

ANÁLISE DA CONVECÇÃO LAMINAR DE FLUIDOS NEWTONIANOS PARA DIFERENTES CONDIÇÕES NA ENTRADA TÉRMICA

P.G. Gonçalves, pedrogranville@gmail.com.br¹

D.L.A. Veloso, dhiego_vel@hotmail.com²

G.E. Assad, Gustavo.elia.assad@gmail.com³

F.A. Lima, fabioarsp@gmail.com⁴

F.A. Belo, franciscoantoniobelo@gmail.com⁵

C. A. C. Santos, e-mail⁶

^{1,2,3,4,5} Universidade Federal da Paraíba, Cidade Universitária - João Pessoa - PB - Brasil - CEP: 58051-900

Resumo: A transferência de calor por convecção forçada em um escoamento laminar na região de entrada térmica de um tubo circular é numericamente estudada neste trabalho. Considera-se o escoamento de fluidos Newtonianos com diferentes perfis de temperatura na entrada térmica. A equação da energia, que governa o problema, foi resolvida pela técnica da transformada integral generalizada (GITT), que se apresenta como um consagrado método para resolução de problemas de difusão de calor e massa. Os resultados apresentados em forma de gráficos permitem analisar a influência que as condições de entrada térmica exercem sobre o desenvolvimento do campo de temperatura.

Palavras-chave: Fluidos Newtonianos, Perfil de entrada térmica, campo de temperatura, GITT.

1. INTRODUÇÃO

Em diversos processos industriais, o escoamento de fluidos através de dutos representam uma classe de problemas de transferência de calor difuso-convectivo de amplo interesse na engenharia. No desenvolvimento de plantas e equipamentos industriais, dutos circulares são largamente utilizados. Tal estudo torna-se providencial para um melhor dimensionamento dos equipamentos, escolha de materiais adequados para as tubulações evitando a corrosão e estendendo a vida útil dos equipamentos. Desta forma, inúmeros trabalhos e investigações relacionados com esta classe de problemas já foram realizados e uma vasta documentação é encontrada na literatura (Abramowitz, 1953; Brown, 1960; Shah, 1975; Shih, 1978; Gottifredi, 1983 e Johnston 1994).

Na figura 1, podemos observar o problema físico a ser estudado que consiste no escoamento de um fluido Newtoniano na entrada térmica de um tubo circular submetido a uma condição de entrada para a temperatura que varia ao longo da direção radial. Geralmente no estudo do escoamento mencionado a literatura faz uso da condição de entrada com temperatura uniforme, o que muitas vezes em situações práticas representam casos ideais. O objetivo do presente artigo é apresentar a influência das condições de entrada térmica no desenvolvimento do campo de temperatura. Tomaremos cinco casos para serem analisados.

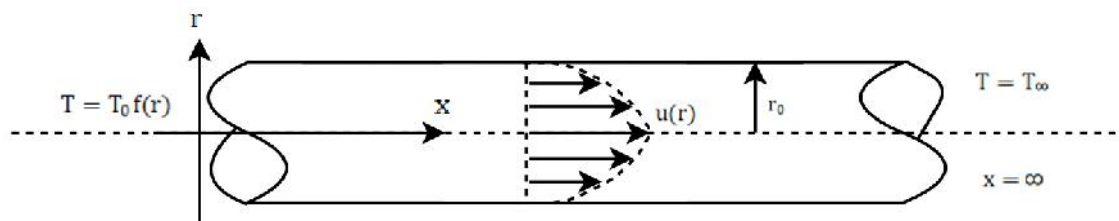


Figura 1: Ilustração do problema físico.

2. PROBLEMA FÍSICO E MODELO MATEMÁTICO

2.1 Considerações do modelo

Para simplificar o modelo hidrodinâmico foram adotadas as seguintes considerações:

-) Fluido Newtoniano;
-) Escoamento laminar, em regime permanente;
-) Fluido incompressível;

-) As propriedades físicas são consideradas constantes;
-) O perfil de velocidade é completamente desenvolvido na entrada térmica;
-) Os efeitos da dissipação viscosa não serão considerados;
-) Impermeabilidade e não-deslizamento nas paredes;
-) Desprezando as forças de corpo;
-) Sem geração de energia interna;
-) Desprezando a difusão axial do fluido.

2.2 Modelo matemático

Baseando-se nas suposições acima, a equação da energia toma a seguinte forma:

Equação da Energia.

$$\rho c_p u(r) \frac{\partial T(x, r)}{\partial x} = k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T(x, r)}{\partial r} \right) \right], 0 < r < r_0, x > 0 \quad (1)$$

Onde ρ é a massa específica, c_p é o calor específico com pressão constante e k é a condutividade térmica. O perfil de velocidade do escoamento laminar completamente desenvolvido de um fluido Newtoniano é $u(r)$, dado por:

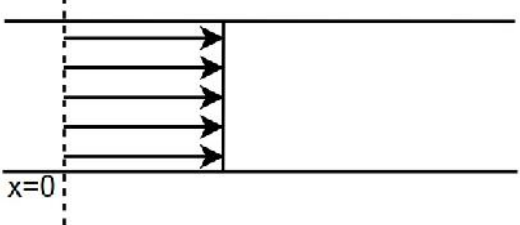
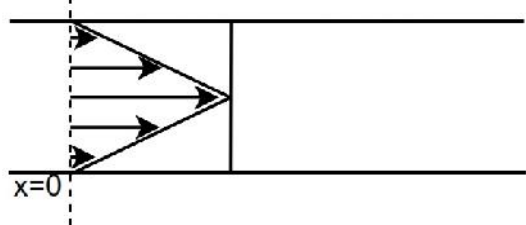
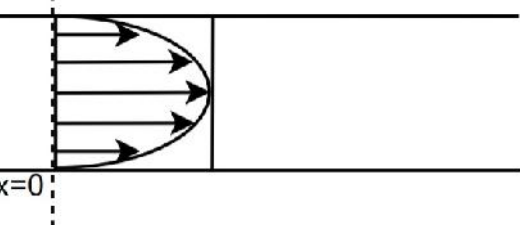
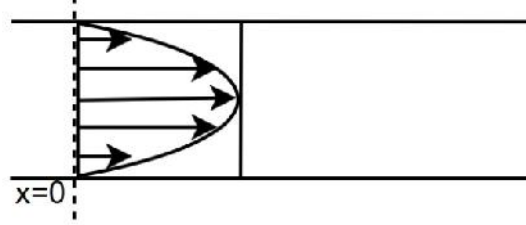
$$u(r) = 2u_m \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \quad (2)$$

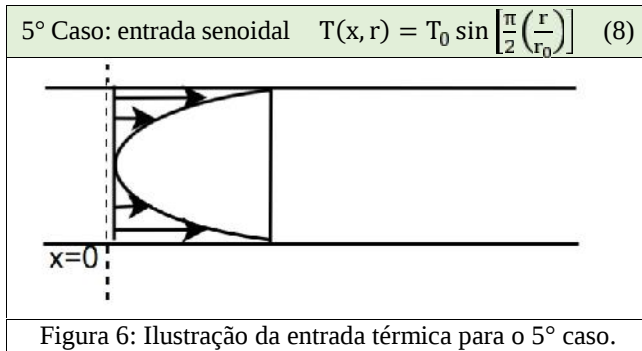
Sendo u_m a velocidade média do escoamento e r_0 o raio do tubo circular.

Condições de contorno.

$$\begin{cases} r = 0: \frac{\partial T(x, r)}{\partial r} = 0 \\ r = r_0: -k \frac{\partial T(x, r)}{\partial r} = h[T(x, r) - T_\infty] \end{cases} \quad (3a-b)$$

Condição de entrada ($x = 0$).

1° Caso: entrada uniforme $T(x, r) = T_0$ (4)	2° Caso: entrada linear $T(x, r) = T_0 \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right) \right]$ (5)
	
Figura 2: Ilustração da entrada térmica para o 1° caso.	Figura 3: Ilustração da entrada térmica para o 2° caso.
3° Caso: entrada quadrática $T(x, r) = T_0 \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]$ (6)	4° Caso: entrada cossenoidal $T(x, r) = T_0 \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{r}{r_0} \right) \right]$ (7)
	
Figura 4: Ilustração da entrada térmica para o 3° caso.	Figura 5: Ilustração da entrada térmica para o 4° caso.



Nas equações descritas T_0 representa a amplitude máxima da temperatura de entrada, e T_∞ representa a temperatura do ambiente.

2.2.1 Adimensionalização do problema

Os grupos adimensionais empregados nas equações acima são (Ghiaasiaan, 2011):

$$R = \frac{r}{r_0} ; \xi = \frac{x}{r_0 R \text{ Pr}} ; \theta(\xi, R) = \frac{T(x, r) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} ; \text{Bi} = \frac{hr_0}{k} ; \text{Re}_D = \frac{u_m D_h}{\nu} ; \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} ; u(R) = \frac{u(r)}{u_m} = 2(1 - R^2) \quad (9a-g)$$

Tal que, α é a difusividade térmica do fluido, ν é a viscosidade cinemática, $D_h = 2r_0$ é o diâmetro hidráulico e P , R_D e B são respectivamente os números de *Prandtl*, *Reynolds* e *Biot*.

Os parâmetros adimensionais foram aplicados nas equações (1), (3), (4), (5), (6), (7) e (8). Após a adimensionalização, a condição de contorno em $R = 1$ é não homogênea, devido a isso, foi introduzido um filtro matemático com o objetivo de torná-la homogênea. O filtro matemático utilizado foi:

$$\theta(\xi, R) = \theta^*(\xi, R) + \frac{T_\infty}{T_0} \quad (10)$$

Após a aplicação do filtro matemático descrito as equações adimensionalizadas tornaram-se:

Equação da energia adimensionalizada.

$$\frac{u(R)}{2} \frac{\partial \theta^*(\xi, R)}{\partial \xi} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \theta^*(\xi, R)}{\partial R} \right], 0 < R < 1, \xi > 0 \quad (11)$$

Condições de contorno adimensionalizadas.

$$\begin{cases} R = 0: \frac{\partial \theta^*(\xi, R)}{\partial R} = 0 \\ R = 1: \text{Bi} \theta^*(\xi, R) + \frac{\partial \theta^*(\xi, R)}{\partial R} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Condição de entrada adimensionalizada ($\xi = 0$).

1° Caso: entrada uniforme.	2° Caso: entrada linear.
$\theta^*(\xi, R) = 1 - \frac{T_\infty}{T_0}$ (13)	$\theta^*(\xi, R) = 1 - \frac{T_\infty}{T_0} - R$ (14)
3° Caso: entrada quadrática.	4° Caso: entrada cossenoidal.
$\theta^*(\xi, R) = 1 - \frac{T_\infty}{T_0} - R^2$ (15)	$\theta^*(\xi, R) = \cos\left(\frac{\pi}{2} R\right) - \frac{T_\infty}{T_0}$ (16)
5° Caso: entrada senoidal.	
$\theta^*(\xi, R) = \sin\left(\frac{\pi}{2} R\right) - \frac{T_\infty}{T_0}$ (17)	

2.2.2 Problema auxiliar de autovalor na direção radial

O problema auxiliar para o campo de temperatura, pelo fato do problema original ser descrito por um sistema de equações diferenciais de segunda ordem, representa um problema clássico de Sturm-Liouville. O problema auxiliar escolhido para a determinação do campo de temperatura é escrito da seguinte forma:

$$\frac{d}{d} \left[R \frac{d\psi(R)}{d} \right] + \mu_i^2 R u(R) \psi(R) = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial \psi(R)}{\partial R} = 0 \quad ; \quad R = 0 \quad (19)$$

$$Bi \psi[(R)] + \frac{d\psi(R)}{d} = 0 \quad ; \quad R = 1 \quad (20)$$

O método da contagem de sinal desenvolvido por (Mikhailov e Vulchanov, 1983) foi utilizado para a determinação dos autovalores (μ_i), das autofunções, $\psi(R)$, e das normas (N_i).

2.2.3 Transformação integral do campo de temperatura

O par transformada-inversa é dado por:

$$\bar{\theta}_i(\xi) = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 R u(R) \psi(R) \theta^*(\xi, R) dR \rightarrow \text{Transformada} \quad (21)$$

$$\theta^*(\xi, R) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_i^{1/2}} \bar{\theta}_i(\xi) \bar{\psi}_i(R) \rightarrow \text{Inversa} \quad (22)$$

Após tratamento analítico da equação (13) por operadores integrais, usando a definição da transformada integral, dada pela equação (23), bem como usando o problema auxiliar definido pelas equações (20), (21) e (22), pode-se transformar o problema original no seguinte sistema de EDO's:

$$\frac{1}{2} \frac{d\bar{\theta}_i(\xi)}{d\xi} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(\xi) = 0 \quad (23)$$

Esta EDO possui solução clássica dada por:

$$\bar{\theta}_i(\xi) = \bar{\theta}_i(0) e^{-2\mu_i^2 \xi} \quad (24)$$

Tal que:

$$\bar{\theta}_i(0) = -\frac{1}{\mu_i^2 N_i^2} \frac{\partial \psi_i(\mu_i, 1)}{\partial R} = f_i \quad (25)$$

2.2.3 Cálculo do campo de temperatura

Usando as equações (24) e (12), verifica-se que o campo de temperatura para região de entrada térmica assume a forma:

$$\theta(\xi, R) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\psi_i(\mu_i, R) f_i e^{-2\mu_i^2 \xi}}{N_i^{1/2}} + \frac{T_{\infty}}{T_0} \quad (26)$$

3. RESULTADOS

O modelo matemático foi resolvido por meio de código computacional escrito em linguagem de programação FORTRAN para obtenção dos resultados. Foram usados 200 autovalores e 200 autofunções correspondentes para análise da convergência dos resultados. Para todos os casos analisados considera-se $\frac{T_{\infty}}{T_0} \rightarrow 0$, ou seja, que a amplitude máxima da temperatura de entrada é muito maior que a temperatura ambiente, fazendo com que o fluido tenha um comportamento térmico de resfriamento.

3.1 Efeito do perfil de entrada térmica

Nas figuras que seguem pode-se observar o efeito que o perfil de entrada térmico exerce sobre o desenvolvimento do campo de temperatura e da camada limite térmica.

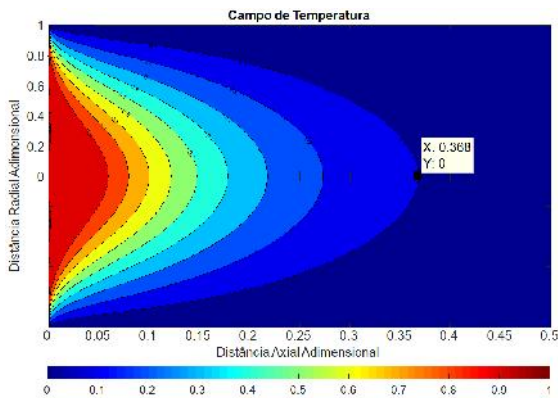


Figura 7: Campo de temperatura com entrada uniforme e $Bi = \infty$.

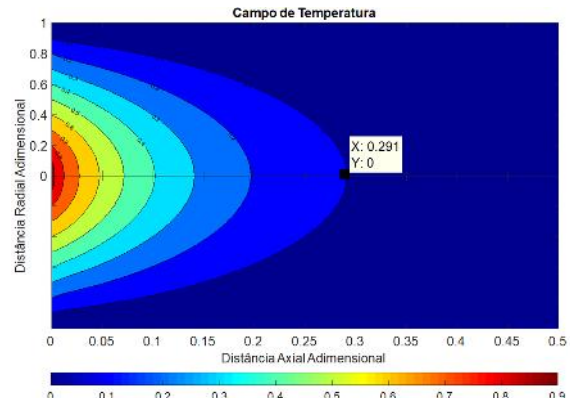


Figura 8: Campo de temperatura com entrada linear e $Bi = \infty$.

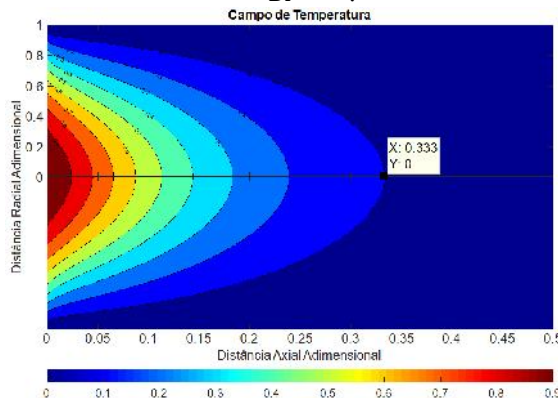


Figura 9: Campo de temperatura com entrada quadrática e $Bi = \infty$.

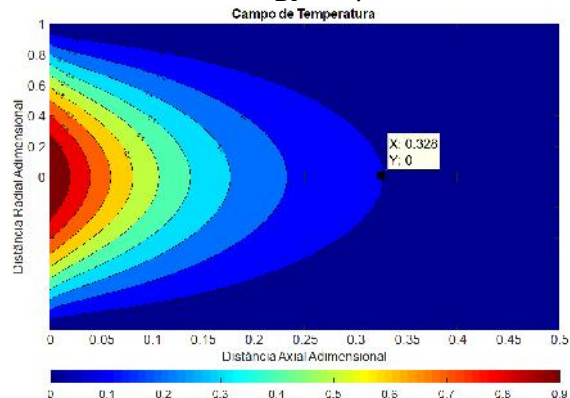


Figura 10: Campo de temperatura com entrada cossenoidal e $Bi = \infty$.

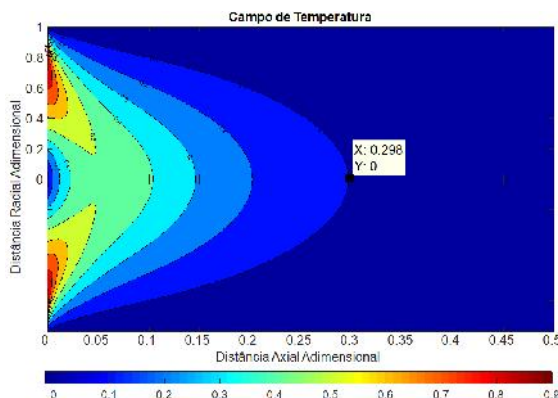


Figura 11: Campo de temperatura com entrada senoidal e $Bi = \infty$.

A evolução no campo de temperatura para cada perfil de entrada térmica pode ser observada através do desenvolvimento no eixo axial. Os gráficos representados nas figuras (7-11) analisam o caso em que a temperatura é constante na parede do tubo ($Bi = \infty$) e mostram que para cada perfil de entrada térmico apresentado corresponde um comprimento de desenvolvimento térmico diferente. Para os casos apresentados nas figuras acima observou-se um comprimento axial de desenvolvimento térmico igual a 0,368, 0,291, 0,333, 0,328 e 0,298 correspondentes as entradas: uniforme, linear, quadrática, cossenoidal e senoidal, respectivamente. Observa-se também diferentes desenvolvimentos para o campo de temperatura nos casos estudados, chamando atenção para o último caso que teve comportamento bem diferente devido ao comportamento da função seno.

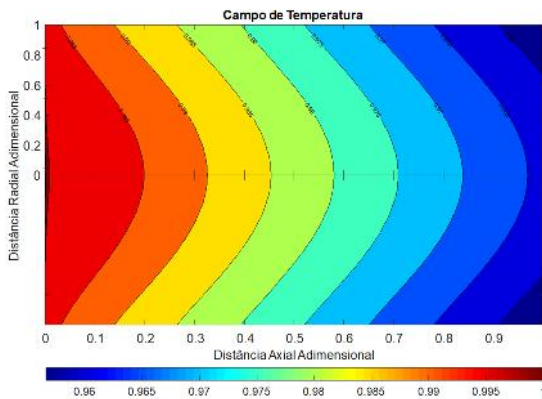


Figura 12: Campo de temperatura com entrada uniforme e $Bi = 0$.

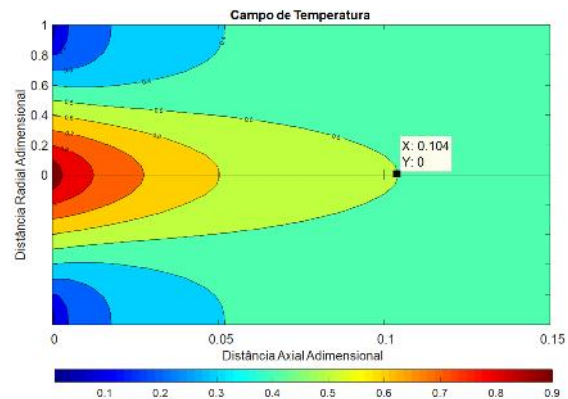


Figura 13: Campo de temperatura com entrada linear e $Bi = 0$.

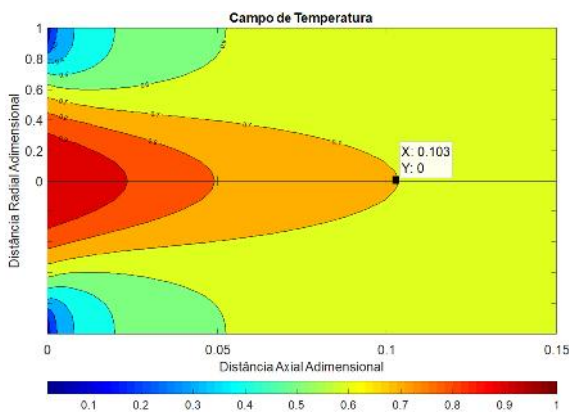


Figura 14: Campo de temperatura com entrada quadrática e $Bi = 0$.

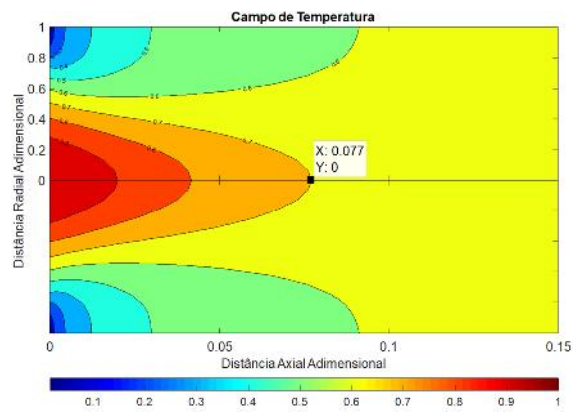


Figura 15: Campo de temperatura com entrada cossenoidal e $Bi = 0$.

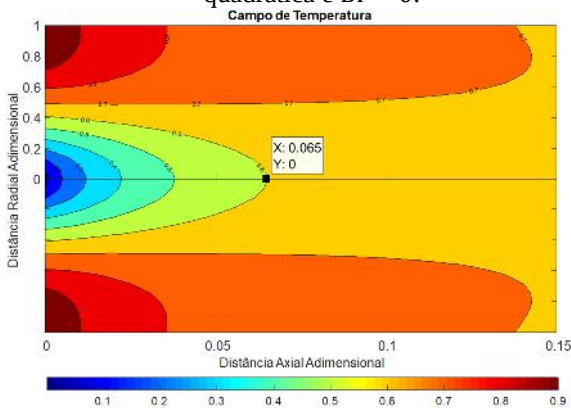


Figura 16: Campo de temperatura com entrada senoidal e $Bi = 0$.

Nas figuras de (12-16) analisamos a caso em que a parede do tubo é adiabática ($Bi = 0$) para os diferentes perfis de entrada térmica. Como nesta situação o fluido não troca calor com o meio, existe uma troca de calor entre partes do fluido com temperaturas distintas tendendo a preservar um valor médio de temperatura conforme ele se desenvolve. Na figura 12 o perfil de entrada térmica é uniforme e o mesmo tende a se manter ao longo da distância axial. Nas figuras (13-15), o fluido tem temperatura máxima no centro e mínima nas paredes do tubo, verifica-se que a temperatura se estabiliza entre 0,4 e 0,5 para o caso de entrada linear e entre 0,6 e 0,7 para os casos de entrada quadrática e cossenoidal. Na figura 16, o fluido tem temperatura máxima nas paredes e mínima no centro do tubo em conformidade com o perfil senoidal, observa-se também que a temperatura se estabiliza entre 0,6 e 0,7 da distância axial.

3.2 Efeito do Biot

O número de *Biot* (Bi) é um parâmetro adimensional que quantifica a relação entre o coeficiente de transferência convectiva de calor na superfície do sólido e a condutividade térmica do sólido por unidade de comprimento característico (dependente da geometria do sólido). Para $B \rightarrow 0$ temos a condição de paredes adiabáticas, para $B \rightarrow \infty$ temos a condição de temperatura prescrita na parede e para $0 < Biot < \infty$ considera-se troca de calor entre o fluido e o meio. A

influência do *Biot* sobre o desenvolvimento do campo de temperatura foi analisada para cada perfil de entrada térmica considerada. Através das figuras (17-36) podemos verificar essa dependência.

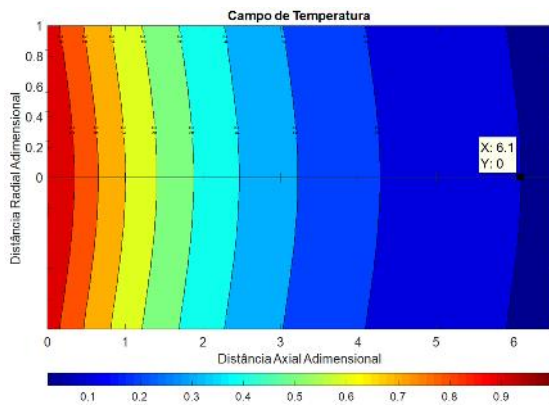


Figura 17: Campo de temperatura com entrada uniforme e $Bi = 0,1$.

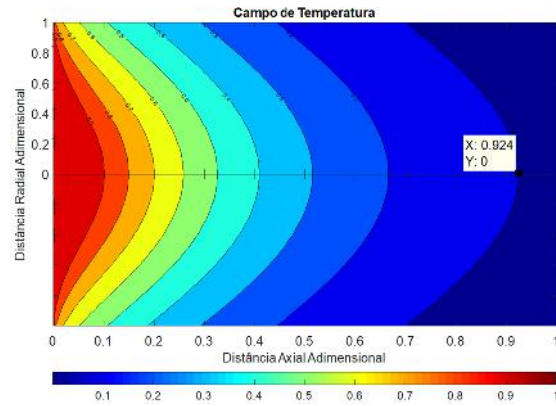


Figura 18: Campo de temperatura com entrada uniforme e $Bi = 1$.

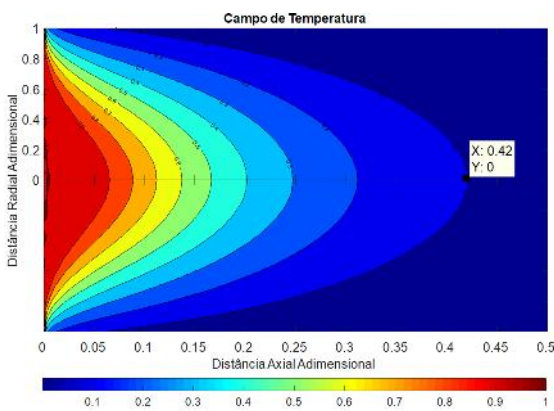


Figura 19: Campo de temperatura com entrada uniforme e $Bi = 10$.

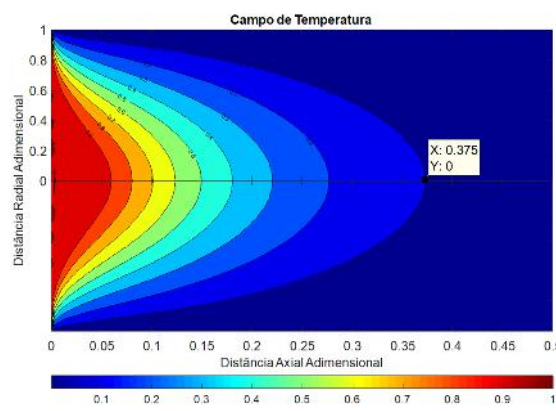


Figura 20: Campo de temperatura com entrada uniforme e $Bi = 100$.

Pode-se verificar nas figuras (17-20), que tratam do perfil de entrada térmica uniforme, que a medida que o *Biot* aumenta o comprimento de entrada térmica diminui. Esse comportamento também pode ser observado para os outros perfis de entrada térmica ilustrados nas figuras a seguir.

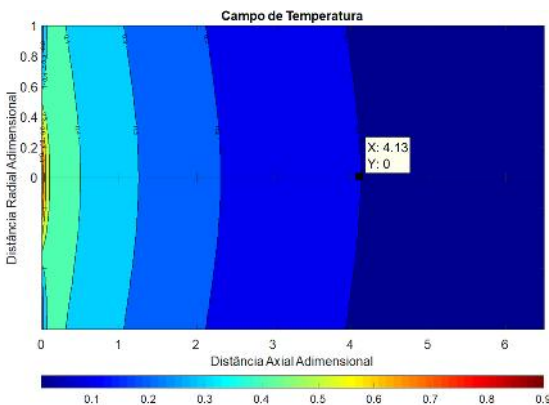


Figura 21: Campo de temperatura com entrada linear e $Bi = 0,1$.

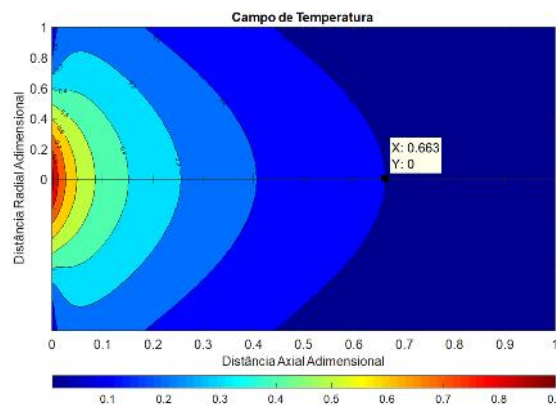


Figura 22: Campo de temperatura com entrada linear e $Bi = 1$.

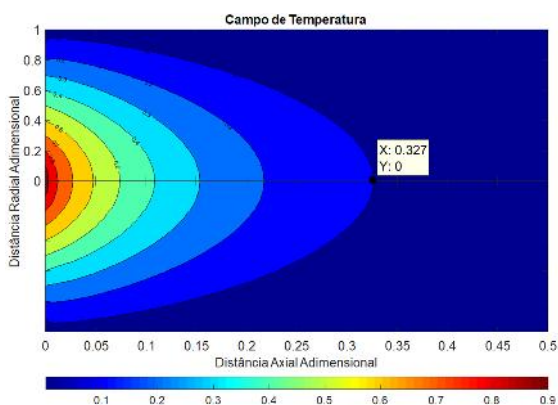


Figura 23: Campo de temperatura com entrada linear e $Bi = 10$.

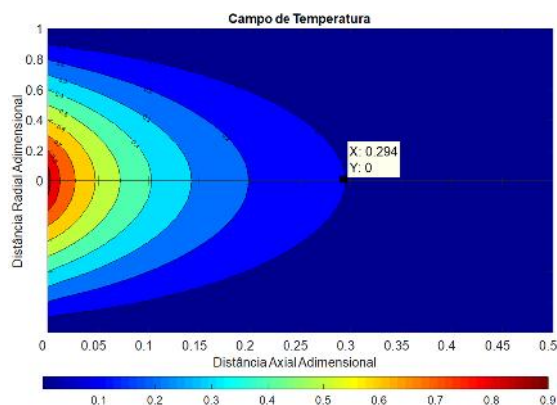


Figura 24: Campo de temperatura com entrada linear e $Bi = 100$.

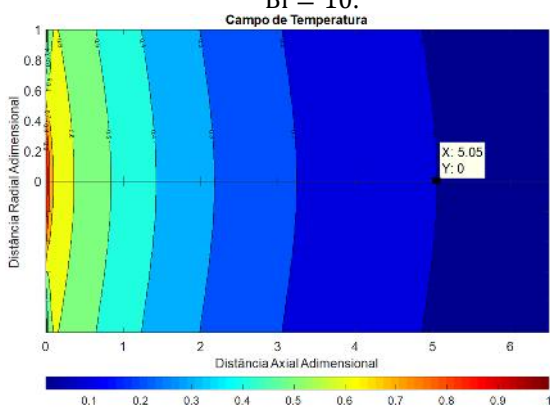


Figura 25: Campo de temperatura com entrada quadrática e $Bi = 0,1$.

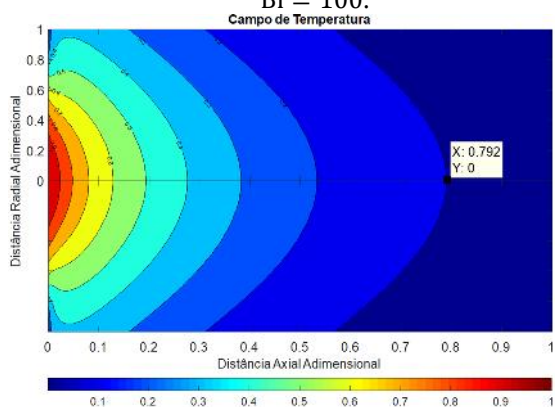


Figura 26: Campo de temperatura com entrada quadrática e $Bi = 1$.

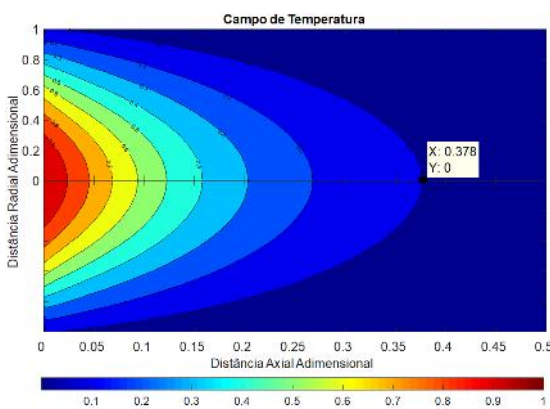


Figura 27: Campo de temperatura com entrada quadrática e $Bi = 10$.

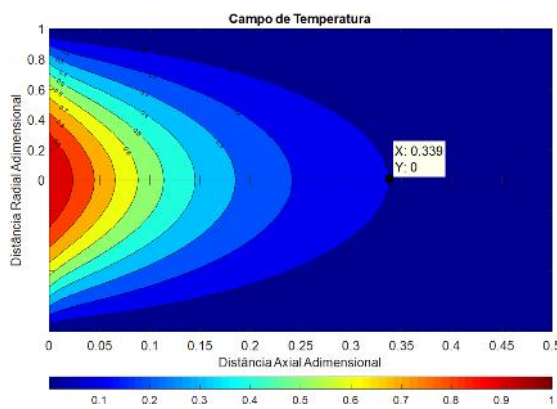


Figura 28: Campo de temperatura com entrada quadrática e $Bi = 100$.

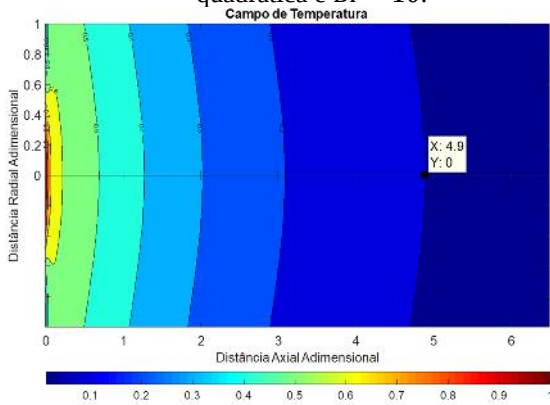


Figura 29: Campo de temperatura com entrada cossenoidal e $Bi = 0,1$.

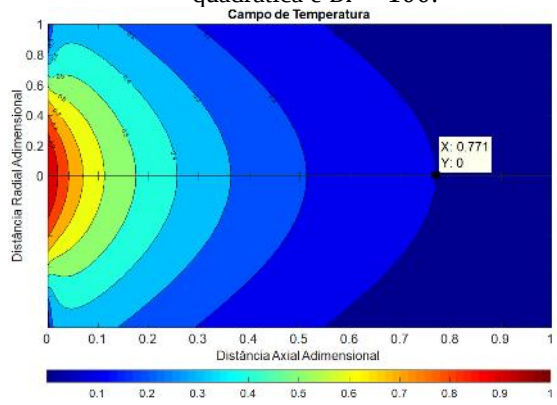


Figura 30: Campo de temperatura com entrada cossenoidal e $Bi = 1$.

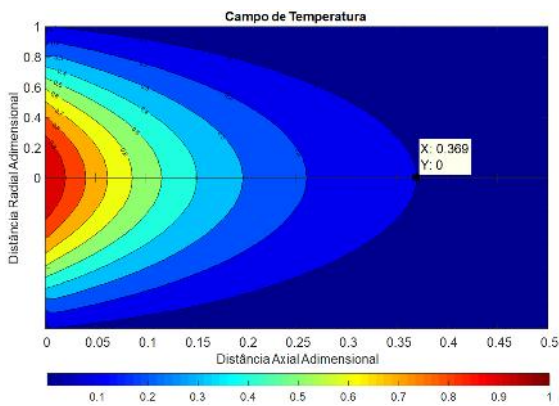


Figura 31: Campo de temperatura com entrada cossenoidal e $Bi = 10$.

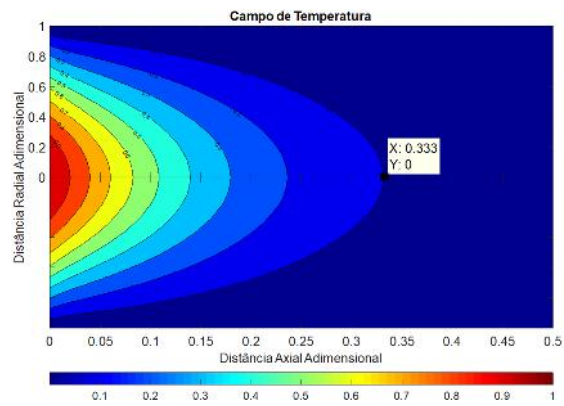


Figura 32: Campo de temperatura com entrada cossenoidal e $Bi = 100$.

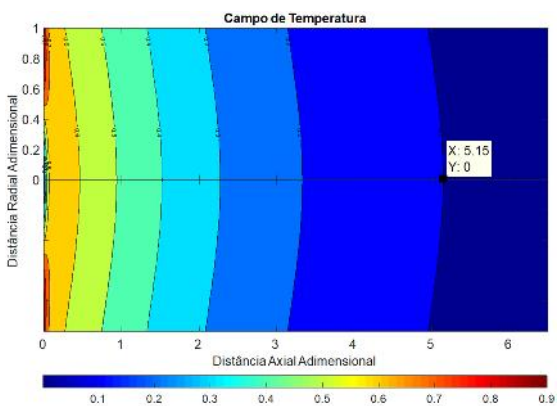


Figura 33: Campo de temperatura com entrada senoidal e $Bi = 0,1$.

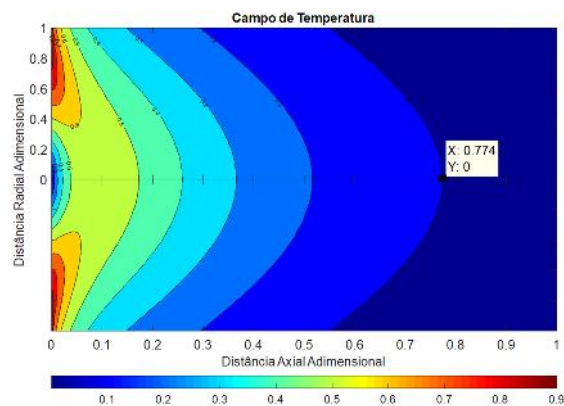


Figura 34: Campo de temperatura com entrada senoidal e $Bi = 1$.

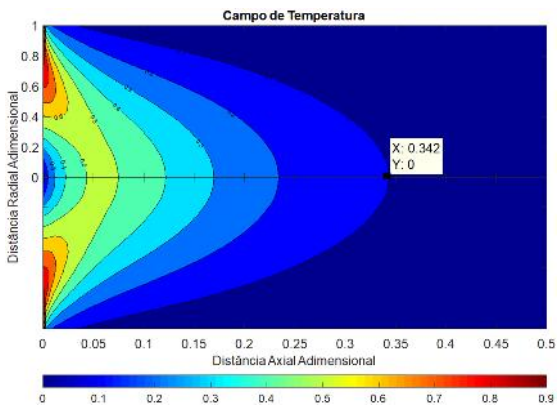


Figura 35: Campo de temperatura com entrada senoidal e $Bi = 10$.

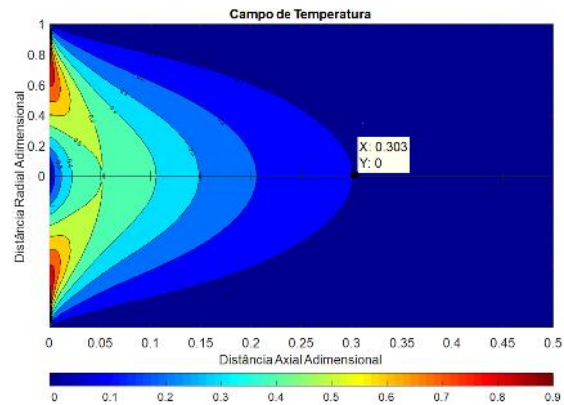


Figura 36: Campo de temperatura com entrada senoidal e $Bi = 100$.

Para todos os casos analisados verificamos que na situação de entrada térmica com perfil uniforme, independente do número de *Biot*, sempre encontramos comprimentos axiais de desenvolvimento térmico maiores, enquanto que, na situação com perfil de entrada térmica linear, independente do número de *Biot*, encontramos sempre menores comprimentos de entrada térmica.

4. CONCLUSÃO

Através dos resultados percebe-se que o perfil de entrada térmica para temperatura faz com que o campo de temperatura tenha desenvolvimentos diferentes. A influência pôde ser observa nas figuras através do comprimento do desenvolvimento térmico, obtendo o maior valor para entrada com perfil uniforme de temperatura e o menor valor para entrada com perfil térmico linear, para todos os casos analisados. Esta investigação se mostra relevante em casos em que a condição de entrada térmica é essencial em procedimentos experimentais.

5. REFERÊNCIAS

- Abramowitz, M., 1953, "On the Solution of Differential Equation Occurring in the Problem of Heat Convection Laminar Flow Through a Tube", J. Math. And Physics, Vol.32, pp. 184-187.
- Brown, G.M., 1960, "Heat or Mass Transfer in a Fluid in Laminar Flow in a Circular or Flat Conduit", A.Ich.E. Journal, Vol. 6, pp. 179-183.
- Çengel, Y.; Ghajar, 2012, A. Transferência de Calor. 4ª ed. Porto Alegre - RS: Mc Graw Hill.
- Cotta, R., 1993, Integral Transform in Computational Heat and Fluid Flows, 1ª Edição ed. Flórida: CRC Press, Inc.
- Ghiaasiaan, S. M., 2011, Convective Heat and Mass Transfer. 1ª ed. Los Angeles: Cambridge University Press.
- Gottifredi, J.C., Quiroga, O.D. and Floree, A.F., 1983, Heat transfer to Newtonian and non-Newtonian fluids flowing in a laminar regime, Int. J. Heat Mass Transfer 26 (8), 1215-1220.
- Kakaç, S. and Yener, Y., 1995, Convective Heat Transfer, CRC Press, Inc., Florida, EUA.
- Lipkis, R.P., 1954, Heat Transfer to an Incompressible Fluid in Laminar Motion, M.Sc. Thesis, University of California, Los Angeles.
- Johnston, P.R., 1994, A Solution Method for the Graetz Problem for Non-Newtonian Fluids with Dirichlet and Neumann Boundary Conditions, Mathl. Compvt. Modelling Vol. 19, No. 2, pp. 1-19.
- Mikhailov, M. D.; and Vulchanov, N. L. 1983; "Computational procedure for Sturm-Liouville problems", Journal of computational Physics, v. 5, 323-336.
- Nusselt, W., 1910, "Die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Rohrlänge", Z. Ver. Deut. Ing., Vol. 54, pp. 1154-1158.
- Shah, R.K., 1975, Thermal entry length solutions for the circular tube and parallel plates. Proc. Natl. Heat Mass Transfer Conf., 3rd, Indian Inst. Technol., Bombay, Vol. I, Pap. No. HMT-11-75.
- Sellers, J.R., Tribus, M. And Klein, J.S., 1956, "Heat Transfer to Laminar Flow in a Round Tube or Flat Conduit – The Graetz Problem Extended", Trans. ASME, Vol. 78, pp. 441-448.
- Silva, J. F., 2016, Método não invasivo de determinação da camada limite térmica em escoamento em duto e sua aplicação em controle de processo. Tese de Doutorado, UFPB, João Pessoa.
- Shih, Y.P. and Tsou J.D., 1978, Extended Leveque solutions for heat transfer to power-law fluids in laminar flow in a pipe, Chem. Eng. J. 15, 55-62.

ANALYSIS OF NEWTONIAN FLUID LAMINAR CONVECTION FOR DIFFERENT THERMAL ENTRY CONDITIONS

P.G. Gonçalves, pedrogranville@gmail.com.br¹

D.L.A. Veloso, dhiego_vel@hotmail.com²

G.E. Assad, Gustavo.elia.assad@gmail.com³

F.A. Lima, fabioarsp@gmail.com⁴

F.A. Belo, franciscoantonioabelo@gmail.com⁵

C. A. C. Santos, e-mail⁶

^{1,2,3,4,5} Federal University of Paraíba, Cidade Universitária - João Pessoa - PB - Brasil - CEP: 58051-900

Abstract: The heat transfer by forced convection in a laminar flow in the thermal input region of a circular tube is numerically studied in this work. It is considered the flow of Newtonian fluids with different temperature profiles at the thermal input. The energy equation, which governs the problem, was solved by the generalized integral transform (GITT) technique, which presents itself as a well-established method for solving problems of heat and mass diffusion. The results presented in the form of graphs allow to analyze the influence that the thermal input conditions exert on the development of the temperature field.

keywords: Newtonian fluids, Thermal input profile, temperature field, GITT.