

REVISANDO UMA FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO EM PROBLEMAS DE FLAMBAGEM ELÁSTICA DE BARRAS

J.S. Passos, jbs.mat@hotmail.com¹

C.A.T. Lucena, taurinolucena@gmail.com¹

A.V. Mendonça, mendonca@ct.ufpb.br¹

¹ Universidade Federal da Paraíba, cidade universitária s/n-Castelo Branco III, João Pessoa-PB, 58051085

Resumo: Neste artigo, uma solução do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para determinação de cargas críticas de flambagem elásticas de barras utilizando o modelo de Euler-Bernoulli proposto por G.D. Manolis, D.E. Beskos e M.F. Pineros em 1986 é rediscutida. Diferentemente da formulação do MEC proposta por eles, no presente artigo discute-se: a) dedução de equações integrais utilizando o Teorema da Reciprocidade de Betti, b) dedução de soluções fundamentais mais simples resultando em um sistema algébrico com termos mais concisos, c) incorporação de descontinuidades no domínio associadas à mudança abrupta de geometria (barras escalonadas) e apoios elásticos intermediários ao longo do vão. A validação da formulação aqui proposta é feita mediante a apresentação de exemplos numéricos são apresentados e comparados com soluções analíticas. Os resultados mostram que a formulação do MEC proposta é correta e elegante.

Palavras-chave: MEC, soluções fundamentais, flambagem

1. INTRODUÇÃO

Grande parte dos critérios de segurança em projetos de estruturas é baseada inicialmente em considerações de resistência e rigidez. Contudo, a estrutura pode se tornar insegura antes mesmo que os limites de resistência do material sejam atingidos devido à perda de estabilidade por flambagem. O problema da estabilidade de vigas tem sido desenvolvido utilizando soluções analíticas ou numéricas. Algumas dessas soluções foram publicadas em muitas obras tais como Wang et al. (2000), Karnovsky e Lebed (2000), Timoshenko e Gere (1961), Shaker (1975). Quando o problema de estabilidade é resolvido por técnicas numéricas, sua solução tem sido feita majoritariamente pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), por exemplo: Abbas e Thomas (1978), Yokoyama (1988), Chen et al. (2013), Banerjee (1998). No caso de análise de flambagem pelo MEC, tem-se o trabalho de Manolis et al. (1986) onde as representações integrais são estabelecidas utilizando o Método dos Resíduos Ponderados e as soluções fundamentais são explicitamente mostradas. Convém notar que no trabalho de Manolis et al. (1986) são discutidos sistemas algébricos do MEC associados apenas a problemas de barras contendo propriedades geométricas, de vínculo e carregamentos uniformes ao longo do domínio, o que inviabiliza a aplicação direta daquela formulação do MEC a problemas de flambagem de barras escalonadas, barras com apoios intermediários rígidos ou elásticos dispostos ao longo de seu vão, cargas adicionais axiais concentradas aplicadas em seções transversais no domínio.

Assim, no presente artigo o trabalho de Manolis et al. (1986) é revisitado, de forma que as equações integrais são deduzidas utilizando o Teorema da Reciprocidade de Betti por propiciar um acompanhamento físico dos desdobramentos das relações matemáticas. Além disso, soluções fundamentais mais simples são propostas com intuito de produzir termos das matrizes de influencia do sistema algébricos mais compactos. Finalmente, é utilizado o Método das Sub-regiões para viabilizar sistemas algébricos do MEC para acomodar análise de flambagem de barras com descontinuidades de domínio, tais como barras escalonadas e barras contínuas com apoios rígidos e/ou elásticos.

2. PROBLEMAS REAL E FUNDAMENTAL

A descrição matemática da estabilidade estática (flambagem) linear de barras utilizando o modelo de Euler-Bernoulli é baseada na admissão das seguintes hipóteses: barra prismática, material deve ser homogêneo, isotrópico, elástico-linear, conservação da planicidade das seções transversais e sua ortogonalidade ao eixo longitudinal deformado, e campos suaves de deslocamentos e deformações. Assim, de acordo com Manolis et al. (1986), a equação governante do problema real de flambagem de barra de Euler-Bernoulli é dada por:

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + P \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = p_z(x) \quad (1)$$

Onde

E é o módulo de elasticidade longitudinal; I , o momento de Inércia; P , a carga axial compressiva; $p_z(x)$, a carga transversal distribuída; e $w(x)$, o deslocamento transversal da barra.

Já o momento fletor e o esforço cortante são dados respectivamente por:

$$M_y(x) = -EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2}, \quad V_z(x) = -EI \frac{d^3 w(x)}{dx^3} - P \frac{dw(x)}{dx} \quad (2)$$

O problema fundamental está associado a uma barra de domínio infinito submetida a carga pontual transversal $p_z^*(x, \hat{x}) = \delta(x, \hat{x})$ atuando no ponto fonte $\hat{x}$. Ele herda as propriedades físicas e da geometria da seção transversal do problema real, de forma que a equação governante do problema fundamental é análoga a Eq.(1), resultando em:

$$\frac{d^4 w^*(x, \hat{x})}{dx^4} + \left(\frac{P}{EI} \right) \frac{d^2 w^*(x, \hat{x})}{dx^2} = \frac{p_z^*(x, \hat{x})}{EI} \quad (3)$$

E os respectivos esforços fundamentais, por analogia a Eq.(2), ficam:

$$M_y^*(x, \hat{x}) = -EI \frac{d^2 w^*(x, \hat{x})}{dx^2}, \quad V_z^*(x, \hat{x}) = -EI \frac{d^3 w^*(x, \hat{x})}{dx^3} - P \frac{dw^*(x, \hat{x})}{dx} \quad (4)$$

Diferentemente de Manolis et al. (1986), no presente artigo é proposta uma solução fundamental mais simples para Eq.(2), podendo ser escrita como:

$$w^*(x, \hat{x}) = -\frac{r}{2EIy_2} + \frac{1}{2EIy_2\sqrt{-y_2}} \text{sen}(\sqrt{-y_2}r) \quad (5)$$

Onde

$$y_2 = -\frac{P}{EI}$$

Outras soluções fundamentais de interesse na formulação do MEC podem ser obtidas a partir de Eq.(5), resultando em:

$$\begin{aligned} \frac{dw^*(x, \hat{x})}{dx} &= -\frac{1}{2EIy_2} [1 - \cos(\sqrt{-y_2}r)] \text{sgn}(x - \hat{x}), \quad V_z^*(x, \hat{x}) = \left[\frac{P}{2EIy_2} - \frac{EIy_2 + P}{2EIy_2} \cos(\sqrt{-y_2}r) \right] \text{sgn}(x - \hat{x}), \\ M_y^*(x, \hat{x}) &= \frac{1}{2y_2} \sqrt{-y_2} \text{sen}(\sqrt{-y_2}r), \quad w_{,x}^*(x, \hat{x}) = \frac{1}{2EIy_2} [1 - \cos(\sqrt{-y_2}r)] \text{sgn}(x - \hat{x}), \\ \frac{dw_{,x}^*(x, \hat{x})}{dx} &= \frac{1}{2EIy_2} \sqrt{-y_2} \text{sen}(\sqrt{-y_2}r), \quad M_{y,x}^*(x, \hat{x}) = -\frac{\text{sgn}(x - \hat{x})}{2} \cos(\sqrt{-y_2}r), \\ V_{z,x}^*(x, \hat{x}) &= -\left[\frac{EIy_2\sqrt{-y_2} + P\sqrt{-y_2}}{2EIy_2} \text{sen}(\sqrt{-y_2}r) \right] \end{aligned}$$

Onde $\text{sgn}(x - \hat{x})$ é a função sinal.

2.1. Equações Integral e Algébrica

Em Manolis et al.(1986), a equação integral do problema é estabelecida Método dos Resíduos Ponderados(MRP). Embora seja uma técnica eficiente, o MRP é um procedimento puramente matemático dificultando o acompanhamento dos desdobramentos das equações do ponto de vista do senso físico. Assim, neste artigo optou-se em desenvolver as

equações integrais para o problema de flambagem elástica da barra de Euler-Bernoulli utilizando-se o Teorema da reciprocidade de Betti, que retém a interpretação física no sequenciamento do equacionamento. No problema real devido à aplicação de ações externas campos de tensão σ_x e deformação ε_x são despertados axialmente na barra. Se for admitida uma fonte de força aplicada na direção z no problema fundamental, essa mobiliza tensões e deformações (σ_x^* , ε_x^*). Considerando a barra na posição deslocada, o Teorema Reciprocidade correlaciona os campos de deformações e tensões dos problemas reais e fundamentais pela seguinte relação:

$$\int_V \sigma_x \varepsilon_x^* dV - \int_L P \frac{dw}{dx} \frac{dw^*}{dx} dx = \int_V \sigma_x^* \varepsilon_x dV - \int_L P \frac{dw^*}{dx} \frac{dw}{dx} dx \quad (6)$$

A relação dada em (6) pode ainda ser escrita em função de momentos fletores (M, M^*) e curvaturas ($\frac{d^2w}{dx^2}, \frac{d^2w^*}{dx^2}$):

$$\int_L M \frac{d^2w^*}{dx^2} dx - \int_L P \frac{dw}{dx} \frac{dw^*}{dx} dx = \int_L M^* \frac{d^2w}{dx^2} dx - \int_L P \frac{dw^*}{dx} \frac{dw}{dx} dx \quad (7)$$

Após convenientes integrações sucessivas por partes e com o auxílio da propriedade de translação do delta de Dirac,

$$w(\hat{x}) + \left[V_z^*(x, \hat{x}) w(x) \right]_0^L - \left[M_y^*(x, \hat{x}) \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L = \left[V_z(x) w^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[M_y(x) \frac{dw^*(x, \hat{x})}{dx} \right]_0^L + \int_0^L p_z(x) w^*(x, \hat{x}) dx \quad (8)$$

Como o problema de vigas de Euler-Bernoulli requer duas incógnitas em cada extremidade, então uma equação adicional é necessária a fim de obter um problema solucionável. Portanto, esta equação adicional é desenvolvida derivando-se a Eq. (8) no ponto fonte, resultando na equação integral da inclinação da elástica transversal $\frac{dw(\hat{x})}{d\hat{x}}$:

$$\frac{dw(\hat{x})}{d\hat{x}} + \left[V_{z,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) w(x) \right]_0^L - \left[M_{y,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \frac{dw(x)}{dx} \right]_0^L = \left[V_z(x) w_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) \right]_0^L - \left[M_y(x) \frac{dw_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x})}{dx} \right]_0^L + \int_0^L p_z(x) w_{,\hat{x}}^*(x, \hat{x}) dx \quad (9)$$

A transição de equações integrais em equações algébricas é feita pela colocação dos pontos-fonte no contorno empregando-se as Eqs.(8) e (9), resultando em:

$$\{u\} + [\bar{H}] \{u\} = [G] \{p\} + \{f\} \quad (10)$$

Onde os vetores nodais de deslocamentos e esforços são dados por:

$$\{u\} = \left[w_i \quad \frac{dw_i}{dx} \quad w_j \quad \frac{dw_j}{dx} \right]^T, \quad \{p\} = \left[V_{zi} \quad M_{yi} \quad V_{zj} \quad M_{yj} \right]^T.$$

Já as matrizes de influência $[\bar{H}]$ e $[G]$ são explicitamente dadas por:

$$[\bar{H}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \alpha_3 & -\alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\alpha_3 & -\alpha_4 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad [G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_1 & -\beta_2 \\ 0 & 0 & -\beta_2 & -\beta_3 \\ -\beta_1 & -\beta_2 & 0 & 0 \\ -\beta_2 & -\beta_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Onde

$$\alpha_1 = \frac{P}{2EIy_2} - \frac{EIy_2 + P}{2EIy_2} \cos(\sqrt{-y_2}L), \quad \alpha_2 = \frac{\sqrt{-y_2}}{2y_2} \sin(\sqrt{-y_2}L),$$

$$\alpha_3 = -\left[\frac{EIy_2\sqrt{-y_2} + P\sqrt{-y_2}}{2EIy_2} \sin(\sqrt{-y_2}L) \right], \quad \alpha_4 = -\frac{\cos(\sqrt{-y_2}L)}{2},$$

$$\beta_1 = -\frac{L}{2EIy_2} + \frac{1}{2EIy_2\sqrt{-y_2}} \sin(\sqrt{-y_2}L), \quad \beta_2 = -\frac{1}{2EIy_2} [1 - \cos(\sqrt{-y_2}L)],$$

$$\beta_3 = \frac{1}{2EIy_2} [\sqrt{-y_2} \sin(\sqrt{-y_2}L)]$$

Quando a barra possui descontinuidades de domínio, a solução fundamental já não pode ser aplicada na barra como um todo, já ela é deduzida admitindo-se que as propriedades físicas, geométricas sejam contínuas no domínio. Assim, uma solução é dividir o domínio da viga em subdomínios nos quais as propriedades sejam contínuas. Então, equações algébricas são obtidas para cada um desses subdomínios. Aplicando-se condições de compatibilidade de deslocamentos e de equilíbrio nas interseções dos mesmos, um sistema algébrico global da estrutura pode ser montado e resolvido. Por uma questão de concisão, uma breve discussão será feita admitindo-se uma barra com duas regiões com propriedades distintas tendo o nó C submetido forças externas concentradas $\{F\}$, vide Fig. 1.

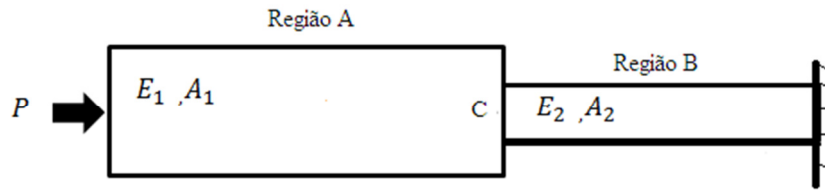


Figura 1. Barra com descontinuidades no domínio

Quando o sistema algébrico, dado pela Eq.(10), é escrito para região A fica:

$$\begin{bmatrix} [h_{11}] & [h_{12}] \\ [h_{21}] & [h_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_1\} \\ \{U_2\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [g_{11}] & [g_{12}] \\ [g_{21}] & [g_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_2\} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Já a Eq.(10) na região B, resulta em:

$$\begin{bmatrix} [H_{11}] & [H_{12}] \\ [H_{21}] & [H_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_3\} \\ \{U_4\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G_{11}] & [G_{12}] \\ [G_{21}] & [G_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P_3\} \\ \{P_4\} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Aplicando condições de compatibilidade de deslocamentos e de equilíbrio de forças no nó C, tem-se respectivamente que:

$$\{U_2\} = \{U_3\} \text{ e } \{P_2\} + \{P_3\} = \{F\} \quad (13)$$

Substituindo-se Eq.(13) nas Eqs.(11) e (12), o sistema algébrico final do problema pode ser obtido

$$\begin{bmatrix} [h_{11}] & [h_{12}] & [0] & [-g_{12}] & [0] \\ [h_{21}] & [h_{22}] & [0] & [-g_{22}] & [0] \\ [0] & [H_{11}] & [H_{21}] & [0] & [-G_{11}] \\ [0] & [H_{21}] & [H_{22}] & [0] & [-G_{21}] \\ [0] & [0] & [0] & [I] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_1\} \\ \{U_2\} \\ \{U_4\} \\ \{P_2\} \\ \{P_3\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [g_{11}] & [0] & [0] \\ [g_{21}] & [0] & [0] \\ [0] & [G_{12}] & [0] \\ [0] & [G_{22}] & [0] \\ [0] & [0] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P_1\} \\ \{P_4\} \\ \{F\} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

3. AVALIAÇÃO NUMÉRICA

Nesta seção são apresentados alguns exemplos numéricos para validação da formulação do MEC aqui proposta.

Exemplo 1. Cargas críticas de vigas com diversas condições de contorno

Seja uma viga de seção retangular de comprimento 10m, largura 0,12m e altura 1m. As propriedades do material utilizadas são: $E=13\text{Pa}$; $G=5\text{Pa}$ e $\nu=0,3$. Na Tab. 1 são mostradas respectivamente as cinco primeiras cargas críticas de flambagem para vigas de Euler-Bernoulli para diferentes condições de contorno. Os resultados obtidos com o MEC são comparados com as soluções analíticas exibidas na Tab..2 em função do modo de flambagem (n). As representações das condições de contorno são mostradas nas tabelas como Engastado-Engastado (E-E), Engastado-Livre (E-L), Engastado-Deslizante (E-D) e Apoiado-Apoiado (A-A)

Tabela 1 - Cargas críticas de flambagem P_c ($10^2 N$)

n	Euler-Bernoulli $L/h=10$							
	E-E		E-L		E-D		A -A	
	Exato	MEC	Exato	MEC	Exato	MEC	Exato	MEC
1	5,1321	5,1321	0,3207	0,3207	1,2830	1,2830	1,2830	1,2830
2	20,5287	20,5287	2,8868	2,8868	11,5474	11,5474	5,1321	5,1321
3	46,1897	46,1897	8,0190	8,0190	32,0762	32,0762	11,5474	11,5474
4	82,1151	82,1151	15,7173	15,7173	62,8693	62,8693	20,5287	20,5287
5	128,3048	128,3048	25,9817	25,9817	103,9269	103,9269	32,0762	32,0762

Tabela 2. Soluções analíticas de cargas críticas em função do modo de flambagem

	E-L	A-A	E -E	E-D
n	$\frac{\pi^2 EI (2n-1)^2}{4L^2}$	$\frac{\pi^2 EI n^2}{L^2}$	$\frac{4\pi^2 EI n^2}{L^2}$	$\frac{\pi^2 EI (2n-1)^2}{L^2}$

Convém notar que as respostas do MEC recuperam com sucesso os resultados analíticos, inclusive as cargas críticas dos modos de flambagem superiores..

Exemplo 2. Na Fig. 2 está mostrada uma viga de Euler-Bernoulli com apoio rígido intermediário. Considera-se uma coluna de rigidez à flexão EI , comprimento L e apoio intermediário em $\bar{x} = aL$. A barra é carregada na sua extremidade superior por uma força P . Na Tab. 3 são apresentados os resultados exatos Wang et al.(2000) e os do MEC para os parâmetros de flambagem com apoio intermediário rígido.

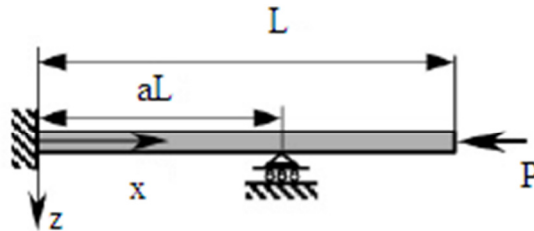


Figura 2. Barra em balanço com apoio no domínio

Tabela 3. Parâmetros ($\sqrt{B}$) para vigas de Euler com apoio elástico

		E -L	A-A	E-A	E-E
$a = 0.5$	Exato	2,0373	4,2258	5,1490	2,0312
	MEC	2,0372	4,2258	5,1489	2,0311
$a = 0.9$	Exato	3,7616	3,2582	4,6196	3,0889
	MEC	3,7616	3,2581	4,6196	3,0897

A partir da Tab. 3 pode-se notar uma excelente concordância das respostas do MEC com os resultados analíticos dados em Wang et al.(2000).

4. CONCLUSÕES

Neste trabalho a abordagem de Manolis et al.(1986) por elementos de contorno para problemas de flambagem elástica foi revisitada. Soluções fundamentais mais simples que as existentes para o modelo de Euler-Bernoulli propostas. O sistema algébrico do MEC também teve que ser readequado para acomodar análise de flambagem de barras com descontinuidades no domínio. Os resultados sugerem um bom desempenho e elegância da formulação aqui apresentada.

5. AGRADECIMENTOS

O primeiro autor agradece ao CNPq pelo aporte financeiro destinado ao desenvolvimento deste trabalho.

6. REFERÊNCIAS

- ABBAS, B. A. H. e THOMAS J., 1978. "Dynamic stability of Timoshenko beams resting on an elast foundation". *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 60, Nº 1, p. 33-44.
- BANERJEE, J. R., 1998. "Free vibration of axially loaded composite Timoshenko beams using the dynamic stiffness matrix method". *Computers and Structures*, Vol. 69, p. 197-208.
- CHEN, T., MA, HAITAO e GAO WEI., 2013. "A new approach to stability analysis of frame structures using trefftz-type elements". *Journal of Construcional Steel Research*, Vol. 82, Nº 2013, p. 153-163.
- HÖRMANDER, L., *Linear Partial Differential Operators*, Springer, Berlin, 1963.
- KARNOVSKY IGOR A., LEBED OLGA I., 2000. *Formulas for Structural Dynamics: Tables, Graphs, and Solutions*. New York. 1st edition.
- MANOLIS, G.D., BESKOS, D.E e PINEROS, MF., 1986. "Beam and plate stability by boundary elements". *Computers and Structures*, Vol. 22, Nº 22, p. 917-923.
- SHAKER, FRANCIS J., 1975. "Effect of axial load on mode shapes and frequencies of beams". Lewis research center, Report nº d-8109. Structural Members. CRC press, Boca Raton, 1st edition.
- TIMOSHENKO, S.P. e GERE, J.M., 1961., *Theory of Elastic Stability*. MecGraw-Hill, New York.
- WANG, C.M., WANG C.Y, REDDY J.N., 2000. *Exact Solutions for Buckling of Structural Members*. CRC Press
- YOKOYAMA, T., 1988. "Parametric instability of Timoshenko beams resting on an elastic foundation". *Pegamos Journals Ltd*, Vol. 28, Nº 2, p. 207-216.

7. RESPONSABILIDADE AUTURAL

O) autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho.

REVISITING A BOUNDARY ELEMENT FORMULATION FOR ELASTIC BUCKLING PROBLEMS OF BEAMS

J.S. Passos, jbs.mat@hotmail.com¹

C.A.T. Lucena, taurinolucena@gmail.com¹

A.V. Mendonça, mendonca@ct.ufpb.br¹

¹Universidade Federal da Paraíba, cidade universitária s/n-Castelo Branco III, João Pessoa-PB, 58051085

Abstract. In this article, a boundary element solution for determination of the elastic buckling loads based on Euler-Bernoulli model presented by G.D. Manolis, D.E Beskos and M.F. Pineros in 1986 is revisited. Differently from their BEM formulation, in this paper the following topics are discussed: a) deduction of the integral equations using Betti's reciprocal theorem, b) deduction of simpler fundamental solutions, resulting in an algebraic system with terms more concise, c) incorporation of domain discontinuities into the analysis such as abrupt changes of geometry (stepped beams) and intermediate elastic supports at beam domain. The numerical validation of this present formulation is done by presentation of examples, where the BEM results are compared with analytical solutions. The results show that this present BEM formulation is correct and elegant.

Keywords: BEM, fundamental solutions, buckling