = \ell$

χ	$\mathcal{A}$
χ_1	0
χ_2	0
χ_3	0
χ_4	$-\frac{2\ell^4}{105}(5q^2\ell^2 - 42V_Aq\ell + 105V_A^2)$
χ_5	$-\frac{2\ell^5}{105}(5q^2\ell^2 - 42V_Aq\ell + 105V_A^2)$
χ_6	$-\frac{\ell^6}{42}(5q^2\ell^2 - 42V_Aq\ell + 105V_A^2)$
χ_7	$-\frac{2\ell^5}{105}(q\ell^4 - 10V_A\ell^3 + 60EI\ell u)(5q^2\ell^2 - 42V_Aq\ell + 105V_A^2)$
χ_8	$-\frac{\ell^6}{42}(q\ell^4 - 10V_A\ell^3 + 60EI\ell u)(5q^2\ell^2 - 42V_Aq\ell + 105V_A^2)$

Derivando o invariante $\mathcal{A}_4$ em relação a variável independente x e fazendo $x = \ell$ é possível calcular a reação de apoio no ponto A:

$$\frac{d}{dx}\mathcal{A}_4 = -\frac{2\ell^3}{3}(q\ell - 3V_A) = 0 \Rightarrow V_A = \frac{q\ell}{3} \quad (13)$$

Por meio de transformações canônicas e utilizando as funções infinitesimais da Tab. 1 também pode-se obter novas variáveis, dando destaque àquelas que facilitaram a integração da equação diferencial. Para ξ_4 e η_4 foram calculadas as seguintes variáveis:

$$x_4 = \frac{1}{60EI\ell} (qx^5 - 10V_A\ell x^3 + 60u(x)EI\ell) \quad u_4 = \frac{x}{12EI\ell} \quad (14)$$

Fazendo a mudança de variáveis na equação da linha elástica para as novas coordenadas x_4 e u_4 tem-se a equação e a solução remapeadas:

$$\frac{d^2}{dx_4^2} u_4(x_4) = 0 \Rightarrow u_4(x_4) = C_1 x_4 + C_2 \quad (15)$$

sendo C_1 e C_2 as constantes de integração.

Substituindo as expressões das novas variáveis na solução remapeada tem-se a solução da equação da linha elástica nas coordenadas originais:

$$u(x) = -\frac{1}{60EI\ell} \left[qx^5 - 10V_A\ell x^3 + \frac{1}{C_1} (60EI\ell C_2 - 5x) \right] \quad (16)$$

Em seguida, calculadas as coordenadas canônicas para o quarto gerador de simetria, determinou-se a função v_4 para a redução de ordem da equação diferencial:

$$v_4 = \frac{d}{dx_4} u_4 = \frac{1}{qx^4 + 12EI\ell \frac{d}{dx} u(x) - 6V_A\ell x^2} \quad (17)$$

de forma que a equação reescrita na nova variável é:

$$\frac{d}{dx_4} v_4(x_4) = 0 \quad (18)$$

A solução da Eq. (18) seguida da mudança de variáveis de $v_4(x_4)$ e x_4 para suas respectivas expressões em função de $u(x)$ e x e posterior integração em dx resulta na solução da EDO original.

Destaca-se que apesar de ser um problema relativamente simples e com solução conhecida, portanto sem necessidade das transformações feitas, o método de Lie é bastante interessante por permitir soluções mais econômicas, conforme mostrado na Eq. (16).

A teoria de Lie pode ser aplicada em diferentes exemplos com os mais diversos tipos de carregamentos ou parâmetros, sendo exigente apenas a descrição das equações diferenciais que ilustram o fenômeno de interesse. Também vale destacar que os invariantes extraídos dos geradores de simetria tem significado físico claro, por serem relacionados a energia de deformação, reações de apoio e a própria flecha da estrutura em pontos específicos de interesse, que não se alteram independente do sistema de referência usado para descrição. Por fim, os geradores infinitesimais de simetrias de Lie são sempre da mesma forma para diferentes geometrias e carregamentos e podem ser descritos de forma genérica em função da distribuição de momento fletor $M(x)$ e do carregamento aplicado na viga. Com isto, a obtenção de um novo método geral e alternativo descrito na forma de um teorema para o cálculo da energia de deformação e/ou das reações de apoio pode ser proposto.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir dos resultados obtidos com a teoria de Lie pôde-se confirmar a presença das quantidades físicas se conservando, os invariantes, e verificar que o remapeamento da solução em novas variáveis facilita a resolução da equação da linha elástica, como no caso do quarto gerador de simetria. Também, a generalização que o método tem permite a proposição de um método alternativo para cálculo de deflexão ou qualquer outro invariante em diferentes tipos de vigas.

AGRADECIMENTOS

O dois primeiros autores agradecem, respectivamente, a FAPESP (Processo 2016/22473-6) e a CAPES por suas bolsas de estudos. Os autores também agradecem o apoio do CNPq/Edital Universal do processo 404463/2016-9 que pretende popularizar a teoria de Lie para a comunidade de engenharia no país.

5. REFERÊNCIAS

Ambrose, D.M., Kelliher, J.P., Filho, M.C.L. and Lopes, H.J.N., 2015. "Serfati solutions to the 2D Euler equations on exterior domains". *Journal of Differential Equations*, Vol. 259, No. 9, pp. 4509 – 4560. ISSN 0022-0396. URL <https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.06.001>.

- Bartsch, T. and Ding, Y., 2001. "Periodic solutions of superlinear beam and membrane equations with perturbations from symmetry". *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, Vol. 44, No. 6, pp. 727 – 748. ISSN 0362-546X. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0362546X99003028>.
- Basquerotto, C.H.C.C., Righetto, E. and da Silva, S., 2018a. "Applications of the Lie symmetries to complete solution of a bead on a rotating wire hoop". *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*.
- Basquerotto, C.H.C.C., Righetto, E. and da Silva, S., 2018b. "As simetrias de Lie de um pião". *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Vol. 40, No. 2.
- Blumman, G.W. and Kumei, S., 1989. *Symmetries and Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences 81. Springer, New York.
- Bocko, J., Nohajová, V. and Harčarik, T., 2012. "Symmetries of differential equations describing beams and plates on elastic foundations". *Procedia Engineering*, Vol. 48, pp. 40 – 45. ISSN 1877-7058. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877705812045468>. Modelling of Mechanical and Mechatronics Systems.
- Cantwell, B.J., 2002. *Introduction to Symmetry Analysis*. Cambridge University Press, USA.
- Clarkson, P.A. and Mansfield, E.L., 1994. "Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear heat equations". *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 70, No. 3, pp. 250 – 288. ISSN 0167-2789. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167278994900175>.
- Craddock, M., 2000. "Symmetry groups of linear partial differential equations and representation theory: The Laplace and axially symmetric wave equations". *Journal of Differential Equations*, Vol. 166, No. 1, pp. 107 – 131. ISSN 0022-0396. URL <http://dx.doi.org/10.1006/jdeq.2000.3786>.
- Gilmore, R., 2008. "Lie groups and differential equations". In C.U. Press, ed., *Lie Groups, Physics, and Geometry*, Cambridge University Press, pp. 284–308. doi:doi:10.1017/CBO9780511791390.017.
- Jean, S.S., 2014. *Applications of Symmetries and Conservation Laws to the Study of Nonlinear Elasticity Equations*. Ph.D. thesis, University of Saskatchewan.
- Liu, C.S., 2015. "Elastoplastic models and oscillators solved by a Lie-group differential algebraic equations method". *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 69, pp. 93 – 108. ISSN 0020-7462. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.11.025>.
- Martins, A.S., 1999. "Simetrias e leis de conservação na mecânica clássica". *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Vol. 21, No. 1, pp. 33–39.
- Mei, F.X., 2000. "Lie symmetries and conserved quantities of constrained mechanical systems". *Acta Mechanica*, Vol. 141, No. 3, pp. 135–148. ISSN 1619-6937.
- Mustafa, M.T. and Al-Dweik, A.Y., 2015. "Noether symmetries and conservation laws of wave equation on static spherically symmetric spacetimes with higher symmetries". *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 23, No. 1–3, pp. 141 – 152. ISSN 1007-5704. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.11.011>.
- Olver, P.J., 1986. *Applications of Lie groups to differential equations*. 107. Springer US, New York, 2nd edition.
- Paliathanasis, A. and Tsamparlis, M., 2012. "Lie point symmetries of a general class of pdes: The heat equation". *Journal of Geometry and Physics*, Vol. 62, No. 12, pp. 2443 – 2456. ISSN 0393-0440. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.geomphys.2012.09.004>.
- Silva Júnior, C.C.d., 2016. "Simetrias de Lie de equações a derivadas fracionárias e integro-diferenciais".
- Stepanova, I.V., 2015. "Symmetry analysis of nonlinear heat and mass transfer equations under Soret effect". *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 20, No. 3, pp. 684 – 691. ISSN 1007-5704. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.06.043>.

6. RESPONSABILIDADE AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho.

LIE SYMMETRIES IN DEFLECTION OF BEAMS

A. W. Nunes, afonso-willian@hotmail.com¹

C. H. C. C. Basquerotto, cbasquerotto@ymail.com¹

E. Righetto, edisonrighetto72@gmail.com¹

S. da Silva, samuel.silva13@unesp.br¹

¹ Universidade Estadual Paulista - UNESP, Faculdade de Engenharia, Departamento de Engenharia Mecânica, Ilha Solteira, SP

Abstract: *The Lie symmetries represent a group of operations that can be made to map and to maintain invariants the solutions of the differential equation. Thus, the theory initiated by Sophus Lie in the 19th century showed a powerfull method to reduce order and to obtain the invariants and quadratures to solve the differential equations, with a wide range of practical applications. This work illustrates the physical meaning of the Lie symmetries and invariants that can be obtained in a static Euler-Bernoulli beam. In particular, with the Lie symmetry generators extracted by the elastic line equation it's possible to calculate the equilibrium equations, the deformation and the deflection. This work also shows the coordinate transformation applied for the order reduction and integration with the new variables.*

Keywords: *Lie Symmetries, Invariants, Euler-Bernoulli Beam*