

ANÁLISE DA CONVECÇÃO FORÇADA LAMINAR DE FLUIDOS NÃO-NEWTONIANOS EM DUTOS RETANGULARES.

G.E. Assad, gustavo.elia.assad@gmail.com¹

J.A. DE LIMA, jalima@cear.ufpb.br²

C.A.C. SANTOS, carloscabralsantos@yahoo.com.br³

F. A. DE LIMA, fabioarsp@gmail.com⁴

D. L. DE A. VELOSO, dhiego_vel@hotmail.com⁵

P. G. GONÇALVES, pedrogranville@gmail.com⁶

^{1,3,4,5,6} UFPB-PPGEM, Cidade Universitária, s/n - Castelo Branco III, João Pessoa - PB, CEP: 58051-085

² UFPB-CEAR, Cidade Universitária - João Pessoa - PB - Brasil - CEP: 58051-970, Caixa Postal 5115

Resumo: o presente trabalho visa analisar a convecção forçada laminar de fluidos não newtonianos no interior de um canal de placas planas e paralelas, usando o perfil de velocidade no modelo lei de potência. A solução da equação da energia será dada fazendo-se uso da Técnica da Transformada Integral Generalizada (sigla em português: T.T.I.G.), cujo problema auxiliar é resolvido usando o método da contagem de sinal. É mostrado a influência do número de Biot e do índice lei de potência sobre o campo de temperatura, sobre o número de Nusselt local e médio. Os resultados serão apresentados em tabelas e gráficos que serão comparados com a literatura clássica.

Palavras-chave: convecção forçada, fluidos não newtonianos, T.T.I.G., Nusselt, Biot.

1. INTRODUÇÃO

Problemas de transferência de calor em que o perfil de temperatura está em desenvolvimento, acompanhado de um perfil de velocidade, também, em desenvolvimento ou completamente desenvolvido, com distribuição de temperatura uniforme na entrada do canal e que não há fluxo de calor nessa região, iniciando-se a transmissão de calor em regiões posteriores, são chamados de problemas de entrada. O presente trabalho aborda o problema da convecção forçada, em um canal de placas paralelas, usando o perfil de velocidade no modelo de lei de potência, aplicado a fluidos não newtonianos, observando a influência da reologia do fluido sobre o desenvolvimento da camada limite térmica, além de observar a influência do número de Biot sobre esta camada e sobre o número de Nusselt local e médio.

Os fluidos não newtonianos têm viscosidade variável em resposta à tensão aplicada a ele, têm uma não linearidade intrínseca. Como ilustração pode-se citar suspensões de sólidos em líquidos, polímeros, emulsões, materiais em processamento com propriedades visco-elástico, borrachas, plásticos, fibras sintéticas, petróleo, detergente e sabão, fluidos biológicos e farmacêuticos, alimentos, operações no campo de óleos e de tintas. A necessidade crescente da formulação de modelos e de métodos de cálculo capazes de auxiliar o estudo destes materiais levou a uma evolução na teoria da dinâmica dos fluidos, desenvolvendo assim uma análise para os fluidos com comportamento dinâmico diferenciado (VERONESE *et al.*, 2012).

Dentre as metodologias que mantêm um caráter analítico na obtenção das soluções das equações governantes, pelo menos parcialmente, está o método conhecido como Técnica da Transformada Integral Generalizada – T.T.I.G. (COTTA, 1993; COTTA, 1998; SANTOS *et al.*, 2001; ASSAD *et al.*, 2016 e LIMA *et al.*, 2007). A T.T.I.G. é uma técnica híbrida, numérico-analítica, que vem sendo desenvolvida de forma paralela aos métodos puramente numéricos, e que mantêm, na sua aplicação, todas as características de uma solução analítica, como o método de separação de variáveis, associada, por outro lado, à robustez dos métodos puramente numéricos para soluções de sistemas de equações diferenciais ordinárias. O problema de autovalor auxiliar para a aplicação da T.T.I.G., no presente trabalho, é resolvido fazendo uso do método da contagem de sinal.

2. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Considere a região de entrada térmica para o escoamento de um fluido não newtoniano entre as duas paredes paralelas separadas por uma distância $2d$, conforme mostra o esquema da Figura 1 que apresenta, concomitantemente,

condições de contorno que consideram a simetria do perfil e a troca de calor entre o fluido e o meio, cuja temperatura é T_∞ .

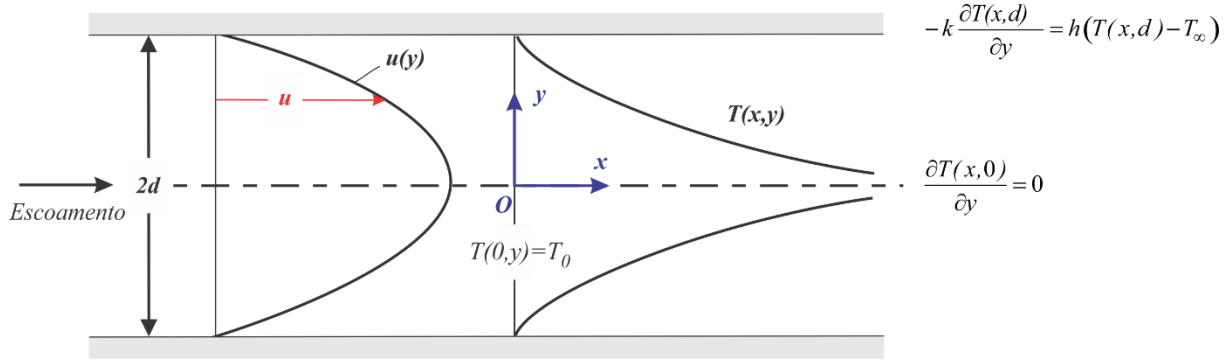


Figura 1: Região de entrada térmica em um canal de placas planas paralelas.

As seguintes hipóteses simplificadoras são consideradas na análise do problema:

- O escoamento é bidimensional, incompressível, laminar e permanente. O interesse concentra-se no plano de simetria do canal (plano x-y);
- As propriedades físicas são consideradas constantes e o perfil de velocidade é completamente desenvolvido na entrada térmica;
- Não serão considerados: efeitos da dissipação viscosa, forças de corpo, geração de energia interna e difusão axial;
- Utilizar-se-á a condição de não-deslizamento nas paredes que são impermeáveis.

Levando-se em conta as considerações apresentadas, a equação da energia, que rege o problema físico proposto, assume a forma:

$$\rho c_p u(y) \frac{\partial T(x,y)}{\partial x} = k \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2}, \quad (1)$$

com condições de contorno e de entrada são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{cases} \text{Em } y=0: \frac{\partial T(x,0)}{\partial y} = 0 \\ \text{Em } y=d: -k \frac{\partial T(x,d)}{\partial y} = h(T(x,d) - T_\infty) \\ \text{Em } x=0: T(0,y) = T_0 \end{cases} \quad (2 \text{ a,b,c})$$

À guisa de informação, o perfil de velocidade depende, reologicamente, do tipo de fluido a ser estudado e, no presente trabalho, adotaremos a seguinte equação em lei de potência para o perfil:

$$u(y) = \frac{(1+2n)}{1+n} U_m \left[1 - \left(\frac{y}{d} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right], \quad (3)$$

onde n é o expoente lei de potência para o perfil de velocidade. Isto posto, se $n=1$, o fluido é newtoniano, se $n>1$, o fluido é dilatante e se $n<1$, o fluido é pseudoplástico. Esta relação é ratificada por Tsai & Özisik (1989).

Para o processo de adimensionalização, tomar-se-ão os seguintes grupos adimensionais:

$$\begin{aligned} \Theta(\xi, \eta) &= \frac{T(x,y) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} & Re &= \frac{U_m D_h}{\nu} = \frac{4U_m d}{\nu} & \eta &= \frac{y}{d} \\ \xi &= \frac{4 \left(\frac{x}{d} \right)}{Re Pr} & u(\eta) &= \frac{u(y)}{U_m} & Pr &= \frac{\nu}{\alpha} \end{aligned} \quad (4 \text{ a-f})$$

Nestes grupos, U_m denota a velocidade média do escoamento na entrada do canal. Para a física estudada, Re é o número de Reynolds, Pr é o número de Prandtl, D_h é o diâmetro hidráulico do canal ($D_h=4d$), $2d$ é a altura do canal, ν é a viscosidade cinemática do fluido, T_∞ é a temperatura ambiente e T_0 é a temperatura na entrada no canal.

Considerando, ainda, que a difusividade térmica é $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$, a equação da energia (Eq. (1)) pode ser reescrita na seguinte forma adimensional:

$$u(\eta) \frac{\partial \Theta(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, \eta)}{\partial \eta^2}. \quad (5)$$

As condições de contorno e de entrada são então, respectivamente, escritas por:

$$\begin{cases} Em \ \eta = 0: \frac{\partial \Theta(\xi, 0)}{\partial \eta} = 0 \\ Em \ \eta = 1: \frac{\partial \Theta(\xi, 1)}{\partial \eta} + Bi \Theta(\xi, 1) = 0 \\ Em \ \xi = 0: \Theta(0, \eta) = 1 \end{cases} \quad (6 \text{ a,b,c})$$

Na equação (6b), Bi representa o número de Biot, $Bi = \frac{hd}{k}$. Se faz mister observar que para Biot tendendo a infinito temos a condição de contorno do primeiro tipo, onde a temperatura da parede é especificada. Quando o número de Biot tende a zero, a condição de contorno é do segundo tipo, onde o fluxo é especificado na parede. Para Biot entre zero e infinito, a condição de contorno é do terceiro tipo, onde leva-se em conta a troca de calor entre o fluido e meio. Não obstante, o perfil de velocidade adimensionalizado é:

$$u(\eta) = \frac{(1+2n)}{1+n} \left(1 - \eta^{\frac{n+1}{n}} \right), \quad (7)$$

3. METODOLOGIA DE SOLUÇÃO

3.1. Problema auxiliar de autovalor

Para proceder com a transformação integral do problema escolhe-se o seguinte problema auxiliar:

$$\frac{d^2 \psi(\eta)}{d\eta^2} + \mu_i^2 u(\eta) \psi(\eta) = 0, \quad (8)$$

com condições de contorno e de entrada, respectivamente, definidas por:

$$\begin{cases} Em \ \eta = 0: \frac{\partial \psi(0)}{\partial \eta} = 0 \\ Em \ \eta = 1: \frac{\partial \psi(1)}{\partial \eta} + Bi \psi(1) = 0 \end{cases} \quad (9 \text{ a-c})$$

O problema do autovalor anterior foi investigado, em detalhes, por vários pesquisadores: Prins *et al.* (1956) apresentaram uma solução em série e conseguiram encontrar numericamente três primeiros autovalores e autofunções. Sellars *et al.* (1956) determinou os autovalores mais altos e obteve fórmulas assintóticas para as autofunções usando técnica de expansão assintótica combinada. Posteriormente, Mengüç (1980) desenvolveu uma solução de série modificada a partir da qual todos os autovalores e autofunções podem ser determinados numericamente em um computador. A solução, aqui apresentada, desenvolveu-se sob o lastro da contagem de sinal, tendo por base o trabalho de Mikhailov & Vulchanov (1983).

3.2. Par transformada integral

Prosseguindo na metodologia, o par transformada integral/inversa é, então, definido como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Theta}_i(\xi) = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 u(\eta) \psi(\eta) \Theta(\xi, \eta) d\eta \quad \text{transformada integral} \\ \Theta(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\bar{\Theta}_i(\xi) \psi_i(\eta)}{N_i^{1/2}} \quad \text{inversa} \end{array} \right. \quad (10 \text{ a-b})$$

Assim, após aplicação de operadores integrais e fazendo uso do problema auxiliar supracitado, verifica-se que a equação (5) tem como solução:

$$\Theta(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \psi_i(\eta) e^{-\mu_i^2 \xi}, \quad (11)$$

com C_i sendo um coeficiente resultante da transformação integral dado por:

$$C_i = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 u(\eta) \psi(\eta) d\eta. \quad (12)$$

3.2. Cálculo do número de Nusselt local e médio

Usando a Eq. (11), o número de Nusselt local pode ser obtido por:

$$Nu(\xi) = -4 \frac{\frac{\partial \Theta(\xi, 1)}{\partial \eta}}{\Theta_m(\xi) - \Theta_w(\xi)}. \quad (13)$$

Nesta equação, a temperatura média adimensional e a temperatura adimensional na parede podem ser, respectivamente, calculadas através das expressões:

$$\Theta_m(\xi) = \frac{\int_0^1 u(\eta) \Theta(\xi, \eta) d\eta}{\int_0^1 u(\eta) d\eta}, \quad (14)$$

$$\theta_w(\xi) = \theta(\xi, 1). \quad (15)$$

O número de Nusselt médio é dado por:

$$Nu_m(\xi) = \frac{1}{\xi} \int_0^\xi Nu(\xi') d\xi'. \quad (16)$$

Após a integração da equação da energia, demonstra-se, para o caso em que a temperatura é especificada na parede, que:

$$Nu_m(\xi) = \frac{-4}{\xi} \ln(\Theta_m(\xi)). \quad (17)$$

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1. Validação dos resultados

Para início de validação de resultados, apresentam-se em sequência as Tabelas (1) e (2) que comparam os resultados aqui obtidos, para a temperatura média adimensional, o número de Nusselt local e o número de Nusselt médio associado a um número de Biot muito elevado ($Bi \rightarrow \infty$) e índice de lei de potência igual a 1 ($n=1$), com os apresentados por Norris e Streid (1940) e Shah (1975). O equacionamento proposto pelas referências susomencionadas, para um

escoamento laminar com transferência de calor em um canal de placas paralelas com temperatura de parede constante, são, segundo Norris e Streid (1940),

$$Nu_m(x) = 1.85 \left(\frac{x/D_H}{Pe} \right)^{-\frac{1}{3}}, \quad \xi'' = \frac{x/D_H}{Pe} < 0.014 \quad (18)$$

e segundo Shah (1975),

$$Nu_m(x) = \begin{cases} 1.849(\xi'')^{-\frac{1}{3}}, & \xi'' = \frac{x/D_H}{Pe} \leq 0.0005 \\ 1.849(\xi'')^{-\frac{1}{3}} + 0.6, & 0.0005 < \xi'' = \frac{x/D_H}{Pe} \leq 0.006, \\ 7.541 + \frac{0.0235}{\xi''}, & \xi'' = \frac{x/D_H}{Pe} > 0.006 \end{cases} \quad (19a-c)$$

onde D_H é o diâmetro hidráulico, já citado nos grupos adimensionais. Tal equacionamento também pode ser encontrado em Kakaç *et al.* (2014). Ressalte-se, ainda, que os resultados abaixo são comparados ajustando-se os valores obtidos através de uma razão entre os parâmetros adimensionais observados nas equações (4d) e (18), $\frac{\xi}{\xi''} = 16$. Observa-se, na Tabela (1), que os resultados apresentados no presente trabalho têm excelente aproximação com os resultados experimentais obtidos por Norris e Streid (1940) e Shah (1975), com diferença relativa percentual por um valor máximo de 0.92%. Espera-se que esta diferença cresça ao longo do canal, reiterado pelo limite de aplicação do resultado mostrado na Eq. (18).

Tabela 1: comparação do número de Nusselt médio com o trabalho de Norris e Streid para um número de Biot muito elevado ($Bi \rightarrow \infty$) e índice de lei de potência igual a 1 ($n=1$).

Comparação do número de Nusselt Médio			
$\xi = \frac{4x}{d Pe}$	Norris and Streid (N_{NS})	Presente Trabalho (N_{PT})	$\frac{ N_{NS} - N_{PT} }{N_{NS}} \times 100\%$
0.00200	37.00000	36.90452	0.26
0.00400	29.36692	29.36178	0.02
0.00600	25.65437	25.71213	0.22
0.00800	23.30854	23.41644	0.46
0.01000	21.63773	21.78815	0.69
0.01200	20.36188	20.54967	0.92

Para fins de *benchmarking* os resultados do presente trabalho também foram confrontados com Shah (1975), mostrando a robustez e a eficácia da T.T.I.G.. A Tabela 2, mostra a comparação com coincidência entre os resultados do presente trabalho e a referência anterior para valores da temperatura média, número de Nusselt local e número de Nusselt médio.

Tabla 2: comparação da temperatura média adimensional, do número de Nusselt local e do número de Nusselt médio, com o trabalho de Shah (1975), associado a um número de Biot muito elevado ($Bi \rightarrow \infty$) e índice de lei de potência igual a 1 ($n=1$)

$\xi = \frac{4 \left(\frac{x}{d} \right)}{Re Pr}$	Temperatura Média adimensional		Número de Nusselt Local		Número de Nusselt Médio	
	Shah (1975)	Presente Trabalho	Shah (1975)	Presente Trabalho	Shah (1975)	Presente Trabalho
0.016	0.92774	0.92774	12.822	12.82173	18.752	18.75215
0.032	0.88604	0.88604	10.545	10.54481	15.125	15.12462
0.048	0.85137	0.85137	9.5132	9.51325	13.409	13.40860
0.064	0.82065	0.82065	8.9100	8.90998	12.354	12.35352
0.080	0.79258	0.79258	8.5166	8.51664	11.623	11.62291

0.096	0.76648	0.76648	8.2456	8.24558	11.081	11.08128
0.112	0.74191	0.74191	8.0532	8.05322	10.662	10.66168
0.128	0.71860	0.71860	7.9146	7.91461	10.326	10.32649
0.144	0.69636	0.69636	7.8139	7.81392	10.053	10.05262
0.160	0.67503	0.67503	7.7405	7.74050	9.8249	9.82489
1.600	0.04459	0.04459	7.5407	7.54070	7.7755	7.77551
3.200	0.00218	0.00218	7.5407	7.54070	7.6581	7.65811

A Tabela 3 a seguir confronta os resultados obtidos por Chalhub (2011) e o presente trabalho em diferentes posições ao longo do canal. A referência citada usa Método de Volumes Finitos (FVM, sigla do nome em inglês) e a TTIG para a solução do problema mas a sua formulação difere do presente trabalho pois não inclui perfil de velocidade no problema auxiliar. Isto não afeta a concordância numérica com o presente trabalho.

Tabela 3: comparação do número de Nusselt local com o trabalho de Chalhub (2011), associado a um número de Biot muito elevado ($Bi \rightarrow \infty$) e diferentes índices de lei de potência.

ξ n	$\xi = 0.002$			$\xi = 0.02$			$\xi = 0.2$			$\xi = 2$		
	FVM Chalhub (2011)	TTIG Chalhub (2011)	Presente Trabalho	FVM Chalhub (2011)	TTIG Chalhub (2011)	Presente Trabalho	FVM Chalhub (2011)	TTIG Chalhub (2011)	Presente Trabalho	FVM Chalhub (2011)	TTIG Chalhub (2011)	Presente Trabalho
$n=0.5$	26.8448	26.8453	26.8448	12.9082	12.9082	12.9082	8.04903	8.04903	8.04903	7.93976	7.93976	7.93976
$n=1.0$	24.6882	24.6885	24.6882	12.0145	12.0145	12.0145	7.63215	7.63215	7.63215	7.54070	7.54070	7.54070
$n=2.0$	23.3941	23.3943	23.3941	11.4618	11.4618	11.4618	7.35890	7.35890	7.35890	7.27790	7.27790	7.27790
$n=10$	22.2101	22.2103	22.2101	10.9469	10.9469	10.9469	7.09586	7.09586	7.09586	7.02415	7.02415	7.02415
$n=50$	21.9535	21.9537	21.9535	10.8343	10.8343	10.8343	7.03742	7.03742	7.03742	6.96769	6.96769	6.96769

4.2. Efeito do índice lei de potência

Neste subitem discutir-se-á a influência do índice lei de potência sobre o campo de temperatura e sobre os números de Nusselt local e médio. A Figura (2) mostra a evolução do número de Nusselt local e médio, com $Bi \rightarrow \infty$, para os diversos comportamentos reológicos sugeridos (variações do índice da lei de potência). Observa-se que os fluidos dilatantes ($n=4$), apresentam os menores números de Nusselt e que os valores locais são sempre inferiores aos valores médios, para cada posição ao longo do canal. Para pontos muito distantes da entrada do canal, os números de Nusselt convergem, cada um, para um único valor constante (a saber: $Nu_{médio}(1) = 7.47$ e $Nu_{local}(1) = 7.12$, valores observados para $n=4$). Nota-se, ainda, que o número de Nusselt local converge mais rapidamente que o número de Nusselt médio.

As Figuras (3 – 5) mostram o desenvolvimento do campo térmico, com comprimento de entrada térmica, para $Bi \rightarrow \infty$ para os três casos do índice da lei potência avaliados. Observando o comprimento de entrada térmica, vê-se que o campo térmico se desenvolve mais rapidamente para números fluidos dilatantes ($n=0.25$), onde o número de Nusselt é maior e, em cada ponto do comprimento de entrada térmica, a temperatura no centro do canal é menor para este tipo de fluido.

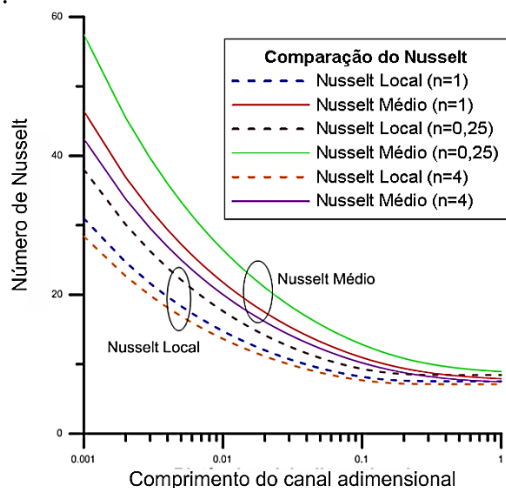


Figura 2: variações do número de Nusselt, local e médio, para fluidos newtonianos ($n=1$), dilatantes ($n>1$) e pseudoplásticos ($n<1$), com $Bi \rightarrow \infty$.

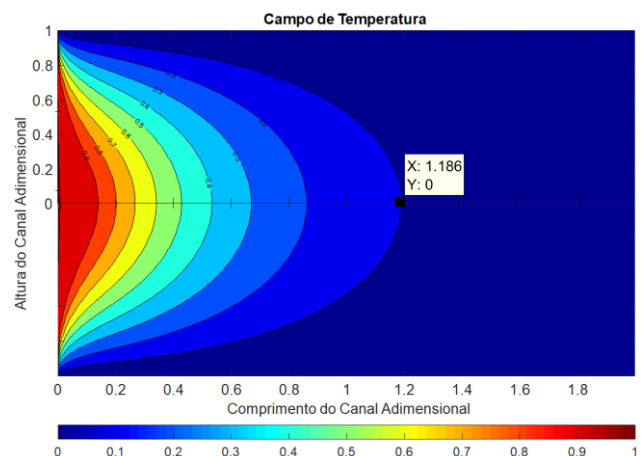


Figura 3: Campo térmico para $n=0,25$, mostrando o seu comprimento de desenvolvimento térmico.

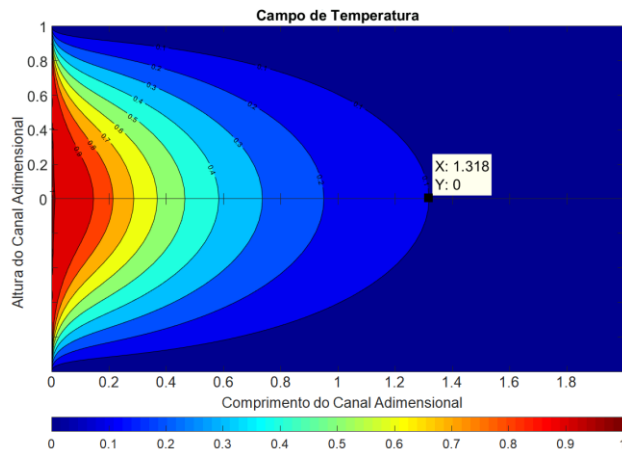


Figura 4: Campo térmico para $n=1$, mostrando o seu comprimento de desenvolvimento térmico

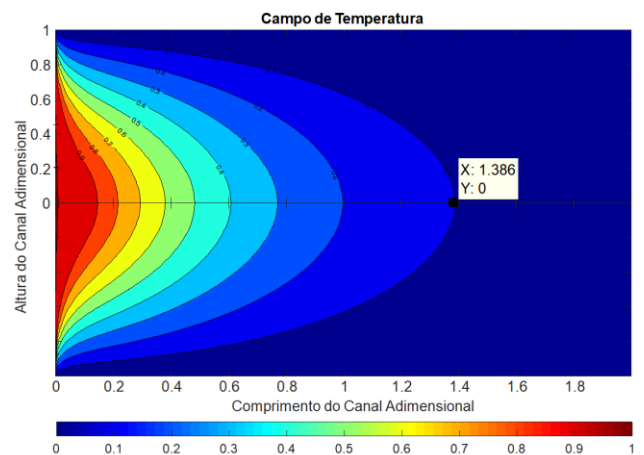


Figura 5: Campo térmico para $n=4$, mostrando o seu comprimento de desenvolvimento térmico.

4.3. Efeito do número de Biot

Neste ponto, o escopo volta-se para a influência do número de Biot sobre o desenvolvimento do campo de temperatura para três índices lei de potência distintos ($n=0.25$, $n=1$ e $n=4$) representando, respectivamente, fluidos pseudoplásticos, newtonianos e dilatantes. Para cada índice, o número de Biot assumirá valores discretos ($Bi=0.1$, 1 , 10 e 100). Em todas as figuras a seguir estão mostrados os valores dos comprimentos de desenvolvimento térmico (X) no eixo do canal.

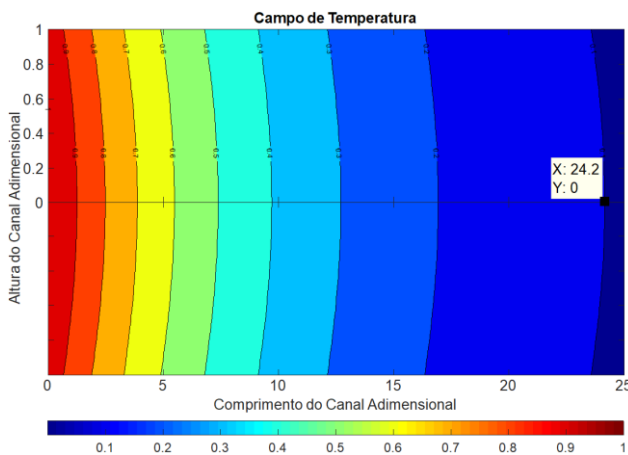


Figura 6: $n=0.25$, $Bi=0.1$

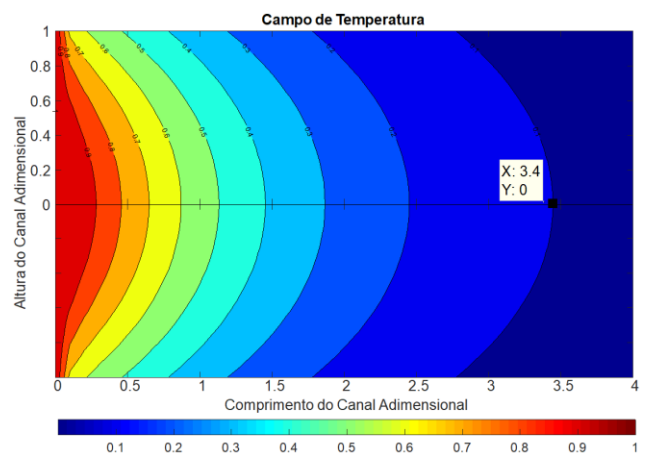


Figura 7: $n=0.25$, $Bi=1$

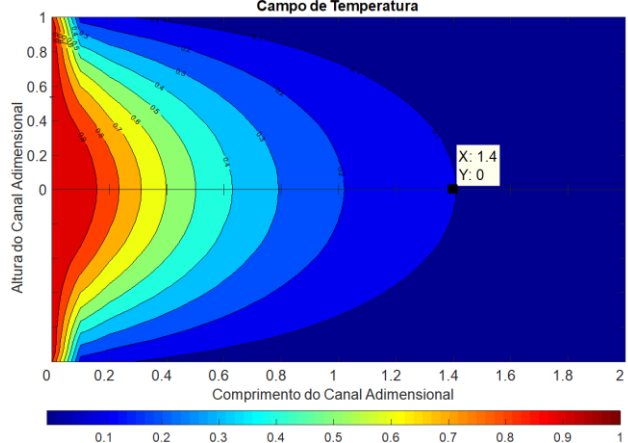


Figura 8: $n=0.25$, $Bi=10$

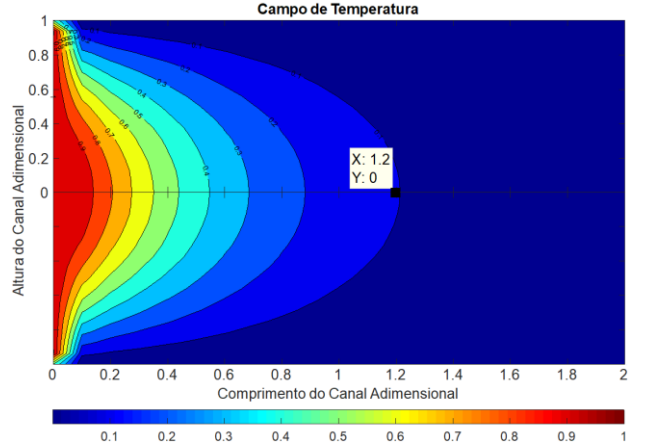
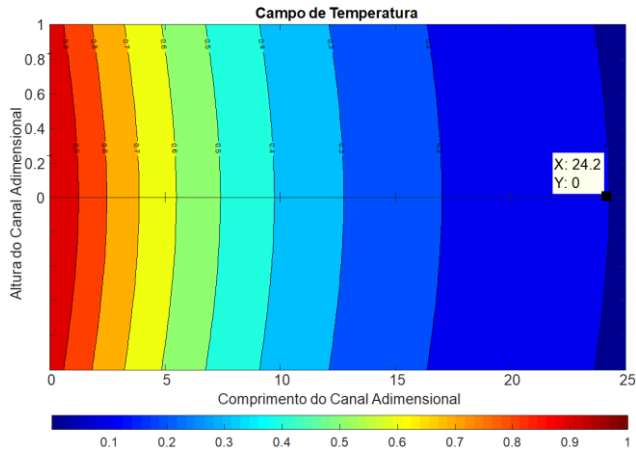
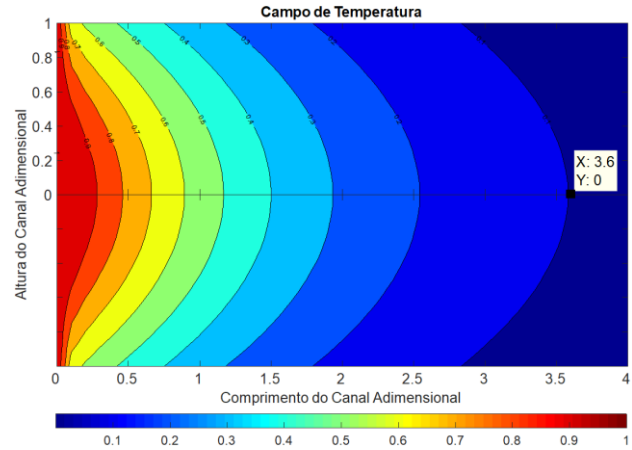
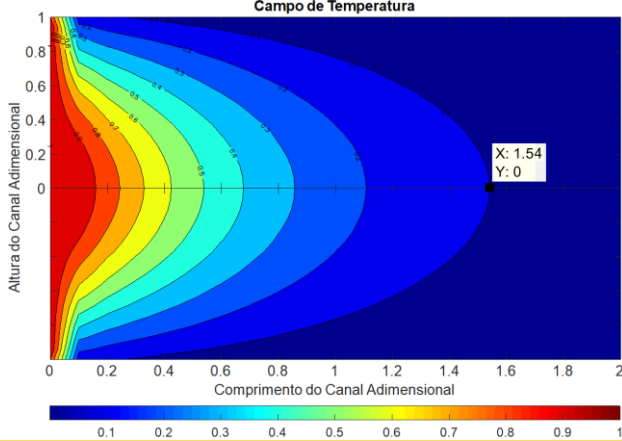
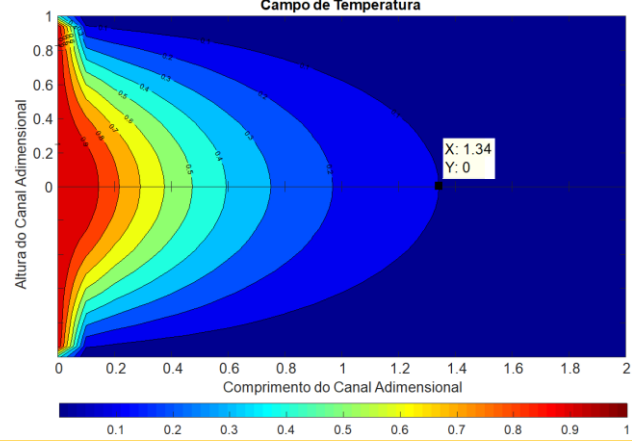


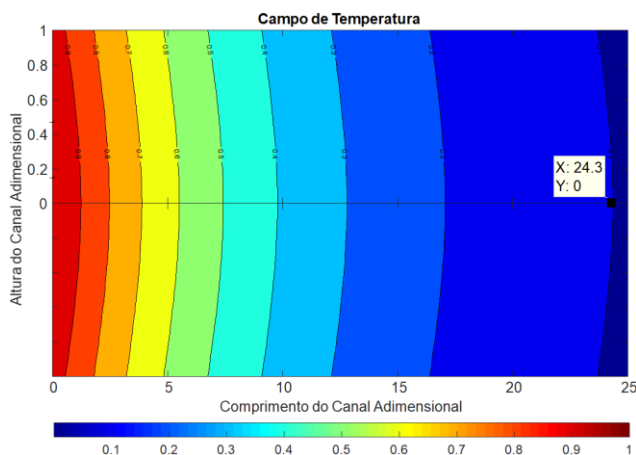
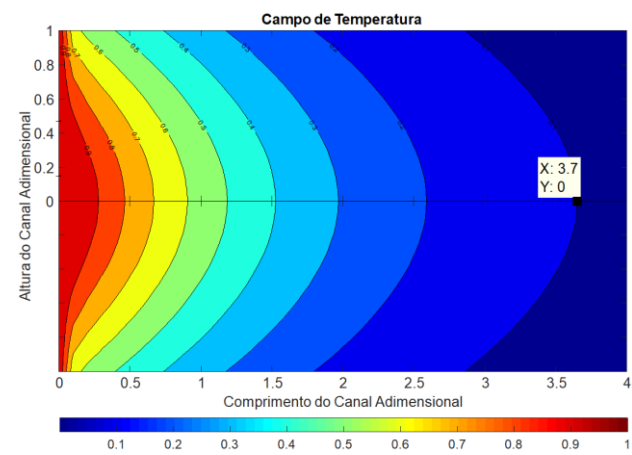
Figura 9: $n=0.25$, $Bi=100$

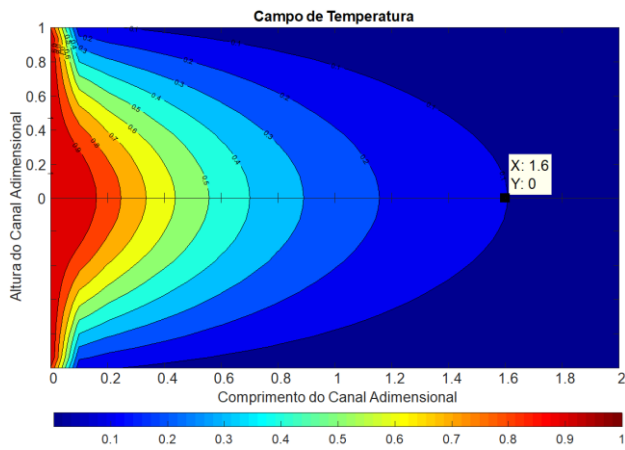
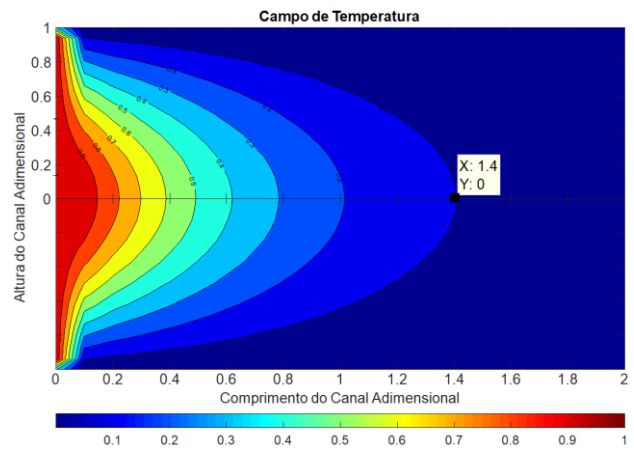
As Figuras (6-9) mostram o desenvolvimento do campo de temperatura com entrada uniforme para fluidos pseudoplásticos ($n=0.25$) e com o número de Biot variando discretamente de 0.1 a 100, onde, o número de Biot é um parâmetro adimensional que representa uma razão entre trocas de calor convectivas, entre a superfície de um sólido (as paredes do canal) e o fluido que o envolve, e trocas de calor por condução internas ao sólido. Desta forma, quando $Bi \rightarrow 0$ (Fig. 6), desconsideramos trocas convectivas entre a parede e o fluido envolvente (paredes adiabáticas) e o fluxo de calor por condução é especificado na parede. O perfil de temperatura é representado por isótermas com baixa curvatura e está

distribuição de temperatura torna-se aproximadamente uma função somente de x , aproximando-se de uma solução unidimensional. A Figura 9, já apresenta uma situação em que $Bi=100$ e a convecção torna-se mais evidente entre as paredes e o meio, o que torna a temperatura prescrita nas paredes ($T(x,1)=T_\infty$), excetuando-se pequenas variações na entrada do canal. Observa-se ainda que, aumentando-se o número de Biot, o comprimento de desenvolvimento térmico se torna menor, sendo $X=24.2$ para $Bi=0.1$ e $X=1.2$ para $Bi=100$. Não obstante, se faz importante observar que as Figuras (7) e (8) mostram a evolução do campo de temperatura entre as situações indicadas nas Figs (6) e (9) representando a condição de contorno do terceiro tipo, onde consideram-se trocas de calor entre o fluido e meio.

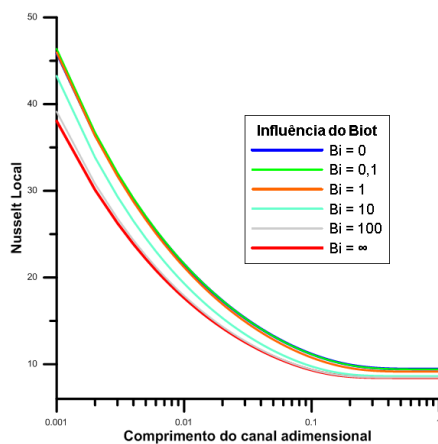
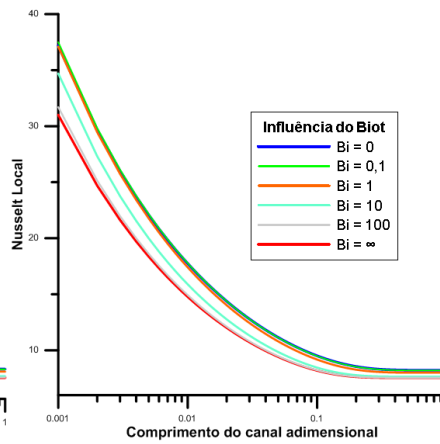
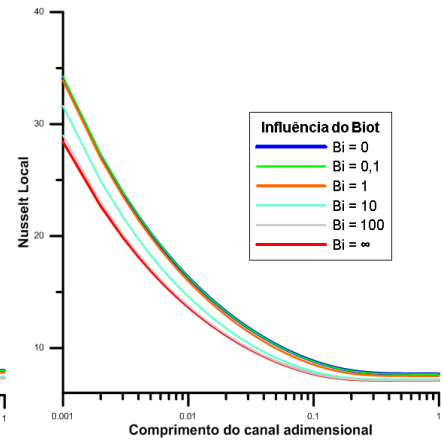
Figura 10: $n=1$, $Bi=0.1$ Figura 11: $n=1$, $Bi=1$ Figura 12: $n=1$, $Bi=10$ Figura 13: $n=1$, $Bi=100$

As Figuras (10-13) mostram o comportamento de fluidos newtonianos ($n=1$), onde, para baixos valores do número de Biot (Fig. (10)) o comportamento é totalmente análogo ao de um fluido pseudoplástico (Fig. (6)) e, para elevados valores do número de Biot ((Fig. (13))), o comprimento de desenvolvimento térmico é mais longo do que para a condição da comparativa da Figura (9).

Figura 14: $n=4$, $Bi=0.1$ Figura 15: $n=4$, $Bi=1$

Figura 16: $n=4$ $Bi=10$ Figura 17: $n=4$ $Bi=100$

Acompanhando a linha de observações anteriores, as Figuras (14-17) mostram o comportamento de fluidos dilatantes ($n=4$), onde, para baixos valores do número de Biot (Fig. (14)) o comportamento continua análogo ao dos índices de lei de potência anteriores (Figs. (6) e (10)) e, para elevados valores do número de Biot (Fig. (17)), o comprimento de desenvolvimento térmico ainda é mais longo do que para a condição da comparativa das Figs. (9) e (13).

Figura 18: Nusselt Local em função do comprimento do canal adimensional para diferentes valores do número de Biot e $n=0.25$ Figura 19: Nusselt Local em função do comprimento do canal adimensional para diferentes valores do número de Biot e $n=1$ Figura 20: Nusselt Local em função do comprimento do canal adimensional para diferentes valores do número de Biot e $n=4$

Nas Figuras (18-20) mostra-se a influência do número de Biot sobre o número de Nusselt local para índices de lei de potência distintos ($n=0.25$, $n=1$ e $n=4$). Observa-se, então, que os números de Nusselt associados a números de Biot elevados são maiores do que aqueles associados a números de Biot reduzidos. Esta diferença é reduzida para pontos muito distanciados da entrada do canal. A Tabela (4) mostra os valores convergidos para o número de Nusselt local para cada caso (índice de lei de potência) investigado, considerando-se $Bi=0$ e $Bi=\infty$.

Tabela 4: valores convergidos para o número de Nusselt local para $n=0.25$, $n=1$ e $n=4$.

$n=0.25$	$n=1$	$n=4$
$Bi = 0 \rightarrow Nu(x \rightarrow \infty) = 9.34$	$Bi = 0 \rightarrow Nu(x \rightarrow \infty) = 8.22$	$Bi = 0 \rightarrow Nu(x \rightarrow \infty) = 7.70$
$Bi = \infty \rightarrow Nu(x \rightarrow \infty) = 8.44$	$Bi = \infty \rightarrow Nu(x \rightarrow \infty) = 7.54$	$Bi = \infty \rightarrow Nu(x \rightarrow \infty) = 7.13$

Os resultados gráficos aqui representados, foram elaborados com os softwares *Matlab* e *Grapher* e os resultados para fins de *benchmarking*, indicados nas tabelas, foram encontrados com auxílio de algoritmo computacional desenvolvido em Fortran 90. Para todos os gráficos e tabelas contidos neste trabalho foram utilizados 200 autovalores e 200 autofunções correspondentes no problema auxiliar.

5. CONCLUSÕES

Os resultados mostram que a formulação dada a partir da contagem de sinal, reitera o quão eficaz e apropriada é a T.T.I.G., para finalidades de *benchmarking*, uma vez que a formulação apresentada foi validada com os resultados mostrados na literatura clássica e, em particular, com Norris e Streid (1940), Shah (1975) e Chahub (2011), com um número de Biot elevado. O desenvolvimento do comprimento de entrada térmica mostra-se mais rapidamente estabelecido para índices de lei de potências menos elevados, fluidos pseudoplásticos, e número de Nusselt mais elevado, onde a razão

entre a transmissão de calor por convecção e por condução pura é mais elevada. Desta forma, os objetivos foram alcançados satisfatoriamente, mostrando a análise da convecção forçada laminar dos fluidos não newtonianos e o comportamento do número de Nusselt sob variações dos parâmetros previamente indicados, Bi e n .

6. REFERÊNCIAS

- ASSAD, G.E., **Análise híbrida da interação mútua escoamento/campo magnético na região de entrada de um canal de placas paralelas**. Dissertação de mestrado, CEAR-UFPB. 2016.
- CHALHUB, D. J. N. M. **Desenvolvimento de Soluções para Problemas da Advecção-Difusão Combinando Transformação Integral e Métodos Discretos**. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia, UFF. Niterói, Rio de Janeiro. Março, 2011.
- COTTA, R.M. **Integral Transform in Computational Heat and Fluid Flow**. CRC Press, Boca Raton, 1993.
- COTTA, R.M. **The Integral Transform Method in Thermal and Fluid**. Science and Engineering, Begell House Inc, NY, USA, 1998.
- KAKAÇ, S. YENER, Y. W.; PRAMUANJAROENKIJ, A. **Convective Heat Transfer**. CRC Press, 3rd edition, p. 196. New York, 2014.
- LIMA, J.A.; QUARESMA, J.N.N. & MACÊDO, E.N. **Integral transform analysis of MHD flow and heat transfer in parallel-plates channels**. International Communications in Heat and Mass Transfer, vol. 34, n. 4, pp. 420-431. 2007.
- MENGÜÇ, P., **Heat transfer in a radiating laminar flow between two parallel plates**, MS thesis, Middle East Technical University, Ankara, Turkey, 1980.
- MIKHAILOV, M. D.; VULCHANOV, N. L. **Computational procedure for Sturm-Liouville problems**. Journal of computational physics, v.5, p. 323-336, 1983.
- NORRIS, R. H. and STREID, D. D., **Laminar flow heat-transfer coefficient for ducts**, Trans. ASME, 62, 525-533, 1940.
- PRINS, J. A., MULDER, J., and SCHENK, J., **Heat transfer in laminar flow between parallel plates**, Appl. Sci. Res., A2, 431-438, 1956.
- R.K. Shah. **Thermal entry length solutions for the circular tube and parallel plates**. Proc.Natl. Heat Mass Transfer Conf., 3rd, Indian Inst. Technol., Bombay, Vol. I, Pap. No. HMT-11-75, 1975.
- SANTOS, C.A.C.; QUARESMA, J.N.N. & LIMA, J. A. **Convective Heat Transfer in Ducts: the Integral Transform Approach**, 348 p., E-Papers, ABCM Mechanical Sciences Series, Rio de Janeiro, Brazil, 2001.
- SELLARS, J. R., TRIBUS, M., and KLEIN, J. S., **Heat transfer to laminar flow in a round tube or flat conduit—The Graetz problem extended**, Trans. ASME, 78, 441-448, 1956.
- TSAI, J. R., ÖZISIK, M. N.. **Radiation and laminar forced convection of non-Newtonian fluid in a circular tube**. International Journal of Heat and Fluid Flow. Elsevier, Dec. 1989.
- VERONESE, J. P. *et al.* **Análise da convecção forçada laminar de um fluido não newtoniano do tipo pseudoplástico via GITT**. In: VII CONGRESSO NORTE NORDESTE DE PESQUISA E INOVAÇÃO (CONNEPI), 2012.

ANALYSIS OF LAMINAR CONVECTION OF NON-NEWTONIAN FLUIDS IN RECTANGULAR DUCTS.

G.E. Assad, gustavo.elia.assad@gmail.com¹

J.A. DE LIMA, jalima@cear.ufpb.br²

C.A.C. SANTOS, carloscabralsantos@yahoo.com.br³

F. A. DE LIMA, fabioarsp@gmail.com⁴

D. L. DE A. VELOSO, dhiego_vel@hotmail.com⁵

P. G. GONÇALVES, pedrogranville@gmail.com⁶

^{1,3,4,5,6} UFPB-PPGEM, Cidade Universitária, s/n - Castelo Branco III, João Pessoa - PB, CEP: 58051-085

² UFPB-CEAR, Cidade Universitária - João Pessoa - PB - Brasil - CEP: 58051-970, Caixa Postal 5115

Abstract. The present work aims at analyzing the forced laminar convection of non - newtonian fluids inside a channel of flat and parallel plates, using the velocity profile in the power law model. The solution of the energy equation will be given by using the Generalized Integral Transformation Technique (G.I.T.T.), whose auxiliary problem is solved using the sign-count method. The influence of the Biot number and the power law index on the temperature field, on the local and medium Nusselt numbers, is shown. The results will be presented in tables and graphs that will be compared with the classic literature.

Keywords: forced convection, non-newtonian fluids, G.I.T.T., Nusselt, Biot.